第1卷 第4期
1984年10月

控 制 理 论 与 应 用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.1, No.4
October, 1984

分布参数与集中参数耦合系统的极点配置和镇定问题

张 秉 钰

（中国科学院成都分院）

摘 要

在工程控制系统中很重要的情形是受控对象是分布参数系统，由网络组成的装置——控制器是由常微分方程描述的集中参数系统．本文第一部分的讨论表明，通过控制器的设计和观测位置的选择，能使分布参数系统和集中参数系统闭合形成的耦合闭环系统的算子具有预先指定的点谱．本文的第二部分给出了能使耦合闭环系统渐近稳定的必要条件和充分条件．

引 言

在工程控制系统中有一种很重要的情形，即受控对象是分布参数系统：

$$\frac{dx}{dt}Ax+bu(t),\quad x(0)=x_0, \tag{1}$$

由网络组成的装置——控制器是集中参数系统：

$$\frac{dz}{dt}=Fz,\quad z(0)=z_0, \tag{2}$$

其中 A 为可分 Hilbert 空间 H 中的线性算子，$u(t)$ 为数值控制函数，F 为定常的 $n\times n$ 矩阵．z 与 z_0 是 n 维欧氏空间 R^n 中的向量，$b,x_0\in H$．对分布参数系统（1）的状态进行量测后所得的量测量是

$$(G_1x)(t)=\langle x(t),\ g_1\rangle k, \tag{3}$$

其中 $g_1\in H$，$k\in R^n$．$G_1x\triangleq\langle x,g_1\rangle k$ 是从 H 到 R^n 的有界线性算子．把量测量（3）输入到控制器（2）：

$$\frac{dz}{dt}=Fz+G_1x. \tag{4}$$

由控制器（4）输出信号到执行机构对受控对象进行控制，其反馈控制律为

本文于1983年8月22日收到．1984年6月1日收到修改稿．

$$u(t)=\langle z(t),\ g_0\rangle,\tag{5}$$

其中 g_0 为 R^n 中的非零向量。系统（1）和（4）闭合后的闭环系统为

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt}=(\mathbf{A}_0+T_1+T_0)\mathbf{x}.\tag{6}$$

这里

$$\mathbf{A}_0=\begin{pmatrix}A&0\\0&F\end{pmatrix},\quad T_0=\begin{pmatrix}0&G_0\\0&0\end{pmatrix},\quad T_1=\begin{pmatrix}0&0\\G_1&0\end{pmatrix},\quad \mathbf{x}=\begin{pmatrix}x\\z\end{pmatrix}\in H\times R^n.$$

对于给定的复数列 $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 是否能选取 b_1, $g_1\in H$, k, $g_0\in R^n$ 和构造矩阵 F，使得 $\sigma_p(\mathbf{A}_0+T_0+T_1)=\{\alpha_i\}_1^\infty$?

文〔1〕对这一问题作了研究．但只得到在一定条件下使得 $\{\alpha_i\}_1^\infty\subset\sigma_p(\mathbf{A}_0+T_0+T_1)$ 的结果。本文则在〔1〕的基础上讨论这一问题．结果表明，通过控制器的设计和观测器位置的选择（即选取适当的 F, g_0, g_1 和 k），能使 $\sigma_p(\mathbf{A}_0+T_0+T_1)=\{\alpha_i\}_1^\infty$（对于一般分布参数系统的极点配置问题参见〔2〕及其所附参考文献）．本文还讨论了系统（1）与（4）耦合后的镇定问题。

一、极点配置问题

相应于（6）式的本征方程为

$$\lambda\mathbf{x}=E\mathbf{x},\tag{7}$$

这里 $E=\mathbf{A}_0+T_0+T_1$．记 $H(\lambda)=\langle R(\lambda,A)b,g_1\rangle\langle R(\lambda,F)k,g_0\rangle$．以 $\rho(\mathbf{A}_0)$ 表示 $\mathbf{A}_0$ 的正则点集．由〔3〕中定理1.3，有

引理 1 设 A 是离散算子[4]，以 $\nu(\lambda,\mathbf{A}_0)$ 表示 $\mathbf{A}_0$ 的特征值 λ 的代数重数（正则点的代数重数规定为0）；$\nu(\lambda,E)$ 为 E 的特征值 λ 的代数重数；$\eta(\lambda)$ 为 $F(\lambda)=1-H(\lambda)$ 的零点 λ 的重复度（极点认为是负阶的零点），那么成立公式

$$\nu(\lambda,E)=\nu(\lambda,\mathbf{A}_0)+\eta(\lambda).$$

条件 (A) A 是 H 中的离散算子．A 的每一特征值 λ_i（$i=1,2,\cdots$）是代数单重的．$\{\varphi_i\}_1^\infty$ 是 A 的全体特征向量，$A\varphi_i=\lambda_i\varphi_i$（$i=1,2,\cdots$）．$\{\phi_i\}_1^\infty$ 是 A 的伴随算子 A^* 的全体特征向量．$A^*\phi_i=\bar\lambda_i\phi_i$（$i=1,2,\cdots$），$\langle\phi_i,\ \varphi_j\rangle=\delta_{ij}$（$i,j=1,2,\cdots$）．$\{\varphi_i\}_1^\infty$ 为 H 中的无条件基。

条件 (B) 矩阵 F 的特征值 τ_j（$j=1,2,\cdots,n$）的代数重数为1．u_j 表示 F 相应于 τ_j 的特征向量，v_j 为相应的共轭特征向量（$j=1,2,\cdots,n$）$\langle u_j,v_j\rangle=\delta_{ij}$。

定理 1　设算子 A 和矩阵 F 分别满足条件 (A) 和 (B)，$\sigma(A)\cap\sigma(F)=\phi$，并且

(i) $b_i=\langle b,\phi_i\rangle\neq 0\ (i=1,2,\cdots,N)$；

(ii) $\{\alpha_i\}_1^N$ 是 N 个两两不等的数，$\alpha_i\notin\sigma_p(A)\cup\sigma(F)\cup\{0\}\ (i=1,2,\cdots,N)$；

(iii) $d_i=\langle R(\alpha_i,F)k,g_0\rangle\neq 0\ (i=1,2,\cdots,N)$；

(iv) $k_i\bar{g}_0^{(i)}\neq 0\ (i=1,2,\cdots,m;\ 1\leq m<n)$，$k_i\,g_0^{(i)}=0\ (m+1\leq i\leq n)$。

这里 $k_i=\langle k,\nu_i\rangle$，$g_0^{(i)}=\langle g_0,u_i\rangle$。那么当

$$g_1=\sum_{l=1}^{N}(\bar{c}_{lN}/\bar{b}_l)\phi_l,$$

$$c_{lN}=(\alpha_l-\lambda_l)\prod_{\substack{k=1\\k\neq l}}^{N}\left(\frac{\alpha_k-\lambda_l}{\lambda_k-\lambda_l}\right)\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j(\alpha_j-\lambda_l)}\prod_{\substack{i\neq j\\i=1}}^{N}\left(\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right),\tag{8}$$

则有 $\{\alpha_i\}_1^N\cup\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_j\}_{m+1}^{n}\subset\sigma_p(E)$，并且$\sigma_p(E)$ 中最多有 m 个点不在$\{\alpha_i\}_1^N\cup\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_i\}_{m+1}^{n}$中。

证　记

$$f_{1N}(\lambda)=\prod_{k=1}^{N}\left(\frac{\lambda-\alpha_k}{\lambda-\lambda_k}\right)$$

$$f_{2N}(\lambda)=\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j(d_j-\lambda)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\left(\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right).$$

又记 $f_N(\lambda)=f_{1N}(\lambda)\cdot f_{2N}(\lambda)$。则 $f_N(\lambda)$ 是以 $\lambda_k\ (k=1,2,\cdots,N)$ 为单极点的半纯函数。它可按分式展开

$$f_N(\lambda)=\sum_{i=1}^{N}(-c_{iN})/(\lambda-\lambda_i),$$

其中 c_{iN} 如(8)式所示。$(-c_{iN})$ 为 $f_N(\lambda)$ 在 λ_i 处之残数 $(i=1,2,\cdots,N)$。但是 $f_N(\alpha_j)=-1/d_j\ (j=1,2,\cdots,N)$。故

$$\sum_{i=1}^{N}\frac{c_{iN}}{\alpha_j-\lambda_i}=\frac{1}{d_j}\quad(j=1,2,\cdots,N),\tag{9}$$

令$g_1=\sum_{j=1}^{N}(\bar{c}_{jN}/\bar{b}_j)\phi_j$，则$g_1\in H$。这时$H(\lambda)=1$变成

$$\left(\sum_{i=1}^{N}\frac{c_{iN}}{\lambda-\lambda_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j g_0^{(j)}}{\lambda-\tau_j}\right)=1. \tag{10}$$

依（9）式，$H(\alpha_i)=1\ (i=1,2,\cdots,N)$。由引理1知，$\{\alpha_i\}_1^N\subset\sigma_p(E)$。由于$\lambda_i(i=N+1,\cdots)$为$F(\lambda)$的零阶零点，又为$\mathbf{A}_0$的一重点谱，故$\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\subset\sigma_p(E)$。同理知$\lambda_i\notin\sigma_p(E)$ $(i-1,2,\cdots,N)$。$\tau_j\notin\sigma_p(E)\ (i=1,2,\cdots,m)$，$\tau_j\in\sigma_q(E)\ (j=m+1,\cdots,n)$，即$\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_j\}_{m+1}^{n}\cup\{\alpha_j\}_1^N\subset\sigma_p(E)$。并且$\lambda_i\ (i=1,2,\cdots,N)$，$\tau_j\ (j=1,2,\cdots,m)$不在$\sigma_p(E)$中。由引理1知，$\sigma_p(E)$中不在集$\{\lambda_i\}_1^{\infty}\cup\{\tau_j\}_1^{n}$的点必须是方程（10）的根。但是方程（10）最多有$m+N$个不同的根，而$\{\alpha_i\}_1^N$已是其中N个不同的根。所以$\sigma_p(E)$最多有m个不在$\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_i\}_{m+1}^{n}\cup\{\alpha_i\}_1^N$中的点。

证毕。

推论 1 在定理1的条件下，设$m=1$，记

$$\tilde{\tau}_N=\left(\prod_{i=1}^{N}\frac{\lambda_i}{\alpha_i}\right)\left[\tau_1-\sum_{i=1}^{N}\frac{c_{iN}}{\lambda_i}k_1\bar{g}_0^{(1)}\right]. \tag{11}$$

如果$\tilde{\tau}_N\notin\{\tau_1\}\cup\{\lambda_i\}_1^N$，那么$\sigma_p(E)=\{\alpha_i\}_1^N\cup\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_j\}_2^n\cup\{\tilde{\tau}_N\}$。

证 方程（10）这时变成

$$(\lambda-\tau_1)\left(\sum_{i=1}^{N}(\lambda-\lambda_i)\right)=\left[\sum_{i=1}^{N}\prod_{\substack{j=1\\ i\neq i}}^{N}(\lambda-\lambda_j)\,c_{iN}\right]k_1\bar{g}_0^{(1)}, \tag{12}$$

它最多有$N+1$个不同的根，而$\{\alpha_i\}_1^N$已是其N个不同的根。由于根和系数的关系，知$\tilde{\tau}_N$是（12）式的根。由于$\tilde{\tau}_N\notin\{\lambda_i,\tau_1\}_1^N$，因此$\tilde{\tau}_N$亦是（10）式的根，故$\tilde{\tau}_N\in\sigma_p(E)$。由于方程（12）不再有其它根，故有$\sigma_p(E)=\{\alpha_i\}_1^N\cup\{\lambda_i\}_{N+1}^{\infty}\cup\{\tau_j\}_2^n\cup\{\tilde{\tau}_N\}$。

证毕。

定理 2 设算子A和矩阵F分别满足条件（A）和（B），$\sigma_p(A)\cap\sigma(F)=\phi$，

$\inf\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|=\delta>0$，并且

（i）$b_i=\langle b,\phi_i\rangle\neq 0\quad(i=1,2,\cdots)$；

（ii）$k_i g_0^{(i)}\neq 0(1\leq i\leq m)$；$k_i g_0^{(i)}=0\quad(m+1\leq i\leq n)$；

（iii）数列 $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 中，$\alpha_i\neq\alpha_j(i\neq j)$，$\alpha_i\notin\{\lambda_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_1^n\cup\{0\}\quad(i=1,2,\cdots)$；

$d_i=\langle R(\alpha_i,F)k,g_0\rangle\neq 0\ (i=1,2,\cdots)$；

（iv）
$$\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{|\alpha_i-\lambda_i|}{|b_i|^2}\right|^2<+\infty,\quad\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i b_i|^2<+\infty.$$

如果 $g_1=\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\bar{c}_i/\bar{b}_i)\phi_i$，其中 $\bar{c}_i=\lim\limits_{N\to\infty}c_{iN}$，$c_{iN}$ 如（8）式所示，则 $\{\tau_j\}_{m+1}^n\cup\{\alpha_i\}_1^\infty\subset\sigma_p(E)$。并且 $\sigma_p(E)$ 中最多有 m 个点不在集 $\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_{m+1}^n$ 中。

证　（1）由假设条件知 $\lim\limits_{i\to\infty}|\alpha_i-\lambda_i|=0$，故存在 $\delta_i>0(i=1,2)$，使得 $\inf\limits_{i\neq j}|\alpha_i-\alpha_j|=\delta_1>0$，$\inf\limits_{i\neq j}|\alpha_i-\lambda_j|=\delta_2>0$。又由于 $\lim|\lambda_i d_i|=$ 常数 $\neq 0$，所以由条件（iv）知

$$\sum_{i=1}^{\infty}|(b_i/d_i)|^2<+\infty.$$

由于

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\left|\frac{\lambda_i-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha_j}\right|\leq\frac{1}{\delta_1}\left(\sum_{i=1}^{\infty}\left|\frac{\lambda_i-\alpha_i}{b_i}\right|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2\right)^{1/2}<+\infty,$$

故

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}=\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\quad(j=1,2,\cdots).\tag{13}$$

并且极限关于 j 是一致收敛的。同时存在 M_0，使得

$$\left|\prod_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\frac{\lambda_i-\alpha_i}{\alpha_i-\alpha_j}\right|<M_0\ (N=1,\ 2,\cdots;\ j=1,2,\cdots),\tag{14}$$

同理亦有

$$\lim_{N\to\infty}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{\alpha_i-\alpha}{\lambda_i-\lambda_j}=\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\alpha_i-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\quad(j=1,\ 2,\ \cdots),\tag{15}$$

$$\left|\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{\alpha_i-\lambda_j}{\lambda_i-\lambda_j}\right|<M_0\quad(N=1,\ 2,\cdots;\ \ j=1,\ 2,\cdots).\tag{16}$$

并且（15）式的极限关于 j 是一致收敛的。由于

$$\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j\,(\alpha_j-\lambda_l)}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{N}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right|\leq M_0\left|\sum_{j=1}^{N}\frac{\alpha_j-\lambda_j}{d_j\,(\alpha_j-\lambda_l)}\right|$$

$$\leq M_1\left(M_2+\frac{1}{|b_l|^2}\right)^{1/2}\quad(N=1,\ 2,\cdots;\ \ l=1,\ 2,\cdots),$$

其中 $M_1=M_0\left(\sum_{j=1}^{\infty}(b_j/d_j)^2\right)^{1/2}$， $M_2=\frac{1}{\delta_2}\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\alpha_j-\lambda_j|^2/|b_j|^2\right)$，

均是与 N 和 l 无关的常数。所以

$$\sum_{l=1}^{N}\left|\frac{c_{lN}}{b_l}\right|^2\leq\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_l-\lambda_l}{|b_l|^2}\right|^2\right)M_0^2M_1^2+M_0^2M_1^2M_2\left(\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{\alpha_l-\lambda_l}{b_l}\right|^2\right).\tag{17}$$

由（13）至（16）知

$$\lim_{N\to\infty}c_{lN}/b_l=c_l/b_l\quad(l=1,\ 2,\ \cdots),\tag{18}$$

极限关于 l 是一致收敛的。故

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{l=1}^{N}\left|\frac{c_{lN}}{b_l}\right|^2=\sum_{l=1}^{\infty}\left|\frac{c_l}{b_l}\right|^2<+\infty.\tag{19}$$

（2） 令 $g_1\sum_{i=1}^{\infty}(\bar{c}_i/\bar{b}_i)\phi_i$。由于 $\{\phi_i\}_1^\infty$ 是 H 中的无条件基，由已知结果〔5〕和（19）式，知 $g_1\in H$，这时方程 $H(\lambda)=1$ 变为

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda-\lambda_i}\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{k_i\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_j}\right)=1.\tag{20}$$

若能验证到 α_j（$j=1,2,\cdots$）为（20）式的根，那么由引理 1 便知 $\{\alpha_i\}_1^\infty \subset \sigma_p(E)$。

事实上，由定理 1，α_j（$j=1,2,\cdots,N$）是方程

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{c_{jN}}{\lambda-\lambda_j}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{k_i\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_i}\right)=1$$

的根，即

$$\left(\sum_{j=1}^{N}\frac{c_{jN}}{\alpha_i-\lambda_j}\right)d_i=1 \quad (i=1,2,\cdots,N).$$

在上式中令 $N\to\infty$，便有

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c_j}{\alpha_i-\lambda_j}\right)d_i=1.$$

也就是 $H(\alpha_i)=1$ （$i=1,2,\cdots$）。

（3） 记方程（20）的全部根为 $\{\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_i,\cdots\}$，那么存在 $\{\xi_1,\cdots,\xi_i,\cdots\}$ 的一个重新排列（不妨照原样记）和正整数 K，使得 $i>K$ 时，

$$|\lambda_i-\xi_{m+i}|<6|\langle q_1,\varphi_i\rangle||\langle b,\phi_i\rangle|=6|c_i|.$$

事实上，$1-H(\lambda)$ 的全部极点为 $\{\lambda_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_1^m$。记 $\{\tau_1,\cdots,\tau_m,\lambda_1,\cdots,\lambda_n\cdots\}$ 中不同两点的最小距离为 δ，则 $\delta>0$。以 λ_i 为心，$\delta/3$ 为半径作圆 s_i；τ_j 为心，$\delta/3$ 为半径作圆 σ_j（$j=1,2,\cdots m$；$i=1,2,\cdots$），诸圆 $\{s_i\}_1^\infty\cup\{\sigma_j\}_1^m$ 两两不交，且在 $(\cup s_i)\cup(\cup\sigma_j)$ 外，$|\lambda-\lambda_i|>\delta/3$，$|\lambda-\lambda_i|\geq\delta/3$。这时有

$$\begin{aligned}|H(\lambda)|\leq&\left|\sum_{i=1}^{k_0}\frac{c_i}{\lambda-\lambda_i}\right|\left|\sum_{j=1}^{M}\frac{k_i\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_j}\right|\\&+\left|\sum_{i=k_0+1}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda-\lambda_i}\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{k_i\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_j}\right|\leq\left|\sum_{i=1}^{k_0}\frac{c_i}{\lambda-\lambda_i}\right|\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{k_i\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_j}\right|\\&+M\left|\sum_{i=k_0+1}^{\infty}c_i\right|,\end{aligned}\tag{21}$$

这里 M 为一常数。

由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|c_i|<+\infty$，可取 k_0 充分大，使得上式右端的第二项小于 1/6。对此固定的 k_0，可取 R 充分大，作圆 $C:|\lambda|\leq R$，使得 $\tau_j(j=1,2,\cdots,m)$ 在 C 内。并且当 $|\lambda|\geq R$

时，（21）式右端第一项也小于1/6。于是区域 $S=C\cup(\cup s_i)$ 外，$1-H(\lambda)$ 的零点全部在 S 内。显然此函数的极点也在 S 内。诸圆 s_i 和 C 内部相交者记为 s_{i1}。这样的圆连同 σ_i 一起只有有限个。s_i 和 C 不相交者记为 s_{i2}，记 $\widetilde{C}=C\cup(\cup s_{i1})$。这样 $S=\widetilde{C}\cup(\cup s_{i2})$，且 $\widetilde{C}$、s_{i2} 为两两不交的区域，在 $\widetilde{C}$ 和 s_{i2} 的边界上，$|H(\lambda)|\leq\frac{1}{3}<1$，依半纯函数的 Rouché 定理，函数1和 $1-H(\lambda)$ 在每一个 s_{i2} 及 $\widetilde{C}$ 内部零极点个数之差相等。从而 $1-H(\lambda)$ 的零点、极点个数相等。显然 $1-H(\lambda)$ 在 s_{i2} 内有唯一极点 λ_i，从而有唯一零点 ξ_{i+m} 满足 $|\lambda_i-\xi_{i+m}|<\frac{\delta}{3}$。又若在 $\widetilde{C}$ 内 $1-H(\lambda)$ 有 N_1 个极点，则亦有 N_1 个零点。这样 $1-H(\lambda)$ 的零点与极点之间一一对应，并且存在正整数 K，当 $i<K$ 时，

$$|\lambda_i-\xi_{i+m}|<\frac{\delta}{3}. \tag{22}$$

ξ_{i+m} 的估计可进一步精确化。由于 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}c_i$ 收敛，故 i 充分大时，$6M|c_i|\leq\frac{\delta}{3}$。今以 λ_i 为心，$6|c_i|$ 为半径作圆 s_i'，$s_i'\subset s_i$。在 s_i' 的边界 Γ_i' 上，

$$\left|\sum_{j=1}^{m}\frac{k_j\bar{g}_0^{(i)}}{\lambda-\tau_j}\right|\left|\sum_{i=k_0+1}^{\infty}\frac{c_i}{\lambda-\lambda_i}\right|\leq\frac{1}{6}+M\sum_{i=k_0+1}^{\infty}|c_i|.$$

这一不等式是由于 $\Gamma\lambda\in_i'$ 时，若 $j\neq i$，$|\lambda-\lambda_j|>\frac{\delta}{3}|\lambda-\tau_j|>\frac{\delta}{3}$，而 $|\lambda-\lambda_j|=6|c_i|$。这样在 Γ_i' 上，$|H(\lambda)|<\frac{1}{2}$。依 Rouché 定理，$1-H(\lambda)$ 的在 s_i 内的零点实际上在 s_i' 内，即当 $i>K$ 时，$|\lambda_i-\xi_{i+m}|<6|c_i|$。

（4）这时 $\{\xi_i\}_1^\infty$ 中最多有 m 个不在 $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 中的点。否则由于 $\{\alpha_i\}_1^\infty\subset\{\xi_i\}_1^\infty$，必有 $\{\alpha_i\}_1^\infty$ 的一个重新排列 $\{\alpha_{ki}\}$，使得可选出 $\{\lambda_i\}_1^\infty$ 中的一个子列 $\{\lambda_{\theta i}\}$，当 i 充分大时必有 $|\alpha_{ki}-\lambda_{\theta i}|<\frac{\delta}{3}$，且 $k_i\neq\theta_i$ $(i=1,2,\cdots)$，那么当 i 充分大时，

$$\begin{aligned}|\lambda_{k_i}-\alpha_{k_i}|&=|\lambda_{k_i}-\lambda_{\theta i}+\lambda_{\theta i}-\alpha_{k_i}|\\&\geq|\lambda_{k_i}-\lambda_{\theta i}|-|\lambda_{\theta i}-\alpha_{k_i}|\\&\geq\delta_0-\frac{\delta_0}{3}=\frac{2\delta_0}{3}>0.\end{aligned}$$

这与 $\lim\limits_{i\to\infty}|\lambda_{k_i}-\alpha_{k_i}|=0$ 矛盾。

由引理 1，$\lambda_i\notin\sigma_p(E)$ $(i=1,2,\cdots)$，$\tau_j\notin\sigma_p(E)$ $(1\le j\le m)\{\tau_j\}_{m+1}^n\subset\sigma_p(E)$，而 $\sigma_p(E)$ 中最多有 m 个点不在 $\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_{m+1}^n$ 中。证毕。

推论 2　在定理 2 的条件下，设 $m=1$，$\tilde{\tau}=\lim\limits_{N\to\infty}\tilde{\tau}_N$，$\tilde{\tau}_N$ 如(11)式所示。且 $\tilde{\tau}\notin\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\lambda_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_1^n$，则 $\sigma_p(E)=\{\tilde{\tau}\}\cup\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_2^n$。

证　易证 $\tilde{\tau}$ 是(20)式的根。由定理 2 和引理 1 即得此推论。

推论 3　在推论 2 的条件下，记

$$D_1=1+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i-\lambda_i}{\lambda_i}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\lambda_k}{\lambda_i-\lambda_k},\tag{23}$$

$$D_2=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{\alpha_i-\lambda_i}{\lambda_i}\prod_{\substack{k=1\\k\neq i}}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i-\alpha_k}{\lambda_i-\lambda_k}\right)\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{\alpha_j(\alpha_j-\lambda_j)}{\alpha_j-\lambda_i}\right)\cdot\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\frac{\lambda_i-\alpha_j}{\alpha_i-\alpha_j},\tag{24}$$

$$D_3=\prod_{i=1}^{\infty}\frac{\lambda_i}{\alpha_i},\tag{25}$$

则 $\tilde{\tau}=D_3(D_1\tau_1-D_2)$。

证　注意等式（见〔1〕中定理 2 的证明）

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\lambda_j-\alpha_j}{\lambda_i-\alpha_j}\prod_{\substack{i=1\\i\neq j}}^{\infty}\left(\frac{\lambda_i-\lambda_j}{\alpha_i-\alpha_j}\right)=1\quad(i=1,2,\cdots)$$

将 c_i 的表达式代入 $\tilde{\tau}$ 中，经计算即得。

综合以上定理及推论可得

定理 3　在定理 2 的条件下，若有复数 $\tilde{\tau}\notin\{\lambda_i\}_1^\infty\cup\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_1^n$ 且 $\tilde{\tau}=D_3$

$(D_1\tau_1-D_2)$，$D_1\neq0$，那么当 $k=\nu_1$，$g_0=u_1$，$g_1=\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{c_i}/\overline{b_i})\phi_i$ 时，$\sigma_p(E)=\{\alpha_i\}_1^{\infty}\cup\{\tilde{\tau}\}\cup\{\tau_j\}_2^n$.

二、镇定问题

考虑状态方程

$$\frac{dx}{dt}=Ax,\quad x(0)=x_0. \tag{26}$$

当算子 A 满足条件（A），且 A 为 H 中 c_0 类半群的生成元，我们知道系统（26）渐近稳定的必要条件是 A 的特征值具有非实部，而充分条件是每一特征值的实部小于0[6]．当系统（26）不是渐近稳定时，希望建立耦合闭环系统（6）．通过 F、g_0、k、b 和 g_1 的选择，使得系统（6）渐近稳定．对于这样的问题，利用前面的结果，可得如下定理．

定理 4 设 A 满足条件(A)，且为 H 中 c_0 类半群的生成元．$\inf\limits_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|=\delta>0$．$J$ 为一指标集

$$\begin{cases}\mathrm{Re}\,\lambda_k>0 & i\in J,\\ \mathrm{Re}\,\lambda_k\leq0 & i\notin J,\end{cases}$$

那么系统（6）渐近稳定的必要条件是 $\sum\limits_{k\in J}\mathrm{Re}\,\lambda_k<+\infty$.

证 $\mathbf{A}_0$ 在 $H\times R^n$ 中生成 c_0 类半群，T_0+T_1 为 $H\times R^n$ 中的有界线性算子，$\mathbf{A}_0+T_0+T_1$ 在 $H\times R^n$ 也生成 c_0 类半群 $T(t)$ $(t\geq0)$．设 $\sigma_p(\mathbf{A}_0+T_0+T_1)=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots\}$，那么由系统（6）的渐近稳定性和泛函分析中的共鸣定理，$\|T(t)\|_{H\times R^n}\leq M<+\infty$，故 $\mathrm{Re}\,\xi_i\leq0$（$i=1,2,\cdots$）．另外同定理 2 的证明步骤 3 类似可证明当 i 充分大时（$i>K$），有 $|\lambda_i-\xi_{i+m}|\leq6|\langle b,\phi_i\rangle\|\langle g_1,\varphi_i\rangle|$．这时

$$\sum_{i\in J}\mathrm{Re}\lambda_i\leq\sum_{i\in J}|\mathrm{Re}\lambda_i-\xi_{i+m}|$$

$$\leq\sum_{\substack{i\in J\\ i\leq K}}|\mathrm{Re}\,\lambda_i-\xi_{i+m}|+\sum_{\substack{i\in J\\ i>K}}|\mathrm{Re}\,\lambda_i-\xi_{i+m}|$$

$$\leq\sum_{\substack{i\in J\\ i\leq K}}|\mathrm{Re}\,\lambda_i-\xi_{i+m}|+\sum_{\substack{i\in J\\ i>K}}6|b_i|\,|\langle g_1,\varphi_i\rangle|$$

$$<+\infty,$$

证毕。

定理 5　设 A 为满足条件（A）的离散谱算子，$0\notin\rho(A)$，A 为 H 中 c_0 类半群的生成元，满足条件

（i）
$$\sum_{i=1}^{\infty}(1/d_i^2)<+\infty,\ \text{这里}\ d_i=\inf_{i\neq j}|\lambda_i-\lambda_j|\ (j=1,2,\cdots);$$

（ii）
$$\sum_{i\in J}|\lambda_i|^2(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^{\frac{1}{2}}<+\infty,$$

其中 J 的定义同定理 4 中一样，那么存在 $g_0\in R^n\ k\in R^n$，g_1，$b\in H$ 和矩阵 F，使得系统（6）渐近稳定。

证　令
$$b=\sum_{i=1}^{\infty}b_i\phi_i$$

其中
$$b_i=\begin{cases}(\mathrm{Re}\,\lambda_i)^{\frac{1}{2}} & i\in J,\\ 1/|\lambda_i|, & i\notin J.\end{cases}$$

显然 $\sum_{i=1}^{\infty}|b_i|^2<+\infty$，故 $b\in H$，$b_i\neq 0\ (i=1,2,\cdots)$。又令
$$\alpha_i=\begin{cases}\lambda_i-2\mathrm{Re}\,\lambda_i & i\in J\\ \lambda_i-\dfrac{1}{|\lambda_i|^2 i^3} & i\notin J,\end{cases}$$

则有 $\mathrm{Re}\,\alpha_i<0\ (i=1,2,\cdots)$。由条件（ii）知
$$\sum_{i=1}^{\infty}|\lambda_i b_i|^2<\infty,\ \sum_{i=1}^{\infty}(|\alpha_i-\lambda_i|/|b_i|^2)^2<+\infty.$$

又记 D_1、D_2 和 D_3 如（23）、（24）和（25）所示（这时最多有有限个 α_i 不满足 $\alpha_i\neq\alpha_j\ (i\neq j)$ 的条件，这时可调整一下这有限个 α_i，使得 $\alpha_i\neq\alpha_j\ (i\neq j)$，同时仍有 $\mathrm{Re}\alpha_i<0\ (i=1,2,\cdots)$。同理不妨也设 $D_1\neq 0$），取 τ_2，$\tau_3,\cdots,\tau_n$ 和 $\tilde{\tau}$ 为 n 个具有负实部的复数，且互不相等，$\tilde{\tau}\notin\sigma_p(A)\cup\{\alpha_i\}_1^\infty$。又选取 $\tau_1=(\tilde{\tau}/D_3+D_2)/D_1$，使得 $\{\tau_i\}_1^n\cap\sigma_p(A)=\phi$。构造矩阵 F，其以 $\tau_i\ (1\leq i\leq n)$ 为特征值且满足条件（B），那么选取 $k=V_1$，$g_0=u_1$，$g_1=\sum_{i=1}^{\infty}(\overline{c_i}/\overline{b_i})\phi_i$，则有 $\lambda_p(E)=\{\alpha_i\}_1^\infty\cup\{\tau_j\}_2^n\cup\{\tilde{\tau}\}$。并且 E 为离散谱算子

($E = A_0 + T_0 + T_1$)，除有限个外，E的特征值的代数重数为1[4]. 依〔6〕之推理，系统(6)渐近稳定.

证毕.

致 谢 本文是在王康宁副研究员的指导下完成的，谨致谢意.

参考文献

〔1〕 王康宁，分布参数与集中参数耦合系统的极点配置问题，系统科学与数学，2，2(1982)，95—108.

〔2〕 王康宁、吕涛、周振宇，分布参数控制系统的极点配置问题，中国科学，2(1982)，172—184.

〔3〕 刘嘉荃，一类线性算子的一秩扰动与极点配置问题，系统科学与数学，2，2(1982)，81—93.

〔4〕 Dunford, N. and Schwartz, J. Linear Operator, Part Ⅲ, New York (1971).

〔5〕 Гохберг, И. Ц. и Крейн, М. Г., Ввебенце в теорию линейных несамосопорященных опepатовов, Изд. Москва (1965).

〔6〕 王康宁、关肇直，弹性振动的镇定问题，中国科学，4(1974)，335—350.

POLE ASSIGNMENT AND FEEDBACK STABILITY FOR DISTRIBUTED PARAMETER SYSTEM COUPLED WITH LUMPED PARAMETER SYSTEM

Zhang Binyu

(Institute of Mathematical sciences, chengdu Brance of Academia sinica, Chengdu)

Abstract

In an engineering control system it is of great importance that the control object is described by a distributed parameter system while the controller is governed by a lumped parameter system. The first part of the paper indicates that the operator of the closed loop system formed by associating distributed parameter system with lumped parameter system may have the assignable point spectrum by designing the controller and choosing the location of the observator. In the second part, we give a necessary condition and a sufficient condition for the feedback stability of the distributed parameter system coupled with the lumped parameter system.