第2卷 第1期
1985年1月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 2. No.1
January, 1985

一类单相油层参数的辨识

喻文焕

(南开大学)

摘要

文中单相油层的压力是渗流方程(抛物型方程)的 Dirichlet—Neumann 混合始边值问题的解。采用函数空间优化方法，给出了辨识渗流方程动态系数的公式．并且还给出了唯一性的条件，即依靠给定的输入—输出数据，使得被辨识的参数是唯一的．

对于单相油层参数（存储系数、动态系数）的辨识研究工作已有很多年了．过去主要使用最小二乘法拟合参数，这个方法存在很多缺点．关于这方面的文献简介见[1、2]．

Chavent, G. [2]使用函数空间优化法，提出了一个很有用的参数辨识法．但由于尚难以保证被辨识参数是唯一的，影响着该法的使用．

北村新三等[3]对于一维抛物型方程、分布量测的情形，给出了保障被辨识出的参数是唯一的条件，但该条件不太好使用．

本文针对与[2]中模型不同的另一类单相油层参数的辨识，首先说明了该定解问题是适定的，然后给出了最佳参数存在的必要条件，最后给出了一个保障被辨识参数是唯一的条件．

I．问题的陈述

作为理论上的近似，一类单相非均质油层的油压分布能用下述定解问题描述：

$$
\begin{cases}
\wedge(a)P \triangleq \phi\partial_t P - \sum\limits_{i=1}^{m}\partial_i(a_i(x)\partial_i P) = 0, \quad (x,t)\in Q \triangleq \Omega\times(0,T), & (1)\\
P\Big|_{\Sigma_1} = e, \qquad \Sigma_1 \triangleq \partial\Omega_1\times(0,T), & (2)\\
\dfrac{\partial P}{\partial v_a}\Big|_{\Sigma_2} = 0, \qquad \Sigma_2 \triangleq \partial\Omega_2\times(0,T), & (3)\\
P\Big|_{\Sigma_3} = 0, \qquad \Sigma_3 \triangleq \partial\Omega_3\times(0,T), & (4)\\
P(x,0) = P_0(x), \quad x\in\Omega, & (5)
\end{cases}
$$

本文于 1983 年 6 月 2 日收到．1984 年 2 月 16 日收到修改稿．

其中各量的含意如下：

P：$Q\to\widetilde{V}$ 是油压，$\widetilde{V}$ 是解空间。

ϕ：岩块的孔隙度，本文假定 ϕ 是 1。

$\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 是油层存在的几何区域。

$\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2\cup\partial\Omega_3$ 是 Ω 的边界。$\Sigma\triangleq\partial\Omega\times(0,T)$。

$\partial\Omega_1$：油层的部分边界，在其上抽出油或者注入水。

$\partial\Omega_2$：油层的封闭边界，即在此边界上，油层与周围介质无交换。

$\partial\Omega_3$：油层与另一油层交界处，交界处的压力 P_e 已知，不妨设 $P_e=0$。

e：压力 P 在边界 $\partial\Omega_1$ 上的值（已知）。

P_0：初始油压。

$$\frac{\partial P}{\partial v_a}\triangleq\sum_{i=1}^{m}a_i\partial_iP\cos(n,x_i)$$。由Darcy 定律，它代表油的流速。

n：边界 $\partial\Omega$ 的外法向么矢。

$a\triangleq\{a_1(x),\cdots,a_m(x)\}$　　$(x\in\Omega)$：动态系数。

在油田开发过程中，企望知道 $a(x)$。为此我们可以在边界 $\partial\Omega_1$ 上测得油的流速：

$$\frac{\partial P(s,t)}{\partial v_a}=q(s,t),\qquad (s,t)\in\Sigma_1,\tag{6}$$

其中　q 是油井的生产率。然后利用这个"冗余的"测量值，确定动态系数$a(x)$。

定义 1　函数对$\{a,P\}$叫做问题(1)～(6)的解，如果存在 $a\in U_{ad}$，$P\in\widetilde{V}$ 使得关系式(1)～(6)恒成立，其中 U_{ad} 是特定的容许参数集。

定义 2　我们说单相油层参数 a 在容许参数集 U_{ad} 内是能辨识的，如果利用输入—输出关系式(1)～(5)及输出数据(6)，能唯一地确定 $a\in U_{ad}$ 及$P\in\widetilde{V}$ 使得$\{a,P\}$是(1)～～(6)的解，并且称 a 是真参数。

本文研究动态系数 a 的能辨识性。

Ⅱ．关于 Dirchlet—Neumann 混合始边值问题的适定性

讨论更一般的混合问题：

$$Au\triangleq\partial_tu-\sum_{i,j=1}^{m}\partial_i[b_{ij}(x)\partial_ju]+\sum_{i=1}^{m}b_i\partial_iu+bu=f(x,t)\in Q.$$

$$\left.\begin{aligned}&u\big|_{t=0}=\varphi(x),\\&u\big|_{\Sigma_1}=\Phi_1,\qquad u\big|_{\Sigma_3}=0,\\&\frac{\partial u}{\partial v_b}\triangleq\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}\,\partial_ju\cos(n,x_i)\Big|_{\Sigma_2}=\Phi_2.\end{aligned}\right\}\tag{7}$$

定理 1 假定存在 $\alpha\in(0,1)$, $\mu\geq v>0$, 使得

c_1. $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ 有界, $m\leq 3$, $\partial\Omega\in c^{2+\alpha}$,

c_2. $b_{ij}\in c^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$,

$$v|\xi|^2\leq\sum_{i,j=1}^{m}b_{ij}(x)\xi_i\xi_j\leq\mu|\xi|^2,\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^m,\quad x\in\overline{\Omega},$$

c_3. $b_i,b\in c^{\alpha}(\overline{\Omega})$,

c_4. $f\in c^{\alpha,\alpha/2}(\overline{Q})$, $\varphi\in c^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $\Phi_1\in c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{\Sigma}_1)$,

$\Phi_2\in c^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Sigma}_2)$,

则问题(7)存在唯一解 $u\in c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$. 其中 $c^{k+\alpha}(\overline{\Omega})$, $c^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{Q})$, $c^{k+\alpha,(k+\alpha)/2}(\overline{\Sigma}_1)$的定义参见[4].

证 当 b_{ij}、b_i、$b\in c^{1+k}(\overline{\Omega})$ $\left(k>\dfrac{m}{2}\right)$时, [5]曾证明问题(7)存在古典解. 我们仿照[4], 利用位势理论给出一个证明(因篇幅限制, 略).

Ⅲ. 关于动态系数的辨识

设容许参数集为

$$U_{ad}\triangleq\{a=(a_1,\cdots,a_m)\in[c^{1+\alpha}(\overline{\Omega})]^m;\ 0<v\leq a_i(x)\leq\mu, x\in\overline{\Omega}\}.\tag{8}$$

关于(1)~(6)还作出如下的假定

$$(H):\begin{cases}e\in c^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Sigma}_1)\text{及}P_0\in c^{2+\alpha}(\overline{\Omega})\text{已知,}\\ \Omega\text{满足定理 1 的假定.}\end{cases}$$

$\forall a\in U_{ad}$, 由定理 1, 问题(1)~(5)存在唯一解 $P\in c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$. 为了表示这种依赖关系, 记 $P\triangleq P(a)\triangleq P(x,t;a)$.

我们希望最佳动态系数 $a^0(x)$应使泛函

$$J(a)\triangleq\int_{\Sigma_1}\left|\frac{\partial P(a)}{\partial v_a}-q\right|^2 d\Sigma_1\tag{9}$$

取极小值, 其中 q 是边界 $\partial\Omega_1$ 上油的流速[cf.(6)式].

定理 2 假定(H)真, 则由(1)~(5)确定的映射 $P(a)$: $U_{ad}\to\widetilde{V}\triangleq c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ 是连续可微的. 且 Frèchet 微分$P'(a)h\triangleq\dot{P}$[$a\in U_{ad},h\in U\triangleq[c^{1+\alpha}(\overline{\Omega})]^m$]由下式确定:

$$\wedge(a)\dot{P}=\sum_{i=1}^{m}\partial_i(h_i\partial_iP),\qquad h\triangleq(h_1,\cdots,k_m)\in U,$$

$$\left.\begin{aligned} &\dot{P}\Big|_{t=0}=0, \\ &\dot{P}\Big|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=0, \\ &\frac{\partial\dot{P}}{\partial v_a}\Bigg|_{\Sigma_2}=-\sum_{i=1}^{m}h_i\,\partial_i P\cos(n,x_i)\Big|_{\Sigma_2}. \end{aligned}\right\} \qquad (10)$$

证 $\forall a\in U_{ad}$，$h\in U$，取 $\lambda_0>0$ 充分小，使得 $a+\lambda_0 h\in U_{ad}$。于是 $a+\lambda h\in U_{ad}$ $\forall\ \lambda\in(0,\lambda_0)$。

兹将 $a+\lambda h\triangleq\tilde{a}$、$a$ 分别代入(1)～(5)后，便可确定解 $P(a+\lambda h)\triangleq\tilde{P}$、$P(a)\triangleq P$。再将所得二式相减，经过显然的计算，便有

$$\left.\begin{aligned} &\wedge(\tilde{a})\,\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}=\sum_{i=1}^{m}\partial_i(h_i\partial_i P), \qquad (x,t)\in Q, \\ &\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\Bigg|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=0, \\ &\frac{\partial}{\partial v_{\tilde{a}}}\left(\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\right)\Bigg|_{\Sigma_2}=-\sum_{i=1}^{m}h_i\partial_i P\cos(n,x_i)\Bigg|_{\Sigma_2} \\ &\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\Bigg|_{t=0}=0. \end{aligned}\right\} \qquad (11)$$

仿照〔6〕，可以证明

$$\int_\Omega\left|\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\right|^2 d\Omega\,\Big|^t+\int_0^t\int_\Omega\left|\nabla\left(\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\right)\right|^2 dQ$$

$$+\int_0^t\int_\Omega\sum_{ij}\left|\partial_i\partial_j\frac{\tilde{P}-P}{\lambda}\right|^2 dQ\le c, \qquad (12)$$

其中 常数 c 与入无关。

因此当 $\lambda\to+0$ 时，可选出弱收敛子序列 $\dfrac{\tilde{P}-P}{\lambda}$ 在 $L^2(0,T,H^2(\Omega))$ 中弱收敛于 $\dot{P}$。仿照〔6〕，可以证明 $\dot{P}$ 满足（22）。

再依定理1，$\dot{P}\in c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$ 且 $\dot{P}$ 还是 h 的线性函数 $\dot{P}=P'(a)h$。

仿照[6]，可以证明$\dot{P}$是a的连续函数．因而$P(a)$是a的连续Frèchet可微函数．

定理 3 设定理 2 的条件满足．且设a^0是使(9)式取极小值的最佳参数，则有

$$\sum_i \int_Q (a_i - a_i^0)\partial_i \dot{P} \partial_i y dQ - \sum_i \int_{\Sigma_1} (a_i - a_i^0) y \partial_i \dot{P} \cos(n, x_i) d\Sigma_1 \geq 0,$$

$$\forall a \in U_{ad}, \tag{13}$$

其中 y由(10)的共轭方程组(14)确定：

$$\left.\begin{aligned}
&\wedge^*(a^0)y \triangleq -\partial_t y - \sum_i \partial_i(a_i^0 \ \partial_i y) = 0, \qquad (x,t) \in Q \\
&y\Big|_{t=T} = 0, \qquad x \in \Omega \\
&y\Big|_{\Sigma_1} = \frac{\partial P(a^0)}{\partial v_{a^0}}\Big|_{\Sigma_1} - q, \\
&\frac{\partial y}{\partial v_{a^0}}\Big|_{\Sigma_2} = 0, \qquad y\Big|_{\Sigma_3} = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

证 利用定理 1，不难断定(14)存在唯一解$y \in \widetilde{V}$．显然有

$$\sum_{i=1}^m \int_Q y \partial_i (h_i \partial_i P) dQ = \int_Q [y \wedge (a^0)\dot{P} - \dot{P} \wedge^* (a^0) y] dQ = \int_Q \partial_t (\dot{P} y) dQ$$

$$- \sum_i \int_\Sigma y a_i^0 \ \partial_i \dot{P} \cos(n, x_i) d\Sigma - \sum_i \int_Q a_i^0 \ \partial_i y \partial_i \dot{P} \ dQ$$

$$+ \sum_i \int_Q a_i^0 \ \partial_i \dot{P} \partial_i y dQ + \sum_i \int_\Sigma \dot{P} \ a_i^0 \ \partial_i y \cos(n, x_i) d\Sigma$$

$$= - \int_{\Sigma_1} \left(\frac{\partial P(a)^0}{\partial v_{a^0}} - q \right) \frac{\partial \dot{P}}{\partial v_{a^0}} \ d\Sigma_1$$

$$+ \sum_i \int_{\Sigma_2} y h_i \partial_i P \cos(n, x_i) d\Sigma_2, \tag{15}$$

另一方面，

$$\sum_i \int_Q y \partial_i (h_i \partial_i P) dQ = \sum_i \int_\Sigma y h_i \partial_i P \cos(n, x_i) d\Sigma - \sum_i \int_Q h_i \partial_i P \partial_i y dQ$$

$$= \sum_i \left\{ \int_{\Sigma_1} y h_i \partial_i P \cos(n, x_i) d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} y h_i \partial_i P \cos(n, x_i) d\Sigma_2 \right\}$$

$$-\sum_i \int_Q h_i \partial_i P \partial_i y dQ, \tag{16}$$

比较(15)与(16)，立即可得到

$$\int_{\Sigma_1}\left(\frac{\partial P(a^0)}{\partial v_{a^0}}-q\right)\frac{\partial \dot{P}}{\partial v_{a^0}}d\Sigma_1=\sum_i \int_Q h_i\partial_i y\partial_i PdQ$$

$$-\sum_i \int_{\Sigma_1} yh_i\partial_i P\cos(n,x_i)d\Sigma_1. \tag{17}$$

根据[7]，使(9)式取极值的 a^0 应满足

$$0\le J'(a^0)(a-a^0)=\int_{\Sigma_1}\left[\frac{\partial P(a^0)}{\partial v_{a^0}}-q\right]\frac{\partial[P'(a^0)(a-a^0)]}{\partial v_{a^0}}d\Sigma_1,$$

$$\forall a\in U_{ad}. \tag{18}$$

若考虑到 $\dot{P}=P'(a^0)h$，当取 $h=a-a^0$ 时，比较(17)与(18)式，便可得到(13)式。

至此，我们已得到使(9)式取极值的最佳参数 a^0 应当满足的必要条件，即是优化方程组，它由(1)～(5)、(13)及(14)组成。借助于这个优化组，运用梯度法等便可求出最佳参数 a^0。

Ⅳ. 最佳参数的唯一性

本段对(1)～(5)作进一步的限制：

$$\left.\begin{array}{l}\Omega\triangleq\Omega^1\times\Omega^2,\ \Omega^i(i=1,2)\text{是一维欧氏空间}\\ R^1\text{中的有界区域},\quad \partial\Omega_1\triangleq\overline{\Omega^1}.\end{array}\right\} \tag{19}$$

相应地，容许参数集为

$$a\triangleq a(x_1)=\{a_1(x_1),a_1(x_1)\},$$

$$\widetilde{U}_{ad}\triangleq\{a\in[c^{1+\alpha}(\overline{\Omega^1})]^2;\quad 0<v\le a_1(x_1)\le\mu,\ \forall x_1\in\overline{\Omega^1}\}. \tag{20}$$

并且假定真参数 $a^0\in\widetilde{U}_{ad}$。于是有

$$\left.\frac{\partial P(a^0)}{\partial v_{a^0}}\right|_{\Sigma_1}=q. \tag{21}$$

因此，对于由(9)式定义的 $J(a)$ 有：$J(a^0)=0$。

定理4　假定由(19)定义的 Ω 满足定理1的条件，$\widetilde{U}_{ad}$ 由(20)定义．还有假设(H)为真，$q\in c^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Sigma_1})$且

$$q(s,t)\neq 0,\qquad \forall(s,t)\in\overline{\Sigma}_1. \tag{22}$$

则有下列估计式

$$\left|\tilde{a}-a\right|_{\overline{\Omega}^1}^{(1+\alpha)}+\left|\tilde{P}-P\right|_{\overline{Q}}^{(2+\alpha)}\le c\left|\tilde{q}-q\right|_{\overline{\Sigma}_1}^{(1+\alpha)},\tag{23}$$

其中 c 只与 ν、μ、α、P_0 及 e 等有关，而且

$$\tilde{P}=P(\tilde{a})、P=P(a)、\tilde{q}=\left.\frac{\partial\tilde{P}}{\partial v_{\tilde{a}}}\right|_{\Sigma_1}、q=\left.\frac{\partial P}{\partial v_a}\right|_{\Sigma_1},$$

$$|\phi|_{\overline{\Omega}}^{(k+\alpha)}\triangleq\|\phi\|_{c^k(\overline{\Omega})}+\max_{|\beta|=k}\sup_{\xi,\eta\in\overline{\Omega}}\frac{|D^\beta\phi(\xi)-D^\beta\phi(\eta)|}{|\xi-\eta|^\alpha},$$

$$|\phi|_{\overline{Q}}^{(k+\alpha)}\triangleq\sum_{2r+s=h}\|D_x^sD_t^r\phi\|_{c(\overline{Q})}+\max_{2r+s=k}\sup_{(\xi,t),(\eta,t)\in\overline{Q}}\frac{\left|D_t^rD_x^s\phi(\xi,t)-D_t^rD_x^s\phi(\eta,\tau)\right|}{|\xi-\eta|^\alpha+|t-\tau|^{\alpha/2}}.$$

证　令　　$\partial_nP\triangleq\{\partial_1P\cos(n,x_1),\ \partial_2P\cos(n,x_2)\}$，　则

$$\frac{\partial P}{\partial v_a}=a\cdot\partial_nP\qquad(a\cdot b\text{ 表示向量 }a、b\text{ 的内积}).$$

显然　$\left.\dfrac{\partial P}{\partial v_a}\right|_{\Sigma_1}=a_1(x_1)\partial_2P|_{\Sigma_1}$。

再由条件（22）、$a_1(x_1)\ge\nu>0$ 及 $\dfrac{\partial P}{\partial v_a}\in c^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Sigma}_1)$，就有

$$\min_{(x,t)\in\overline{\Sigma}_1}|\partial_2P(x,t)|=\min_{(x,t)\in\overline{\Sigma}_1}|\partial_nP(x,t)|>0.\tag{24}$$

再由　$\tilde{q}-q=\tilde{a}\cdot\partial_n\tilde{P}-a\cdot\partial_nP=\tilde{a}\cdot\partial_n(\tilde{P}-P)+(\tilde{a}-a)\cdot\partial_nP$

可以得到

$$(\tilde{a}-a)\cdot\partial_nP=(\tilde{q}-q)-\tilde{a}\cdot\partial_n(\tilde{P}-P).\tag{25}$$

又因 $\tilde{P}-P$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&\Lambda(\tilde{a})(\tilde{P}-P)=\sum_{i=1}^2\partial_i[(\tilde{a}_1-a_1)\partial_1P],\quad(x,t)\in Q\\&\tilde{P}-P|_{t=0}=0,\quad\tilde{P}-P|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=0,\\&\left.\frac{\partial(\tilde{P}-P)}{\partial v_{\tilde{a}}}\right|_{\Sigma_2}=-\sum_{i=1}^2(\tilde{a}_1-a_1)\partial_iP\cos(n,x_i)\Big|_{\Sigma_2}.\end{aligned}\right\}\tag{26}$$

仿效〔4〕，(26)的解可以表示成

$$\widetilde{P}-P=\int_0^t d\tau\int_\Omega \Gamma_1(x,\xi,t,\tau)\sum_i\partial_i[(\widetilde{a_i}-a_i)\partial_i P]d\xi$$

$$+\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega_2}\Gamma_3(x,\xi,t,\tau)\phi_2(\xi,\tau)d\xi, \tag{27}$$

其中 Γ_1、Γ_3 是 Green 函数，Γ_1 由下式确定

$$\left.\begin{aligned}&\wedge(\widetilde{a})\Gamma_1(x,\xi,t,\tau)=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau),\quad (x,t)\in Q\\&\Gamma_1(x,\xi,\tau,\tau)=0,\quad x\in\Omega\\&\Gamma_1(x,\xi,t,\tau)|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=0,\ \frac{\partial\Gamma_1}{\partial\nu_{\widetilde{a}}}(x,\xi,t,\tau)|_{\Sigma_2}=0,\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

其中 $\delta(x)$是 Dirac 的 δ 函数，而且

$$\Gamma_3(x,\xi,t,\tau)=Z(x,\xi,t,\tau)-g_3(x,\xi,t,\tau), \tag{29}$$

$$\left.\begin{aligned}&\wedge(\widetilde{a})g_3(x,\xi,t,\tau)=0,\quad (x,t)\in Q\\&g_3(x,\xi,\tau,\tau)=0,\quad x\in\Omega\\&g_3(x,\xi,t,\tau)|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3}=Z(x,\xi,t,\tau)|_{\Sigma_1\cup\Sigma_3},\ \frac{\partial g_3}{\partial\nu_{\widetilde{a},x}}(x,\xi,t,\tau)|_{\Sigma_2}=0.\end{aligned}\right\} \tag{30}$$

而 $Z(x,\xi,t,\tau)$是〔5〕中定义的基本解，而 ϕ_2 是下述问题的解：

$$\phi_2(\xi,\tau)=-2\int_0^\tau ds\int_{\partial\Omega_2}\frac{\partial\Gamma_3}{\partial\nu_{\widetilde{a},x}}(\xi,\eta,\tau,s)\phi_2(\eta,s)d\eta$$

$$-2\sum_{i=1}^2(\widetilde{a_1}-a_1)\partial_i P\cos(n,x_i)|_{\Sigma_2}. \tag{31}$$

由积分方程论，可以断定

$$\phi_2\sim 0(\|\widetilde{a}-a\|). \tag{32}$$

将(27)式代入(25)式，经过显然计算，有

$$(\widetilde{a}-a)\cdot\partial_n P=(\widetilde{q}-q)-\sum_{i,j=1}^2\widetilde{a}_1(x_1)\cos(n,x_j)\int_0^t d\tau\int_{\partial\Omega_2}\frac{\partial\Gamma_1}{\partial x_j}(x,\xi,t,\tau)$$

$$\cdot[\widetilde{a_1}-a_1]\partial_i P\cos(n,\xi_i)d\xi+\sum_{i,j=1}^2\widetilde{a}_1(x_1)\cos(n,x_j)\int_0^t d\tau\int_\Omega$$

$$\cdot(\widetilde{a_1}-a_1)\partial_i P\frac{\partial^2\Gamma_1}{\partial x_j\partial\xi_i}(x,\xi,t,\tau)d\xi-\sum_{j=1}^2\widetilde{a}_1(x_1)\cos(n,x_j)$$

$$\cdot \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega_2} \frac{\partial \Gamma_3}{\partial x_j}(x,\xi,t,\tau)\phi_2(\xi,\tau)d\xi. \tag{33}$$

仿照[5]，对于Green函数Γ_1、Γ_3可作下列估计：

$$\begin{cases} \left| D_t^r D_x^s \Gamma_i(x,\xi,t,\tau) \right| \le c_1 (t-\tau)^{-\frac{m+2r+s}{2}} \exp\left\{ -c_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \\ \left| D_t^r D_x^s \frac{\partial \Gamma_i}{\partial x_j}(x,\xi,t,\tau) \right| \le c_1 (t-\tau)^{-\frac{m+2r+s+1}{2}} \exp\left\{ -c_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\}, \\ (i=1,3\ ;\ j=1,2). \end{cases} \tag{34}$$

c_1、c_2只与ν、μ、α、Ω等有关而与$\tilde{a}$、a无关．结合(32)～(34)，$\forall (x_1,t) \in \tilde{\Omega}^1 \times (0,T)$，就有

$$\left| (\tilde{a}-a)\cdot \partial_n P(x,t) \right| \le \max_{(x_1,t)\in \bar{\Sigma}_1} \left| \tilde{q}-q \right|$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_\Omega |(\tilde{a}-a)\cdot \partial_n P| c_3 |t-\tau|^{-\frac{m+2}{2}} \exp\left\{ -c_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\} d\xi$$

$$+ \int_0^t d\tau \int_{\partial\Omega_2} |(\tilde{a}-a)\cdot \partial_n P| c_3 |t-\tau|^{-\frac{m+1}{2}} \exp$$

$$\cdot \left\{ -c_2 \frac{|x-\xi|^2}{t-\tau} \right\} d\xi,\quad \forall (x,t)\in \bar{\Sigma}_1.$$

然后利用Gronwall不等式，就有

$$|\tilde{a}-a|\,|\partial_n P| \le c_4 \|\tilde{q}-q\|_{c(\bar{\Sigma}_1)}. \tag{35}$$

再考虑(24)式，立即可得到

$$\|\tilde{a}-a\|_{[c(\bar{\Omega}^1)]^2} \le c_5 \|\tilde{q}-q\|_{c(\bar{\Sigma}_1)}. \tag{36}$$

类似地，微分(25)两端可以得到

$$\partial_i(\tilde{a}-a)\cdot \partial_n P = \partial_i(\tilde{q}-q) - (\tilde{a}-a)\cdot \partial_i \partial_n P - \partial_i a \cdot \partial_n(\tilde{P}-P) - a\cdot \partial_i \partial_n(\tilde{P}-P). \tag{37}$$

仿照(36)的推导，并将$\tilde{P}-P$的表达式(27)代入(37)中，并考虑估计(36)，就可得到

$$\|\tilde{a}-a\|_{[c^1(\bar{\Omega}^1)]^2} \le c_6 \|\tilde{q}-q\|_{c^1(\bar{\Sigma}_1)}. \tag{38}$$

再利用(37)式计算$\partial_i(\tilde{a}-a)$的Hölder模．为此在(37)中，分别取自变量为

(x_1^1,t)、$(x_1^2,t)\in\overline{\Sigma}_1$，并将所得二式相减，便有

$$\partial_i(\tilde{a}-a)\cdot\partial_n P\Big|_{(x^1,t)}-\partial_i(\tilde{a}-a)\cdot\partial_n P\Big|_{(x^2,t)}$$

$$=\left\{\partial_i(\tilde{q}-q)\Big|_{(x^1,t)}-\partial_i(\tilde{q}-q)\Big|_{(x^2,t)}\right\}$$

$$-\left\{(\tilde{a}-a)\cdot\partial_i\partial_n P\Big|_{(x^1,t)}-(\tilde{a}-a)\cdot\partial_i\partial_n P\Big|_{(x^2,t)}\right\}$$

$$-\left\{\partial_i a\cdot\partial_n(\tilde{P}-P)\Big|_{(x^1,t)}-\partial_i a\cdot\partial_n(\tilde{P}-P)\Big|_{(x^2,t)}\right\}$$

$$-\left\{a\cdot\partial_i\partial_n(\tilde{P}-P)\Big|_{(x^1,t)}-a\cdot\partial_i\partial_n(\tilde{P}-P)\Big|_{(x^2,t)}\right\},\quad(39)$$

在上式两端除以$|x^1-x^2|^\alpha$，让x^1、x^2 在$\overline{\Omega}_1$上变化，取其模的上确界就可得到

$$\sup_{x^1,x^2\in\overline{\Omega}_1}\frac{|\partial_i a(x^1)-\partial_i a(x^2)|}{|x^1-x^2|^\alpha}.$$

而(39)式右端第一项 q、$\tilde{q}\in c^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(\overline{\Sigma}_1)$，因此$\partial_i(\tilde{q}-q)$的Hölder 模存在．而第二项已有估计式(38)控制住$\tilde{a}-a$的Hölder 模，又因$\partial\Omega\in c^{2+\alpha}$，及$P\in c^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q})$，可知$\partial_i\partial_n P$及$\partial_n P$的Hölder 模存在，故(39)式右端第二项及左端$\partial_n P$的Hölder模存在．至于右端第三、四两项，可将$\tilde{P}-P$的表达式(27)代入，再考虑(32)式；此外，仿照[5]，可以对 Green 函数Γ_1、Γ_3建立下列先验估计：

$$\left|D_t^r D_x^s\Gamma_i(x,\xi,t,\tau)-D_t^r D_x^s\Gamma_i(\tilde{x},\xi,t,\tau)\right|$$

$$\le c_1|x-\tilde{x}|^2(t-\tau)^{-(m+\alpha+2)/2}\exp\left\{-c_2\frac{|x-\tilde{x}|^2}{t-\tau}\right\},$$

$$(2r+s=1,2;\qquad i=1,3).\quad(40)$$

作出显然的推导，使用 Gronwall 不等式及带ε的 Cauchy 不等式，由(39)可以得到

$$|\tilde{a}-a|_{\Omega^1}^{(1+\alpha)}\le c_7|\tilde{q}-q|_{\Sigma_1}^{(1+\alpha)}.\quad(41)$$

再根据(27)、(32)，便有

$$|\tilde{P}-P|_{Q}^{(2+\alpha)}\le c_8|\tilde{a}-a|_{\Omega^1}^{(1+\alpha)}.\quad(42)$$

上述常数 $c_1\sim c_8$ 都只与 v、μ、α、Ω、P_0 及 e 等有关，而与 $\tilde{a}$、a、$\tilde{q}$ 及 q 等无关。结合(41)与(42)便可得到(23)式.

定理 5　假设定理 4 的条件满足，则使得关系式(1)～(6)恒成立的$\{a^0,P\}$是唯一的。即在定理 4 的条件下，动态系数 $a(x)$是能辨识的.

证　假设对应于输入—输出关系(1)～(5)及输出（量测）数据 q，存在两对$\{a^0,P\}$及$\{\tilde{a}^0$、$\tilde{P}\}$满足关系式(1)～(6)，我们不妨认为与$\{a^0, P\}$对应的输出数据为 q，与$\{\tilde{a}^0,\tilde{P}\}$对应的输出数据为$\tilde{q}$.根据假定，$\tilde{q}=q$. 然后利用定理 4 的不等式(23)，立即可以得到$a^0=\tilde{a}^0$、$P=\tilde{P}$.

注　实际上，由(23)可以得到比定理 4 的结论更多的东西，即被辨识出的参数 $a(x)$不仅是唯一的，而且按照各自所在空间的范数，$a(x)$还连续地依赖于量测数据 $q(x)$.

参 考 文 献

〔1〕Seinfeld, J. H. and Chen, W. H., Identification of Petroleum Reservoir Properties, Distributed Parameter Systems: Identification, Estimation and Control ed. by Ray W. H. et al., Marcel Dekker Inc., N. Y. and Besel (1978), 497—554.

〔2〕Chavent, G. et al., History Matching by Use of Optimal Theory, SPE J., **15**, 1 (1975), 74—86.

〔3〕Kitamura, S. and Nakagiri, S., Identifiability of Spatially Varying and Constant Parameter in Distributed Systems of Parabolic Type, SIAM J. Control and Optim., **15** (1977), 785—802.

〔4〕Ladyzenskaja, O. A. et al., Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type, Transactions of Mathematical Monograph, AMS, Providence, Rhode Island, 1968 (Chap. 3 and 4).

〔5〕Showatter, R. E., Hilbert Space Methods for Partial Differential Equations, Pitman, London, 1977 (chap. 4).

〔6〕喻文焕，一类最佳控制的存在——系数控制问题之一，数学物理学报，**1**，4 (1981)，335—348.

〔7〕Lions, J. L., Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernès par des Equations aux Derivèes Partielles, Dunod-Gautier, Villars, Paris, 1968 (chap. 1)

ON THE IDENTIFICATION OF PARAMETERS OF A CLASS OF SINGLE-PHASE PETROLEUM RESERVOIR

Yu Wenhuan

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

In this paper the pressure of a single-phase petroleum reservoir is treated as the solution of the Dirichlet-Neumann mixed initial boundary value problem for a permeation equation of parabolic type. By making use of the optimization methods in functional spaces, we give the formulas for identifying the transmissibility appeared in the permeation equation. We also give the uniqueness conditions under which the parameters identified by means of the input data are unique.

··