第2卷 第1期 控制理论与应用 Vol.2, No.1
1985年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS January, 1985

一类有静差系统的结构特征

王恩平　　王朝珠

（中国科学院系统科学研究所）

摘　要

通过分析惯性导航系统初始对准方案的静差特性发现，实际工程中存在着这样一类系统，无论为它设计什么样的动态补偿器，其被调节量总是有静差的．且其静差只依赖开环系统的结构参数，而与动态补偿器的结构及其参数的选择无关．我们称这类系统为有差系统．本文分析了有差系统的结构特征，并且给出了通过开环结构参数计算静差的公式．

一、引　言

在惯性导航系统初始对准方案的设计过程中，人们发现，无论为它设计什么样的动态补偿器，只要保证闭环系统是内部稳定的，则平台的水平姿态误差角对加速度的零位误差，方位误差角对东向陀螺漂移率总存在静差．其静差只依赖于误差源和开环结构参数，而与动态补偿器的结构及其参数的选择无关．我们称工程中存在的这样一类系统为有差系统．本文首先分析了有差系统的结构特征，其次给出了计算闭环系统静差的公式，最后用惯性导航的实例说明本文理论的具体应用．

二、有差系统的结构特征

已知线性定常系统

$$\Sigma:\quad \begin{aligned} &P_0(D)\,\xi(t)=R_0(D)\,u(t)+M(D)\,f(t),\\ &y(t)=Q_0(D)\,\xi(t), \end{aligned} \tag{2.1}$$

$$\begin{aligned} &z(t)=E(D)\,\xi(t),\\ &N(D)\,f(t)=0, \end{aligned} \tag{2.2}$$

其中 $\xi(t)\in R^l$，是分状态，$u(t)\in R^r$ 是控制，$y(t)\in R^m$ 是量测输出，$z(t)\in R^q$ 是被调节量，$f(t)\in R^p$ 是外干扰．$P_0(D)$，$R_0(D)$，$Q_0(D)$，$M(D)$，$E(D)$，$N(D)$ 分别是 $l\times l$，$l\times r$，$m\times l$，$l\times p$，$q\times l$，$p\times p$ 阶多项式阵．D 是微分算子．

对系统 Σ 作如下假设：

1．$P_0(D)$ 是行正则的，$N(D)$ 是列正则的，

本文于1983年7月6日收到，1984年2月收到修改稿．

2. $P_0(D)$, $R_0(D)$ 左互质，$P_0(D)$, $Q_0(D)$右互质，

3. $Q_0(D)P_0^{-1}(D)R_0(D)$ 和 $Q_0(D)P_0^{-1}(D)M(D)$ 都是真有理分式阵，

4. $\operatorname{rank} Q_0(D)=m$, $\operatorname{rank} M(D)=p<l$, $\operatorname{rank} E(D)=q$.

为了讨论系统 Σ 的有差性质，不失一般性设 $\mathbf{N}(N(D))\subset\overline{\mathbf{C}^+}$. 这里 $\mathbf{N}(\cdot)$ 表示det $N(D)$ 的零点集合，$\overline{\mathbf{C}^+}$ 表右半闭复平面.

关于系统 Σ 的动态补偿器一般取为

$$\Sigma_p:\quad \begin{aligned} &P_1(D)\xi_c(t)=R_1(D)\mathbf{y}(t),\\ &\mathbf{u}(t)=Q_1(D)\xi_c(t)+F_1\mathbf{y}(t), \end{aligned} \tag{2.3}$$

其中 $\xi_c(t)\in\mathbf{R}^{l_c}$ 是分状态，$P_1(D)$, $R_1(D)$, $Q_1(D)$ 分别是 $l_c\times l_c$, $l_c\times m$, $r\times l_c$ 阶多项式阵，F_1 是 $r\times m$ 阶常阵. 对动态补偿器作如下假设：

1. $Q_1(D)P_1^{-1}(D)R_1(D)+F_1$ 是真有理分式阵，

2. $\operatorname{rank} R_1(D)=m$, $\operatorname{rank} Q_1(D)=r$,

3. 闭环系统是非退化的.

将(2.3)代入(2.1)中得闭环系统 Σ_c

$$\Sigma_c:\ \begin{pmatrix} P_0(D)-R_0(D)F_1Q_0(D) & -R_0(D)Q_1(D) & -M(D)\\ -R_1(D)Q_0(D) & P_1(D) & 0\\ E(D) & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi(t)\\ \xi_c(t)\\ \mathbf{f}(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\ \mathbf{Z}(t)\end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

定义1 已知系统 Σ 和给定动态补偿器 Σ_p. 如果

$$\mathbf{N}\left(\begin{bmatrix} P_0(D)-R_0(D)F_1Q_0(D) & -R_0(D)Q_1(D)\\ -R_1(D)Q_0(D) & P_1(D) \end{bmatrix}\right)\subset\mathbf{C}^-,$$

则称闭环系统 Σ_c是内部稳定的. $\mathbf{C}^-$ 表左半开复平面.

定义2 已知系统 Σ 和动态补偿器 Σ_p, 如果对满足(2.2)的任意 $\mathbf{f}(t)$ 和对(2.1)的任意初始条件都有

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{z}(t)=0,$$

则称闭环系统 Σ_c是输出调节的或无静差的。

基本引理 已知系统 Σ 和动态补偿器，如果闭环系统 Σ_c是内部稳定的，则闭环系统是无静差的充要条件为如下多项式矩阵方程

$$\begin{bmatrix} P_0(D)-R_0(D)F_1Q_0(D) & -R_0(D)Q_1(D)\\ -R_1(D)Q_0(D) & P_1(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_1(D)\\ V_2(D)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}L_1(D)\\ L_2(D)\end{bmatrix}N(D)$$

$$= \begin{bmatrix} -M(D) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E(D)V_1(D) + H(D)N(D) = 0 \tag{2.5}$$

有解。$\begin{pmatrix} V_1(D) \\ V_2(D) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_1(D) \\ L_2(D) \end{pmatrix} H(D)$。该引理证明可见[1]。

从(2.5)易知，为保证闭环系统的稳定性，如果$N(D)$和$M(D)$有右公因时，它必是$V_1(D)$，$V_2(D)$的右因子。从(2.5)消去这个公因式得一个和(2.5)完全相同的等价方程。在这个等价方程中，新的$N(D)$和$M(D)$是右互质的。因此，不失一般性，在今后总设$N(D)$和$M(D)$是右互质的。

定义 3. 已知系统Σ，如果存在$q\times m$阶常阵K且$\operatorname{rank} K = q$使得

$$E(D) = KQ_0(D),$$

则称$\mathbf{z}(t)$能从$\mathbf{y}(t)$中读出。

定义 4 已知系统Σ，如果对任意选择的使闭环系统内部稳定的动态补偿器，总存在满足(2.2)的$\mathbf{f}(t)$使得

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) \neq 0,$$

或$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{z}(t)$不存在，则称闭环系统为有差系统。如果$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{z}(t)$存在且不为零，则称$\lim\limits_{t\to\infty} \mathbf{z}(t)$为$\Sigma_c$的静差。

从基本引理得知，对使闭环系统内部稳定的动态补偿器，闭环系统有静差的充要条件是(2.5)第一方程的解$\begin{bmatrix} V_1(D) \\ V_2(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} L_1(D) \\ L_2(D) \end{bmatrix}$(注：只要$\Sigma_c$内部稳定，第一个方程总存在解)，对任意的$H(D)$都有

$$E(D)V_1(D) + H(D)N(D) \neq 0.$$

这是一个加在闭环系统上的不易验证的条件。将它转化成对系统Σ的条件是不可能的。因此，我们只能退一步分别找一些使Σ_c成为有差系统的充分条件或必要条件，而这些条件应是加在Σ上的。考查(2.5)可知，为了消除Σ_p在判别Σ_c是否为有差系统的作用，只能考虑方程(2.5)的如下形式的特解。

$$V_2(D) = 0, \qquad L_2(D) = 0. \tag{2.7}$$

此时(2.5)的第一式变为

$$\begin{bmatrix} P_0(D) - R_0(D)F_1Q_0(D) & -R_0(D)Q_1(D) \\ -R_1(D)Q_0(D) & P_1(D) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1(D) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1(D) \\ 0 \end{bmatrix} N(D) = \begin{bmatrix} -M(D) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

只要注意到$\operatorname{rank} R_1(D) = m$，则有

$$P_0(D)V_1(D) + L_1(D)N(D) = -M(D), \tag{2.8}$$

$$Q_0(D)V_1(D) = 0. \tag{2.9}$$

方程(2.8)是一个双边多项式矩阵方程($V_1(D)$和$L_1(D)$是待求的)。它有解的充要条件是

$$\begin{bmatrix} P_0(D) & -M(D) \\ 0 & N(D) \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} P_0(D) & 0 \\ 0 & N(D) \end{bmatrix} \text{单位模等价.}$$

今后凡谈到方程(2.8)时，总设上述条件成立.

引理1　如果(2.8)有解，必有满足如下条件的解.

$$\partial_{hi}(L_1(D)) < \partial_{hi}(P_0(D)), \quad i=1,2,\cdots,l,$$
$$\partial_{lj}(V_1(D)) < \partial_{lj}(N(D)), \quad j=1,2,\cdots,p.$$

$\partial_{hi}(\cdot)$是多项矩阵的第i行次，$\partial_{lj}(\cdot)$表第j列次.

证　设$\widetilde{V}_1(D)$和$\widetilde{L}_1(D)$是(2.8)的解. 由于$N(D)$列正则，依多项式矩阵的除法定理知必存在唯一的多项式阵，$V_1(D)$，$A(D)$，使

$$\widetilde{V}_1(D)=V_1(D)+A(D)N(D). \tag{2.10}$$

且$V_1(D)N^{-1}(D)$是严格真有理分式阵. 因此有

$$\partial_{lj}(V_1(D))<\partial_{lj}(N(D)).$$

此时取

$$L_1(D)=\widetilde{L}_1(D)+P_0(D)A(D).$$

易知$L_1(D)$，$V_1(D)$是(2.8)的解，即

$$P_0(D)V_1(D)+L_1(D)N(D)=-M(D).$$

用$P_0^{-1}(D)$，$N^{-1}(D)$分别左、右乘上式得

$$V_1(D)N^{-1}(D)+P_0^{-1}(D)L_1(D)=-P_0^{-1}(D)M(D)N^{-1}(D). \tag{2.11}$$

依假设$Q_0(D)P_0^{-1}(D)M(D)$是真有理分式阵，因而$P_0^{-1}(D)M(D)$亦如此. 又因$N(D)$列正则，则$N^{-1}(D)$是严格真有理分式阵. 从而知$P_0^{-1}(D)M(D)N^{-1}(D)$是严格真有理分式阵. 又因$V_1(D)N^{-1}(D)$亦是严格真有理分式阵，从(2.11)知$P_0^{-1}(D)L_1(D)$必是严格真有理分式阵. 因此有

$$\partial_{hi}(L_1(D))<\partial_{hi}(P_0(D)), \quad i=1,2,\cdots,l.$$

引理得证.

推论1　当$P_0(D)=DI_l-A_1$，$N(D)=DI_p-A_2$，$M(D)=A_3$时，如果(2.8)有解，一定存在$l\times p$阶常阵V，使得

$$A_1V-VA_2=A_3.$$

证　只要注意到$\partial_{hi}(P_0(D))=\partial_{hi}(DI_l-A_1)=1$，$i=1,2,\cdots,l$，$\partial_{lj}(N(D))=\partial_{lj}(DI_p-A_2)=1$，$j=1,2,\cdots,p$，由引理1知必存常阵$V_1$和$L_1$，使

$$(DI_l-A_1)V_1+L_1(DI_p-A_2)=-A_3.$$

利用上式两边 D 的同次幂系数相等得

$$V_1 + L_1 = 0,$$
$$A_1 V_1 + L_1 A_2 = A_3.$$

记 $V_1 = -L_1 = V$，直接得

$$A_1 V - V A_2 = A_3.$$

今后除特别说明外，凡涉及到（2.8）的解，总是指满足如下条件的解

$$\partial_{hi}(L_1(D)) < \partial_{hi}(P_0(D)), \quad i = 1,2,\cdots,l,$$
$$\partial_{lj}(V_1(D)) < \partial_{lj}(N(D)), \quad j = 1,2,\cdots,p.$$

定理 1 给定系统 Σ，设如下多项式阵方程

$$P_0(D)X(D) + Y(D)N(D) = -M(D) \tag{2.12}$$

的解 $(V_1(D), L_1(D))$ 满足

$$(Q_0(D),\ 0)\begin{pmatrix} V_1(D) \\ L_1(D) \end{pmatrix} = Q_0(D)V_1(D) = 0. \tag{2.13}$$

如果 Σ_c 是有差系统，则 $z(t)$ 一定不能从 $y(t)$ 中读出。

证 从（2.12）和（2.13）易知，对任选的使 Σ_c 是内部稳定的动态补偿器 Σ_b，$\begin{pmatrix} V_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} L_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}$ 总是如下多项式矩阵方程

$$\begin{bmatrix} P_0(D) - R_0(D)F_1Q_0(D) & -R_0(D)Q_1(D) \\ -R_1(D)Q_0(D) & P_1(D) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_1(D) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} L_1(D) \\ 0 \end{bmatrix}N(D)$$
$$= \begin{bmatrix} -M(D) \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.14}$$

的解. 只要注意到 Σ_c 内部稳定和 $\mathbf{N}(N(D)) \subset \overline{\mathbf{C}^+}$，易知 $\begin{pmatrix} V_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}$ 还是方程（2.14）的唯一解. 由于 Σ_c 是有静差的，依基本引理知道关于（2.14）的这对解 $\begin{pmatrix} V_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} L_1(D) \\ 0 \end{pmatrix}$，对任选的 $H(D)$ 都有

$$E(D)V_1(D) + H(D)N(D) \neq 0.$$

显然当 $H(D) = 0$ 时亦有

$$E(D)V_1(D) \neq 0.$$

从上式和（2.13）易知一定不存在满秩阵 K 使得

$$E(D) = KQ_0(D).$$

即 $z(t)$ 不能从 $y(t)$ 中读出.

定理 2 给定系统 Σ. 设

1. 多项式矩阵方程

$$P_0(D)X(D) + Y(D)N(D) = -M(D) \tag{2.15}$$

存在解 $X(D) = V_1(D)$，$Y(D) = L_1(D)$，使

$$[Q_0(D)\quad 0]\begin{bmatrix}V_1(D)\\L_1(D)\end{bmatrix}=Q_0(D)V_1(D)=0\,, \tag{2.16}$$

且 $\partial_{lj}(E(D)V_1(D))<\partial_{lj}(N(D))$，$j=1,2,\cdots,p$.

2. $z(t)$ 不能从 $y(t)$ 中读出，且有

$$k=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}Q_0(D)\\E(D)\end{bmatrix}>\operatorname{rank}Q_0(D)=m\,.$$

3. $\operatorname{rank}V_1(D)>l-k$

成立，则 Σ_c 一定是有静差的。

证　从（2.15）和（2.16）易知 $\begin{pmatrix}V_1(D)\\0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}L_1(D)\\0\end{pmatrix}$ 满足（2.14），且是其唯一解。反设 Σ_c 是无静差的。依基本引理知道，必存在 $q\times p$ 阶多项式阵 $H(D)$，使

$$E(D)V_1(D)+H(D)N(D)=0\,,$$

即

$$H(D)=-E(D)V_1(D)N^{-1}(D).$$

由于 $\partial_{lj}(E(D)V_1(D))<\partial_{lj}(N(D))$，且 $N(D)$ 列正则，则有 $H(D)=0$。从而有

$$E(D)V_1(D)=0.$$

将上式联合（2.16）得

$$\begin{bmatrix}Q_0(D)\\E(D)\end{bmatrix}V_1(D)=0.$$

再注意 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}Q_0(D)\\E(D)\end{bmatrix}=k$，则有

$$\operatorname{rank}V_1(D)\le l-k\,.$$

它与条件3矛盾。因此，Σ_c 必是有差的。

从引理1和定理2直接得

推论 2　当 $P_0(D)=DI_l-A_1$，$N(D)=DI_p-A_2$，$M(D)=A_3$，$Q_0(D)=C$，$E(D)=E$ 时，如果

1. 存在 $l\times p$ 阶常阵 V，使

$$A_1V-VA_2=A_3\,,$$
$$CV=0\,,$$

2. $z(t)$ 不能从 $y(t)$ 中读出，且

$$k=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\E\end{bmatrix}>\operatorname{rank}C=m\,,$$

3. $\operatorname{rank}V>l-k$

成立，则 Σ_c 必是有差系统。

推论 3　若 $P_0(D)=DI_l-A_1$，$N(D)=DI_t$，$R_0(D)=B$，$M(D)=A_3$，$Q_0(D)=C$，$E(D)=E$.（注：此时动态补偿器应取为 $P_1(D)=DI_{l_c}-A_c$，$R_1(D)=B_c$　$Q_1(D)=F_c$　$F_1=F_1$）。如果

1. $\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ C & 0 \end{bmatrix} = l$,

2. $\mathbf{z}(t)$ 不能从 $\mathbf{y}(t)$ 中读出，且

$$k = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} C \\ E \end{bmatrix} > \operatorname{rank} C = m,$$

3. $l-k<p$

成立，则 Σ_c 一定是有差系统，其静差为

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = -EV\mathbf{f}_0 \tag{2.17}$$

其中 V 是如下方程

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

的解，而 $\mathbf{f}_0$ 是 $p\times 1$ 阶常阵.（外干扰的初值条件）.

证 由于 $P_0(D)=DI_l-A_1$, $Q_0(D)=C$ 右互质，即

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} -DI_l+A_1 \\ C \end{bmatrix} = l \quad \forall D\in \mathbf{C},$$

当 $D=0$ 时，必有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} = l.$$

依条件1和上式得

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 & A_3 \\ C & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} A_1 \\ C \end{bmatrix} = l.$$

从而知（2.8）存在唯一解 V. 又因 $\operatorname{rank} A_3=p$，从（2.18)的第一式知 $\operatorname{rank} V=p$，由条件3得 $\operatorname{rank} V>k-l$. 从而知推论2的三个条件全部满足. 因此 Σ_c 必是有差系统.

此时闭环方程为

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{\xi}_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_1=BF_1C & BF_c \\ B_cC & A_c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \xi \\ \xi_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_3 \\ 0 \end{pmatrix}\mathbf{f}, \tag{2.19}$$

$$\mathbf{z}(t)=E\xi,$$
$$\dot{\mathbf{f}}=0. \tag{2.20}$$

对（2.19）和（2.20）两边取拉氏变换，得

$$\mathbf{z}(s)=[E,\ 0]\begin{bmatrix} SI-(A_1+BF_1C) & -BF_c \\ -B_cC & SI-A_c \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix}\frac{1}{S}$$

由于闭环系统是内部稳定的，上式右边在 $\overline{\mathbf{C}}^+$ 上解析. 利用终值定理有

$$\lim_{t\to\infty} \mathbf{z}(t) = \lim_{s\to 0} s\,\mathbf{z}(s) = -[E,0]\begin{bmatrix} A_1+BF_1C & BF_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{f}_0. \tag{2.21}$$

另外从（2.18）直接得

$$\begin{bmatrix} A_1+BF_1C & BF_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

将上式代入（2.21）中得（2.17）.

推论 4　给定系统 Σ，若 $N(D)=D^nI_r$（即 $\mathbf{f}^{(n-1)}(t)=\mathbf{f}_0$）且推论 3 的三个条件全部满足，则闭环系统是有差的．当 t 充分大时近似有

$$\mathbf{z}(t)=t^{n-1}\mathbf{z}_0,$$

其中　$\mathbf{z}_0=-EV\mathbf{f}_0$，$V$ 满足（2.18）.

证　由于 $\mathbf{z}(t)=E\boldsymbol{\xi}(t)$，则有

$$\mathbf{z}^{(n-1)}(t)=E\boldsymbol{\xi}^{(n-1)}(t)$$

对任选的动态补偿器，如果记

$$\boldsymbol{\xi}^{(n-1)}(t)\triangleq\mathbf{x}(t),\quad \boldsymbol{\xi}_c^{(n-1)}(t)=\boldsymbol{\eta}(t),$$

则闭环系统的状态方程为

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}(t) \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A_1+BF_1C & BF_c \\ B_cC & A_c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \boldsymbol{\eta} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} A_3 \\ 0 \end{bmatrix}\mathbf{f}_0$$

$$\mathbf{z}^{(n-1)}(t)=E\mathbf{x},$$

它和（2.19）、（2.20）有完全相同的形式，且推论 3 的条件全部满足，由推论 3 直接得

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{z}^{(n-1)}(t)=\mathbf{z}_0=-EV\mathbf{f}_0.$$

当 t 充分大时近似有　$\mathbf{z}(t)=t^{(n-1)}\mathbf{z}_0$.

三、惯性导航初始对准系统的静差

前面分析了有差系统的结构特征，现在应用它来讨论半解析式惯性导航初始对准系统的静差．首先讨论水平对准．从惯性导航的误差分析知道，由东向陀螺和北向加速度表组成的单轴水平回路的误差方程[3]为

$$\Sigma_1:\ \begin{bmatrix} \delta\dot{V}_y \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & g \\ -\frac{1}{R} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \delta V_y \\ \alpha \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \Delta_y \\ \varepsilon_x \end{bmatrix},$$

$$y=[1\ \ 0]\begin{bmatrix} \delta V_y \\ \alpha \end{bmatrix},\qquad (3.1)$$

$$z=[0\ \ 1]\begin{bmatrix} \delta V_y \\ \alpha \end{bmatrix},$$

其中　δV_y 是北向速度误差，α 是平台东向水平倾角，g 是重力加速度，R 是地球平均半径，Δ_y 是北向加速度表的零位误差，ε_x 是东向陀螺漂移率，u_1 是北向加速度输出端的控

制，u_2 是东向陀螺力矩感受器的控制输入，∇_y 和 ε_x 都是常值干扰．从迭加原理知道，可以分别讨论 ∇_y 和 ε_x 关于 α 的静差．首先令 $f=\nabla_y$，$\varepsilon_x=0$．此时，在系统(3.1)中除 $A_3=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$ 外其它不变．从(3.1)直接得 $\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\CA\end{bmatrix}=2$，即$(A,C)$能观．另外有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A_1 & A_3\\ C & 0\end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix}0 & g & 1\\ -\dfrac{1}{R} & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}=2=l.$$

最后，由 C 和 E 是线性独立的知 $\mathbf{z}(t)$ 不能从$\mathbf{y}(t)$ 中读出，且

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}C\\E\end{bmatrix}=2=k>m=1.$$

于是有 $l-k=0<p=1$．由推论 3 知该系统是一个有差系统．为求其静差下面求解方程(2.18)，若记 $V=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}$，则有

$$\begin{bmatrix}0 & g\\ -\dfrac{1}{R} & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix},$$

$$[1,\ 0]\begin{bmatrix}v_1\\v_2\end{bmatrix}=0,$$

其解为 $v_1=0$，$v_2=\dfrac{1}{g}$．因此，其静差为

$$\lim_{t\to\infty}\alpha(t)=-EV\mathbf{f}_0=-[0,\ 1]\begin{bmatrix}0\\ \dfrac{1}{g}\end{bmatrix}\nabla_y=-\frac{\nabla_y}{g}.$$

下面令$\nabla_y=0$，此时系统(3.1)除 $A_3=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$ 外，其它不变，易知该系统是完全能控完全能观测的，且

$$\operatorname{rank}[I_2\quad A_3]=2,$$

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix}A_1 & A_3\\ C & 0\end{bmatrix}=l+p=3.$$

从[2]的定理 2 知该系统存在着全状态输出调节器 Σ_0，其闭环系统具有性质 $\lim\limits_{t\to\infty}\xi(t)=0$，因而有 $\lim\limits_{t\to\infty}\alpha(t)=0$。

上述分析表明，总可以为(3.1)选一个动态补偿器(例如就取全状态输出调节器)，使得闭环系统具有如下性质：α 关于 ε_x 的静差为零，而它关于∇_y的静差为$-\dfrac{\nabla_y}{g}$．

这些结论和初始对准的水平精度主要取决于加速度表的零位误差的实际情况是一致的。

下面讨论方位对准，从〔3〕知东向水平回路和方位回路组成的耦合系统为

$$\Sigma_2\quad \begin{pmatrix} \delta\dot{V}_y \\ \dot{\alpha} \\ \dot{\nu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & g & 0 \\ -\frac{1}{k} & 0 & -\Omega\cos\varphi \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta V_y \\ \alpha \\ \nu \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \nabla_y \\ \varepsilon_x \\ \varepsilon_z \end{pmatrix},$$

$$y = \delta V_y, \tag{3.2}$$

$$z = \begin{bmatrix} \alpha \\ \nu \end{bmatrix},$$

其中 ν是平台的方位失调角，u_3是方位陀螺力矩感受器上的控制，ε_z是方位陀螺的漂移率，Ω是地球平均自转角速度，φ是载体所处的地理纬度，其它符号如前．类似于水平对准的分析可知，对方位对准的耦合系统（3.2）也可以选出一个动态补Σ_p，使得闭环系统内部稳定，而且方位陀螺的漂移率Σ_z对水平倾斜角α和方位失调角ν都不产生静差，而东向陀螺漂移率ε_x和北向加速度表的零位误差∇_y总使水平倾角α和方位失调角ν产生静差，且静差为：

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = -\frac{\nabla_y}{g}, \qquad \lim_{t\to\infty} \nu(t) = \frac{\varepsilon_x}{\Omega\cos\varphi}.$$

通过对惯性导航初始对准的静差分析得知，提高对准精度的主要途径是提高元件精度，它和大家熟知的初始对准的实际情况是一致的．

参 考 文 献

〔1〕 钱唯德、王恩平、王朝珠，无静差和结构无静差系统的结构特征，自动化学报 **8**，1（1982），66—77．

〔2〕 王恩平，全状态输出调节系统的结构，自动化学报，**7**，3（1981），187—192．

〔3〕 王恩平、崔毅，线性系统理论在惯性导航中的应用，科学出版社，（1984）．

〔4〕 王恩平、王朝珠，多变量系统内模原理的频域方法，系统科学与数学，**1**，2（1981），81—89．

STRUCTURAL CHARACTERISTIC OF A KIND OF SYSTEMS WITH STEADY ERRORS

Wang Enping, Wang Chaozhu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

From the steady error analysis of the initial alignment of an inertia navigation system, we discovered that there exists a kind of system with steady errors. In such a system, no matter how to design the dynamic compensator for the system, in the regulation output of the closed-loop system there always exists the steady errors. The steady errors of regulation output relate only with the structural parameter of the open-loop system but is iudependent of the structure and parameters of the dynamic compensator. We call this kind of systems the systems with steady errors. In this paper the structural characteristic of the open-loop system with steady errors is discussed, and the formulas for calculating the steady errors by the stauctural parameters of the open-loop system is given.