第2卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol. 2, No. 2
1985年4月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　April, 1985

广义动力系统的可控性与可观性

严 拱 天

（北京控制工程研究所）

摘　要

本文研究广义状态空间系统的强可控与强可观问题。给出强可控强可观及强既约的充要判据。

一、引　言

近几年来，对广义动力系统的研究得到广泛的重视，并取得一定的成果[1、2、3、4、5、6、7]．特别对下述一些问题进行了比较深入的探讨：无穷远零—极结构、强可控、强可观、强等价、强既约实现、反馈与极点配置、二次型指标最优及稳定性等等．

矩阵束理论，特别是奇异束的Kronecker理论[9]、有理空间最小基[10]以及Drazin逆[11]成为研究广义系统的主要数学工具．Wonham[12]的几何方法对广义状态空间系统的研究提供了清晰的几何图象．

广义状态空间系统（以下简称广义系统）与常规状态空间系统（以下简称常规系统）的主要区别在于：广义系统出现无穷的特征频率和相应的脉冲模．奇异束正则形给出广义系统有关的控制结构的信息，因而是研究强可控、强可观的合适工具．而且现今已有数值上稳定的算法，用以求得奇异束正则形[8]．所以本文着重从Kronecker理论导出强可控强可观判据，进而给出强既约判据．

广义系统的正式研究，开创于Rosenbrock，他是从复杂电网络研究中提出此问题．后来Luenberger在经济领域中发现大量问题属于此范畴，他把这类系统称为描述变量系统（Descriptor Variable Systems）．可以粗略地说，凡由线性常微组与线性代数组混合描述的系统，便可称之为广义系统，由此可见其普遍性．

广义系统的研究与奇异扰动有密切联系．当小参数ε趋于零时，部分微分方程退化为代数方程，从而得广义系统．因而奇异扰动解与广义系统解有密切联系．

一、预　备　知　识

设广义系统的数学描述如下：

本文于1983年4月13日收到。1983年7月29日收到修改稿。

$$\left.\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu, \\ y &= Cx, \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

其中

$$\begin{cases} x\text{——}r\text{ 维矢，} E\text{、}A\text{、}B\text{ 和 }C\text{ 是适应维数的矩阵，} \\ u\text{——}m\text{ 维矢，} B\text{ 是列满阵，} \\ y\text{——}p\text{ 维矢，} C\text{ 是行满阵。} \end{cases}$$

特别注意 E 是 $r\times r$ 奇异阵。

但 $$|sE-A|\neq 0. \tag{2}$$

定义 1 系统(1)的广义阶由下式确定

$$f \triangleq \operatorname{rank} E.$$

容易证明 f 是系统模的个数（包含指数模与脉冲模），亦即是广义系统的自由度。事实上，考虑自由系统

$$E\dot{x} = Ax. \tag{3}$$

其解取决于正则束（$sE-A$）的构造。由正则束的 Weierstrass 理论知道，对每个正则束，在严格相抵意义下有下述正则形，即存在非异纯阵 M 与 N 使得：

$$M(sE-A)N = \left(\begin{array}{c|c|c|c} sI_n - J & & & \\ \hline & I_{n_1} - sN_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & I_{n_k} - sN_k \end{array}\right), \tag{4}$$

其中

$$\begin{cases} J\text{ 是 }n\times n\text{ Jordan 形，} \\ N_i(i=1,\cdots,k)\text{ 是 }n_i\times n_i\text{ 的幂零阵，形如} \end{cases}$$

$$N_i = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & 0 & 1 \end{pmatrix}_{n_i\times n_i}$$

显然， $$r = n + \sum_{i=1}^{k} n_i.$$

正则形(4)中，$sI_n - J$ 是正则部分，相应于有限特征频率并具指数形式解（简称指数模）。

$I_{n_i} - sN_i(i=1,\cdots,k)$ 称奇异部分，相应于无穷特征频率并具有脉冲形式（包括脉冲函数的导数等）解（简称脉冲模）。

整个奇异部分的独立脉冲解个数为

$$f_s=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1)\text{称为系统(1)的奇异阶.}$$

而 n 是正则部分之独立指数解个数，称(1)的正则阶。最后系统(1)的广义阶

$$f=n(\text{正则阶})+f_s(\text{奇异阶})=\mathrm{rank}\,E.$$

令 $\bar{n}\triangleq\max\limits_{i\{1,\cdots,k\}}\{n_i\}$，并称为广义系统的幂零指数。

注 当 $\bar{n}=1$ 时，亦即 $\mathrm{rank}\,E\triangleq f=n=\delta|sE-A|$（其中 δ 表示特征多项式 $|sE-A|$ 的次数），则奇异阶为零，广义系统不具有脉冲模。实际上，此时系统(1)仅受 $k=r-n$ 个纯代数约束（或称非动力约束）。

从外特性看，常规系统当 $D=0$ 时其传递函数阵一定是严格真分式阵。然而，广义系统即使 $D=0$ 情况下，其传递函数阵一般亦由两部分组成：多项式阵以及严格真分式阵。指出这一点在做非真分式传递函数阵实现时，是很有意义的。在常规系统中，我们常把传递函数阵中多项式阵部分，由直输阵 $D(s)$ 来实现。但从上述广义系统来看，不用直输阵 $D(s)$ 亦可实现非真分式传递函数阵。

三、无 穷 零 极 点

如前所述，广义系统与常规系统的主要区别在于：前者出现无穷特征频率及相应的脉冲模。要理解这一点，就要研究系统(1)在无穷远处的零极结构。

关于无穷零极点，有各种定义法，下面一种是最常用到的：

定义 2 有理阵 $G(s)$ 在无穷远处的零点（极点），是指 $G\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)$ 在原点处的零点（极点）。这样，就把无穷零（极）点计算变换成有限零（极）点计算。而有限零(极)点则是进行既约（左或右）分解后，相当于分子（分母）的两个多项式阵的零点，这是大家熟知的。

注 如此定义的无穷远零点，已经把纯代数约束排除在动力系统考虑之外。换言之，幂零指数为 l 的幂零阵：$N_l=\begin{pmatrix}0&1&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&1\\0&&&0\end{pmatrix}_{l\times l}$ 所对应的 $I-sN_l$ 只有 $(l-1)$ 阶无穷远零点，而不是 l 阶的。

例如：单模态阵 $U_1(s)=\begin{pmatrix}1&-s&&0\\&\ddots&\ddots&\\&&\ddots&-s\\0&&&1\end{pmatrix}_{l\times l}$，其无穷远零极点可确定如下：

$$U_l\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{\lambda} & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \frac{1}{\lambda} \\ 0 & & & 1 \end{bmatrix}_{l\times l}=\begin{bmatrix} 1, & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 1 & & & 0 \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}^{-1}\cdot$$

因为 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & & 0 \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{bmatrix}_{l\times l}$ 在原点处有$(l-1)$阶零点，所以$U_1(s)$在无穷远有$(l-1)$阶零点.

因为 $\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \lambda & \\ 0 & \ddots & \lambda \end{bmatrix}_{l\times l}$ 在原点有$(l-1)$阶零点，所以$U_l(s)$在无穷远有$(l-1)$阶极点.

如所周知，可控性与可观性仅取决于下述两个相应的矩阵：

$$P_I(s)=\{sE-A,\ -B\},\tag{5}$$

$$P_0(s)=\begin{Bmatrix} sE-A \\ C \end{Bmatrix}.\tag{6}$$

定义 3 系统(1)的无穷输入解耦零点，指的是$P_I\left(\frac{1}{\lambda}\right)$在原点$(\lambda=0)$处的零点.

系统(1)的无穷输出解耦零点，指的是$P_0\left(\frac{1}{\lambda}\right)$在原点$(\lambda=0)$处的零点.

显然，$P_I(s)$与$P_0(s)$都是奇异束，其零极结构（有限的及无穷的）在严格相抵下是不变的，因而可以从其正则形来分析其零极结构.

如所周知，奇异束在严格相抵下的正则形，最一般的形式如下：

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} sI-J & & & \\ \hline & I-sN & & \\ \hline & & \begin{matrix} k_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & k_\alpha(s) \end{matrix} & \\ \hline & & & \begin{matrix} l_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & l_\beta(s) \end{matrix} \end{array}\right). \tag{7}$$

分析上述四大块的零极结构，不难得出下述结论：

1. $sI-J$ 相应于有限初等因子，其中 J 是 Jordan 形。这一块只有有限零点与无穷极点。且有限零点的个数＝无穷极点的个数。

2. $I-sN$ 相应于无穷初等因子，其中

$$N=\begin{pmatrix} N_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & N_k \end{pmatrix},\text{而 } N_i=\begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & 0 & 1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ & & & \ddots & 1 \\ 0 & & & & 0 \end{pmatrix}_{n_i\times n_i} \text{是幂阵零} \quad (i=1,\cdots,k)$$

这一块只有无穷零点与无限极点。而且有

$$\text{无穷零点个数}=\text{无穷极点个数}=\sum_{i=1}^{k}(n_i-1).$$

3. $$\begin{pmatrix} k_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & k_\alpha(s) \end{pmatrix},\text{其中 } k_i(s)=\begin{pmatrix} s & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & s & -1 \end{pmatrix}_{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)} \text{是}$$

Kronecker 列块，列最小指标为 ε_i $(i=1,\cdots,\alpha)$。

这一块只有无穷极点，而且：

$$\text{无穷极点的个数}=\sum_{i=1}^{\alpha}\varepsilon_i.$$

4. $$\begin{pmatrix} l_1(s) & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & l_\beta(s) \end{pmatrix},\text{其中 } l_j(s)=\begin{pmatrix} s & & 0 \\ -1 & \ddots & \\ & \ddots & s \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}_{(\mu_j+1)\times\mu_j} \text{是}$$

Kronecker 行块，行最小指标为 μ_j $(j=1,\cdots,\beta)$。

这一块只有无穷极点，而且

$$\text{无穷极点的个数}=\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j.$$

综上所述，奇异束的零极点个数与行列最小指标集有下述关系：

$$N_p - N_z = \sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j,$$

其中

$$\begin{cases} N_p \text{ 是奇异束的极点总个数（计及重数），} \\ N_z \text{ 是奇异束的零点总个数（计及重数）.} \end{cases}$$

更一般地，对任一有理阵 $R(s)$ 成立下述关系式[5]

$$N_p(R) - N_z(R) = t(R),$$

其中 $N_p(R)$ 是 $R(s)$ 的极点总个数，

$N_z(R)$ 是 $R(s)$ 的零点总个数，

$t(R)$ 是 $R(s)$ 的行最小指标与列最小指标之和.

四、强可控性与强可观性

本节讨论广义系统的可控可观问题. 我们着重从奇异束正则形推得广义系统强可控与 $P_1(s)$ 列最小指标的关系. 由对耦性给出广义系统强可观与 $P_0(s)$ 的行最小指标的关系. 最后得到强既约系统的充要条件.

关于广义系统可控可观性有各种定义，主要地还是状态方式与模态方式. 我们着重研究模态可控可观性，所以不考虑纯代数约束. 这一点与点状态可控有区别. 下面采用 Verghese 的定义[2].

定义 4 如果系统(1)在零初态下，非脉冲输入可激励出该脉冲模态，则称该脉冲模为可控脉冲模.

如果系统(1)的所有脉冲模都可控，则称系统(1)为无穷可控.

如果系统(1)既是常规可控（指指数模可控），又是无穷可控，则称之为强可控.

类似地，可以定义无穷可观与强可观.

注 1 广义系统是无穷可控 $\Longleftrightarrow P_1(s)$ 没有无穷零点. 系统是强可控 $\Longleftrightarrow P_1(s)$ 没有零点（有限及无穷）.

注 2 广义系统是无穷可观 $\Longleftrightarrow P_0(s)$ 没有无穷零点. 系统是强可观 $\Longleftrightarrow P_0(s)$ 没有零点（有限及无穷）.

Verghese 利用行压缩变换给出无穷可控与无穷可观的判据.

设经行压缩变换

$$[sE - A, -B] \longrightarrow \begin{bmatrix} sE_1 - A_1 & -B_1 \\ -A_2, & -B_2 \end{bmatrix},$$ 其中 E_1 是行满，

$$\begin{bmatrix} sE-A \\ C \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} sE'-A' \\ A'' \\ C \end{pmatrix}，\text{其中 } E' \text{ 是行满．}$$

判据 1　系统(1)是无穷可控$\Longleftrightarrow\begin{bmatrix} E_1 & 0 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}$行满．

判据 2　系统(1)是无穷可观$\Longleftrightarrow\begin{pmatrix} E' \\ A'' \\ C \end{pmatrix}$列满．

我们用奇异束正则形的零极结构，推导系统(1)的可控可观判据．

定理 1　系统(1)是强可控$\Longleftrightarrow p_I(s)$的正则形满足下述条件：

Ⅰ)没有有限的初等因子，

Ⅱ)无穷初等因子的幂零指数不大于 1．

证　$\Longleftarrow$)如果上述条件满足，则 $P_I(s)$既无有限零，又没有无穷零．由注 1 知其强可控．

$\Longrightarrow$)若不然，则$P_I(s)$或则有有限零，或则有无穷零，即系统(1)有输入解耦零，因而不是强可控．

注 3　由开头假设知$|sE-A|\neq 0$，所以 $P_I(s)$不可能有行指标．再由定理1知，强可控的广义系统其 $P_I(s)$的正则形，一般取下式：

$$\left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \; 0 & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} k_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & k_m(s) \end{matrix} \end{array}\right). \tag{10}$$

定理 2　系统(1)是强可观$\Longleftrightarrow P_0(s)$的正则形满足下述条件：

Ⅰ)没有有限的初等因子，

Ⅱ)无穷初等因子的幂零指数不大于 1．

证　与定理 1 完全相似．

注 4　由假设$|sE-A|\neq 0$知，$P_0(s)$没有列最小指标．再由定理 2 可得：强可观的广义系统其 $P_0(s)$的正则形，一般取下式：

$$\left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} l_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & l_p(s) \end{matrix} \end{array}\right). \tag{11}$$

定理 3 系统(1)是强可控$\Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = f$,

此处

$$\begin{cases} \varepsilon_i \text{ 是 } P_l(s) \text{ 的列最小指标,} \\ f \text{ 是系统(1)的广义阶.} \end{cases}$$

证 $\Longrightarrow$)由定理 1 知,$P_l(s)$有下述正则形

$$M\{sE-A,-B\}N=\left(\begin{array}{c:c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} \Big\} k & 0 \\ \hdashline 0 & \begin{matrix} k_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & k_m(s) \end{matrix} \end{array}\right). \tag{12}$$

所以 $\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = r-k$. 因为上式可改写成

$$sM[E,0]N+M[-A,-B]N=s\left(\begin{array}{c:c:c:c} O_{k\times k} & & & \\ \hdashline & \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{matrix} & & \\ \hdashline & & \ddots & \\ \hdashline & & & \begin{matrix} 1 & 0 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & 0 \end{matrix} \end{array}\right)$$

$$+\left(\begin{array}{c:c:c:c} I_{k\times k} & & & \\ \hdashline & \begin{matrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & -1 \end{matrix} & & \\ \hdashline & & \ddots & \\ \hdashline & & & \begin{matrix} 0 & -1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 0 & -1 \end{matrix} \end{array}\right). \tag{13}$$

显然 s 的系数阵之秩 = rank E。这表明

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = r - k = f.$$

$\Leftarrow$）因为 $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i = f$，那么 $P_I(s)$ 的正则形具有(12)形式．否则 $\sum\limits_{i=1}^{m} \varepsilon_i < f$（与题设矛盾）．这表明 $P_I(s)$ 不存在有限或无穷零点，故为强可控．

定理 4　系统(1)强可观 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{j=1}^{p} \mu_j = f$.

此处

$$\begin{cases} \mu_j \text{ 是 } P_0(s) \text{ 的行最小指标,} \\ f \text{ 是系统(1)的广义阶.} \end{cases}$$

证　由定理 3 及对耦性即可得之．

定义 6　广义系统称为强既约的；如果广义系统既是强可控又是强可观．

定理 5　系统(1)是强既约 $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i = \sum_{j=1}^{p} \mu_j = f \quad .$$

此处

$$\begin{cases} \{\varepsilon_i\} \text{ 是 } P_I(s) \text{ 的列最小指标集,} \\ \{\mu_j\} \text{ 是 } P_0(s) \text{ 的行最小指标集,} \\ f \text{ 是广义系统的广义阶.} \end{cases}$$

证　结合定理 3 与定理 4 即得．

定理 6　系统(1)是强既约 $\Longleftrightarrow \sum\limits_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i + \sum\limits_{j=1}^{\beta} \mu_j = f - N_z(G)$.　　(14)

此处 $N_z(G)$ 是系统传递函数阵 $G(s)$ 的零点个数．

证　$\Longrightarrow$）对传递函数阵 $G(s)$ 利用公式(9)得

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \varepsilon_i + \sum_{j=1}^{\beta} \mu_j = N_p(G) - N_z(G).$$

因为系统是强既约的，内外特性的极结构是同构[6]、所以 $f = N_p(G)$。由此得(14)。

$\Longleftarrow$）若不然，一定存在解耦零点．消去这些解耦零点后，所得的降阶系统为强既约的．设其相应的系统矩阵为 $\widetilde{P}(s)$，传递函数阵 $\widetilde{G}(s)$ 仍等于降阶前系统矩阵 $P(s)$ 所

对应的传递函数阵 $G(s)$。但 $\widetilde{P}(s)$ 的广义阶 $f'<f$（$P(s)$ 的广义阶）。因为 $\widetilde{P}(s)$ 是强既约，由已证的必要性知，

$$\sum_{i=1}^{\alpha}\varepsilon_i+\sum_{j=1}^{\beta}\mu_j=f'-N_z(G)。\tag{15}$$

因 $f'<f$，所以与定理的条件(14)矛盾。这表明原系统不存在解耦零点，亦即为强既约。

定理 7 下述几种说法是等价的：

Ⅰ）系统(1)是无穷可控，

Ⅱ）$P_I(s)$ 的正则形中，所含无穷初等因子，其幂零指数等于1，

Ⅲ）$P_I(s)$ 是行正则，

Ⅳ）B_i 阵中最后一行矢量 $b_i^Tn_i$ $(i=1,\cdots,k)$ 线性无关。

其中 B_i 确定如下：

$$[M(sE-A)N,\ -MB]=\left(\begin{array}{c|c|c|c|c} sI_n-J & & & & B_0\\ \hline & In_1-sN_1 & & & B_1\\ \hline & & \ddots & & \vdots\\ \hline & & & In_k-sN_k & B_k\end{array}\right).\tag{16}$$

证 Ⅰ）$\Longrightarrow$Ⅱ）显然。（因为否则有无穷解耦零）

Ⅱ）$\Longrightarrow$Ⅲ）由条件Ⅱ）知，$P_I(s)$ 的正则形必取

$$\left(\begin{array}{c|c|c} sI_n-J & & \\ \hline & \begin{matrix}1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1\end{matrix} & \\ \hline & & \begin{matrix}k_1(s) & & \\ & \ddots & \\ & & k_m(s)\end{matrix}\end{array}\right).\tag{17}$$

此处

$$k_i=\begin{pmatrix} s & -1 & & & 0\\ & s & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & s & -1\end{pmatrix}_{\varepsilon_i\times(\varepsilon_i+1)}.$$

显然(17)式是行正则的，而且在严格相抵下，行正则性不变，由此得Ⅲ）。

Ⅲ）$\Longrightarrow$Ⅳ）由于 $P_I(s)$ 是行正则，故(16)亦是行正则。这表明 $\{b_i^Tn_i\}$ $(i=1,\cdots,k)$ 必是线性无关。

Ⅳ）$\Longrightarrow$Ⅰ）为此只要证明(16)中奇异部分：

$$S(s) \triangleq \left(\begin{array}{c|c|c|c} In_1 - sN_1 & & & B_1 \\ \hline & \ddots & & \vdots \\ \hline & & In_k - sN_k & B_k \end{array}\right).$$

没有无穷零点。

事实上，$S\left(\frac{1}{\lambda}\right)$左既约分解后多项式分子阵在$\lambda=0$处是行满的。所以$S(s)$在无穷处没有零点，亦即系统没有无穷解耦零点，亦即无穷可控。

由对耦性易知

定理 8　下述几种说法是等价的：

Ⅰ）系统(1)是无穷可观的，

Ⅱ）$P_0(s)$的正则形中的无穷初等因子，其幂零指数等于1，

Ⅲ）$P_0(s)$是列正则，

Ⅳ）$\{C_j\}$的第一列矢量$(C_{j1}\}$ $(j=1,\cdots,k)$线性无关。

其中　C_i决定如下：

$$\begin{Bmatrix} M(sE-A)N \\ CN \end{Bmatrix} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} sI_n - J & & & \\ \hline & In_1 - sN_1 & & \\ \hline & & \ddots & \\ \hline & & & In_k - sN_k \\ \hline C_0 & C_1 & \cdots & C_k \end{array}\right).$$

注 5　Verghese 关于无穷可控的判据 1，可由定理 7 之Ⅲ）易推得。

五、结　　论

广义状态空间系统与常规状态空间系统有许多本质的差异。这在内外特性两方面都有所反映。特别是对广义系统要重新定义阶数的概念，内特性出现无穷特征频率及相应的脉冲模等等。因此对广义系统而言，可控与可观问题，不仅要求$P_1(s)$与$P_0(s)$没有有限零，而且亦没有无穷零。但从奇异束的 Kronecker 理论知，每个奇异束经严格相抵可得 Kronecker 正则形，其零极结构是一目了然的。所以，从正则形出发很自然地导出强可控强可观的充要判据。进而给出强既约的充要条件以及内外特性的关联性质。这些结果可看成是 Rosenbrock 关于常规系统相应结果在广义系统中的推广。

致谢　本文是在谈自忠教授直接指导下完成的，作者在此深表谢意。

参考文献

〔1〕 Rosenbrock, H. H., Structural Properties of Linear Dynamic Systems, Int. J. Control, **20**,2 (1974) ,191—202.

〔2〕 Verghese, G., Infinite Frequency Behavior in Generalized Dynamical Systems, Ph. D. Dissertation, Dept of E. E, Stanford University. (1978).

〔3〕 Verghese, G. and Kailath, T., Generalized Dyanmic Systems, 18—th IEEE Conf. on Decision and Control (1979).

〔4〕 Verghese, G., Levy, B. C. and Kailath, T., A Generalized State-Space For Singular Systems, IEEE Trans. on Automatic Control **26**,4 (1981).

〔5〕 Verghese, G., Dooren, P. Van. and Kailath, T., Properties of the System matrix of a Generalized State Space System, Int. J. Control, **30**, 2 (1979).

〔6〕 Luenberger, D. G., Dynamical Equations in Descriptor Form, IEEEE Trans. on Automatic Control, **22**, 3 (1977).

〔7〕 Cobb, D., Feedback and Placement in Descriptor Variable Systems, Int. J. Control, **33**, 6 (1981).

〔8〕 Dooren, P. Van., Computation of Kronecker′ s Canonical Form of a Singular Pencil, Linear Alg. and Its Applications, 27(1979).

〔9〕 甘特马赫，矩阵论，高等教育出版社，1956年第二版。下册第十二章。

〔10〕 Forney, G. D., Minimal Bases of Rational Vector Space with Applications to Multivariable Linear Systems, SIAM. J. Control, **13**,3 (1975).

〔11〕 Campbell, S. L., Mayer, C. D. and Rose, N. J., Applications of the Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations with Singular Constant Coefficients, SIAM. J. Applied, Math., **31**,3 (1976).

〔12〕 Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: Geometric Approach, Spring-Verlag. (1979).

STRONG CONTROLLABILITY AND STRONG OBSERVABILITY OF GENERALIZED DYNAMICAL SYSTEMS

Yan Gongtian

(Beijing Institute of Control Engineering)

Abstract

In this paper we study the strong controllability and strong observability of generalized dynamical systems. Specifically, Kronecker's theory on matrix pencils and the minimal bases of rational vector space are used to investigate the relationship between strong controllability and minimal indices of the system matrix. By duality the corresponding results on strong observability are also obtained. Finally, the necessary and sufficient condition for strong irreducibility is given.

敬 告 读 者

本刊1985年第三、四期的征订工作正在进行，请读者及时到当地新华书店办理预订手续。如逾脱期订，可向广州市新基路25号广东科技出版社发行科邮购。

（本刊编辑部）