第2卷 第2期
1985年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 2, No. 2
April, 1985

带参数的系统的Robust控制器

涂奉生　　齐寅峰

（南开大学）

摘　要

本文引进了带参数的系统概念，并利用多项式阵的左公倍式以及外斜互质性，讨论了带参数系统的Robust 控制问题．得到了频率域带参数系统存在 Robust 控制器的充分必要条件，以及控制器是带参数系统的 Roubst 控制器的充分必要条件．并给出了数值例子．

一、问 题 的 提 出

考虑图1所示的控制系统

装置的传递函数阵为

$$G_P(s,\theta)=P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta),\tag{1.1}$$

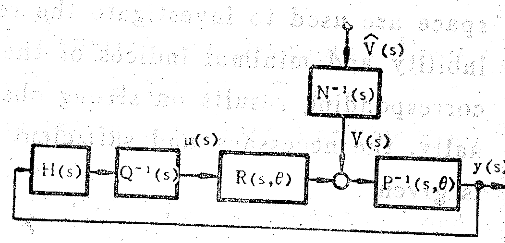

图 1

其中 θ 为 l 维参数向量，即 $\theta\in R^l$，R 为实数域，$R(s,\theta)$，$P(s,\theta)$ 分别为 $p\times m$，$p\times p$ 阶的多项式矩阵．设 θ° 为 θ 的额定值，记 $R(s)=R(s,\theta^{\circ})$，$P(s)=P(s,\theta^{\circ})$．在本文中作如下假定：1）$R(s)$，$P(s)$ 左互质，$P(s)$ 行正则，$G_P(s)=P^{-1}(s)R(s)$ 为真有理分式阵；2）$R(s,\theta)$，$P(s,\theta)$ 中所有元素关于 θ，在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处连续；3）存在 θ° 的一个邻域 $\Omega(\theta^{\circ})$，使得在 $\Omega(\theta^{\circ})$ 内，（1.1）均为真有理分式阵，且 $\partial P(s,\theta)=\partial P(s,\theta^{\circ})$（$\partial P(s,\theta)$，$\partial P(s,\theta^{\circ})$ 分别为 $|P(s,\theta)|$，$|P(s,\theta^{\circ})|$ 的次数），即系统（1.1）的阶数在 $\Omega(\theta^{\circ})$ 内保持不变．

控制器传递函数阵为

$$G_c(s)=Q^{-1}(s)H(s),\tag{1.2}$$

其中 $Q(s)$，$H(s)$ 分别为 $m\times m$，$m\times p$ 阶的多项式阵，并假定 $Q(s)$，$H(s)$ 左互质，$Q(s)$ 行正则，$G_c(s)$ 为真有理分式阵．

干扰模型为

$$G_d(s)=N^{-1}(s)I,\tag{1.3}$$

其中 $N(s)$ 为 $p\times p$ 阶阵，设其最小多项式为 $n(s)$，并假定 $n(s)$ 的根 $\in C^+$．$\hat{V}(s)$ 为 s 的多项式向量，可看作是扰动信号的初值．$V(s)$ 为扰动信号，$y(s)$ 为装置输出，$u(s)$

本文于1983年7月16日收到．1984年3月9日收到修改稿．

为输入。

我们希望设计控制器 $G_c(s)=Q^{-1}(s)H(s)$，使得

1． 当 $\theta=\theta^\circ$ 时，闭环系统的内部稳定；

2． 当 $\theta=\theta^\circ$ 时，系统达到输出调节，即对于闭环系统的任意初值（包括扰动模型的初值在内），均有 $\lim\limits_{t\to\infty} y(t)=0$；

3． 存在 θ° 的一个邻域 $\Omega(\theta^\circ)$，当 $\theta\in\Omega(\theta^\circ)$ 时，仍有 1，2，即闭环系统仍内部稳定，并达到输出调节。

满足条件 1—3 的控制器称为带参数 θ 的系统 $G_p(s,\theta)=P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta)$ 在 $\theta=\theta^\circ$ 处的一个 Robust 调节器。

在第二节中，介绍本文的数学基础——多项式阵的最小左公倍式．在第三节中，给出本文的主要结果，即带参数的系统存在 Robust 调节器的充分必要条件，以及控制器是带参数系统的 Robust 调节器的充分必要条件．在第四节中，给出两个数值例子．

二、多项式阵的最小左公倍式

在本节我们讨论无穷多个矩阵存在最小公倍式的问题以及有关性质．有关有限多个矩阵的公倍式的问题可参考[1]．

设 $R^{p\times p}[s]$ 表示所有 $p\times p$ 阶的实系数多项式阵所构成的集合．设 $P(s)\in R^{p\times p}[s]$，若存在 $Q(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得 $M(s)=Q(s)P(s)$，则称 $M(s)$ 为 $P(s)$ 的左倍式．$P(s)$ 的所有左倍式所构成的集合记为 $(P(s))_l$，显然 $(P(s))_l$ 即为 $P(s)$ 的左主理想[4,P73]．

设参数 $\theta=[\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_l]$，$\theta_i\in R$，$i=1,2,\cdots,l$，$\theta$ 所在集合记为 Λ，即 $\theta\in\Lambda$．设 θ° 是 θ 的固定值，若 Λ 是 θ° 的某一邻域，则记为 $\Lambda=\Omega(\theta^\circ)$．考虑带参数 θ 的多项式阵集合

$$\mathbf{P}_\Lambda=\{P(s,\theta),\ \theta\in\Lambda\},\qquad(2.1)$$

其中 $P(s,\theta)\in R^{p\times p}[s]$，并且总假定 $|P(s,\theta)|\neq 0$．若存在 $M(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得对任一 $\theta\in\Lambda$，均存在 $Q(s,\theta)\in R^{p\times p}[s]$，有 $M(s)=Q(s,\theta)P(s,\theta)$，则 $M(s)$ 称为 $\mathbf{P}_\Lambda$ 的左公倍式．$\mathbf{P}_\Lambda$ 的所有左公倍式所构成集合记为 $\mathbf{m}_\Lambda$．如果存在 $M_m(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得 $\mathbf{m}_\Lambda=(M_m(s))_l$，则称 $M_m(s)$ 为 $\mathbf{P}_\Lambda$ 的最小左公倍式．显然最小左公倍式不是唯一的，但它们都是行等价的．如果 $M_m(s)$ 为行标准形，则它是唯一确定的[7]．

定理 1 若 $\mathbf{P}_\Lambda$ 存在满秩的左公倍式 $M(s)$，则

1) 存在最小左公倍式 $M_m(s)$；

2) 存在一个有限子集 $\Lambda_1\subset\Lambda$，使得 $M_m(s)$ 仍为 $\mathbf{P}_{\Lambda_1}$ 的最小左公倍式．

由定理 1 的 1) 可直接推出下面熟知结果．

推理 1 若 Λ 是有限集，则 $\mathbf{P}_\Lambda$ 一定存在最小左公倍式．

证 若 Λ 是有限集，那么 $P(s,\theta),\theta\in\Lambda$ 的最小多项式的最小公倍式一定存在，设为 $n(s)$，不难看出 $\Phi(s)=n(s)I$ 是满秩的，且是 $\mathbf{P}_\Lambda$ 的左公倍式，由定理 1 的 1)，故

得本推理。

定理1的证明依赖于下面引理。

引理1 设$M(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$，$|M(s)|\neq 0$，若又存在$M'(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$，那么$M(s)$，$M'(s)$的最大右公因式$M_d(s)$一定仍属于$\mathrm{m}_\Lambda$。

证 由假定可知，存在右互质$D(s)$，$D'(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得$M(s)=D(s)M_d(s)$，$M'(s)=D'(s)M_d(s)$。又由于$M(s)$，$M'(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$，故存在$Q(s,\theta)$，$Q'(s,\theta)\in R^{p\times p}[s]$，使得

$M(s)=Q(s,\theta)P(s,\theta)$，$M'(s)=Q'(s,\theta)P(s,\theta)$，$\theta\in\Lambda$，因而有

$$D(s)M_d(s)=Q(s,\theta)P(s,\theta),\quad D'(s)M_d(s)=Q'(s,\theta)P(s,\theta)$$

由于$|M(s)|\neq 0$，故$|D(s)|\neq 0$，因而有

$$D'(s)D^{-1}(s)Q(s,\theta)P(s,\theta)=Q'(s,\theta)P(s,\theta),$$

$$D'(s)D^{-1}(s)Q(s,\theta)=Q'(s,\theta).$$

由于$D'(s)$，$D(s)$右互质，所以$H(s,\theta)=D^{-1}(s)Q(s,\theta)\in R^{p\times p}[s]$，$\theta\in\Lambda$。这样$M_d(s)=D^{-1}(s)Q(s,\theta)P(s,\theta)=H(s,\theta)P(s,\theta)$，即$M_d(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$。

定理1的证明 1）若$M(s)$不是最小左公倍式，则易知存在$M'(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$，使得$M(s)$，$M'(s)$的最大右公因式$M_d(s)$满足条件：$\partial M(s)>\partial M_d(s)$（$\partial M(s)$表示$|M(s)|$的次数）。由引理1可知$M_d(s)\in \mathrm{m}_\Lambda$。若$M_d(s)$不是最小左公倍式，则利用$M_d(s)$代替$M(s)$，再重复上面讨论。由于$\partial M(s)$是有限的，上面讨论至多只能重复有限次，故最小左公倍式一定存在。2）任取Λ的一个有限子集Λ_1，由推理1可知P_{Λ_1}存在最小左公倍式$M_{m1}(s)$，若P_Λ的最小左公倍式$M_m(s)$与$M_{m1}(s)$不行等价，不难看出在Λ_1中一定可添入Λ中某个元，使得Λ_1变为Λ_2，而Λ_2的最小左公倍式$M_{m2}(s)$是$M_{m1}(s)$的左倍式，且$\partial M_{m2}(s)>\partial M_{m1}(s)$。若$M_{m2}(s)$与$M_m(s)$不行等价，那么$\partial M_{m2}(s)<\partial M_m(s)$。再重复上面的讨论，这样可以一直作下去。由于$\partial M_m(s)$是有限的，那么经过有限步骤可得到$\Lambda_1\subset\Lambda_2\subset\cdots\subset\Lambda_K\subset\Lambda$，并有$\partial Mm_K(s)=\partial M_m(s)$，$Mm_K(s)$为$\mathrm{P}_{\Lambda_K}$的最小左公倍式。易知$M_m(s)$为$Mm_K(s)$的左倍式，因而存在$D(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得$M(s)=D(s)Mm_K(s)$，因而$\partial D(s)=0$，故$D(s)$是单位模阵，所以$M_m(s)$，$Mm_K(s)$行等价，即$M_m(s)$也是$\mathrm{P}_{\Lambda_K}$的最小左公倍式。

定理2 设$\Lambda=\Omega(\theta^\circ)$，且$\mathrm{P}_\Lambda$存在满秩的左公倍式$M(s)$，那么存在一个邻域$\Omega^*(\theta^\circ)\subset\Omega(\theta^\circ)$，以及$M_m^*(s)\in R^{p\times p}[s]$，使得对于$\Omega^*(\theta^\circ)$中任一邻域$\Omega_\Sigma(\theta^\circ)$，均有$\mathrm{m}_{\Omega_\Sigma}(\theta^\circ)=(M_m^*(s))_l$，即$M_m^*(s)$均是$\Omega_\Sigma(\theta^\circ)$的最小左公倍式。

证 由定理1可知存在满秩$M_m(s)$，使得$\mathrm{m}_{\Omega(\theta^\circ)}=(M_m(s))_l$。构造$\theta^\circ$的一个邻域序列

$$\Omega(\theta^\circ)=\Omega_0(\theta^\circ)\supset\Omega_1(\theta^\circ)\supset\Omega_2(\theta^\circ)\supset\cdots\supset\Omega_K(\theta^\circ)\supset\cdots,$$

并使得，当$K\to\infty$时，$\Omega_K(\theta^\circ)\to\theta^\circ$。易见

$$\mathrm{m}_{\Omega_0(\theta^\circ)}\subset\mathrm{m}_{\Omega_1(\theta^\circ)}\subset\cdots\subset\mathrm{m}_{\Omega_K(\theta^\circ)}\subset\cdots.$$

由定理1的1)可知，对每个$\mathbf{P}_{\Omega_K(\theta^\circ)}$，均存在最小左公倍式$Mm_K(s)$，由于$(Mm_K(s))_l = m_{\Omega_K(\theta^\circ)}$，$K=0,1,2,\cdots$，所以

$$(Mm_0(s))_l \subset (Mm_1(s))_l \subset \cdots \subset (Mm_K(s))_l \subset \cdots,$$

因而

$$\partial Mm_0(s) \geq \partial Mm_1(s) \geq \partial Mm_2(s) \geq \cdots \geq \partial Mm_K(s) \geq \cdots.$$

由于$\partial M(s) \geq \partial Mm_0(s)$，故$\partial Mm_0(s)$是有限的，因而存在某个$K$，使得

$$\partial Mm_K(s) = \partial Mm_{K+1} = \cdots = \partial Mm_{K+j} = \cdots.$$

易知有

$$Mm_K(s) \underset{\sim}{r} Mm_{K+1}(s) \underset{\sim}{r} \cdots \underset{\sim}{r} Mm_{K+j}(s) \underset{\sim}{r} \cdots,$$

即$Mm_K(s)$是$\mathbf{P}_{\Omega_{K+j}(\theta^\circ)}$，$j=0,1,2,\cdots$，的最小左公倍式．对任意$\Omega_\Sigma(\theta^\circ) \subset \Omega_K(\theta^\circ)$，那么一定存在一个$j$，使得$\Omega_{K+j}(\theta^\circ) \subset \Omega_\Sigma(\theta^\circ)$，设$Mm_\Sigma(s)$为$\mathbf{P}_{\Omega_\Sigma(\theta^\circ)}$的最小左公倍式．由此不难看出，$Mm_K(s) \underset{\sim}{r} Mm_\Sigma(s) \underset{\sim}{r} Mm_{K+j}(s)$，故$Mm_K(s)$也是$\mathbf{P}_{\Omega_\Sigma(\theta^\circ)}$的最小左公倍式．所以$\Omega^*(\theta^\circ) = \Omega_K(\theta^\circ)$，$M_m^*(s) = Mm_K(s)$满足定理的要求．

类似，定理1，定理2对于最小右公倍式也是成立的．

三、Robust 控制器

设$R(s) \in R^{p\times m}[s]$，$N(s) \in R^{p\times p}[s]$，且$|N(s)| \neq 0$，如果存在$\widetilde{R}(s) \in R^{p\times m}[s]$，$\widetilde{N}(s) \in R^{m\times m}[s]$满足下面条件：1) $N(s)R(s) = \widetilde{R}(s)\widetilde{N}(s)$；2) $|N(s)| = \alpha|\widetilde{N}(s)|$，$\alpha$为不等于零的某个数；3) $N(s)$，$\widetilde{R}(s)$左互质（或者$\widetilde{N}(s)$，$R(s)$右互质），则称$R(s)$，$N(s)$外斜互质[2]，称$N(s)$，$R(s)$，$\widetilde{R}(s)$，$\widetilde{N}(s)$为一外斜互质组．考虑如图1所示系统．本节始终假定存在θ°的一个邻域$\Omega(\theta^\circ)$，使得在此邻域内，$R(s,\theta)$，$N(s)$外斜互质．在此假定下，可知存在$\widetilde{R}(s,\theta)$，$\widetilde{N}(s,\theta)$，使得$N(s)$，$R(s)$，$\widetilde{R}(s,\theta)$，$\widetilde{N}(s,\theta)$为一外斜互质组．记$\mathbf{N}_{\Omega(\theta^\circ)} = \{\widetilde{N}(s,\theta),\ \theta \in \Omega(\theta^\circ)\}$．由于$\widetilde{N}(s,\theta)$，$\theta \in \Omega(\theta^\circ)$的最小多项式与$N(s)$的最小多项式$n(s)$相同，所以$\Phi(s) = n(s)I$为$\mathbf{N}_{\Omega(\theta^\circ)}$的左公倍式．由定理1可知$\mathbf{N}_{\Omega(\theta^\circ)}$存在最小左公倍式．设$\mathbf{N}_{\Omega(\theta^\circ)}$的最小左公倍式为$N_m(\Omega(\theta^\circ))$．根据定理2可知存在一邻域$\Omega^*(\theta^\circ)$，不失一般性可假定$\Omega^*(\theta^\circ) = \Omega(\theta^\circ)$，使得对于包含在$\Omega(\theta^\circ)$内的任一邻域$\Omega_\Sigma(\theta^\circ)$，均有$N_m(\Omega(\theta^\circ)) = N_m(\Omega_\Sigma(\theta^\circ))$，此处$N_m(\Omega_\Sigma(\theta^\circ))$表示多项式阵集合$\mathbf{N}_{\Omega_\Sigma(\theta^\circ)} = \{\widetilde{N}(s,\theta),\ \theta \in \Omega_\Sigma(\theta^\circ)\}$的最小左公倍式．因此，可记$N_m(s) = N_m(\Omega(\theta^\circ)) = N_m(\Omega_\Sigma(\theta^\circ))$．

对于图1所示的控制系统，由文[2]，[9]不难看出，关于调节器问题有下面结果．

引理2 对固定θ，若$P(s,\theta)$，$R(s,\theta)$左互质，那么1) 系统$G_p(s,\theta) = P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta)$存在调节器的充分必要条件为$R(s,\theta)$和$N(s)$外斜互质；2) 若$R(s,\theta)$，$N(s)$外斜互质，则控制器$G_C(s) = Q^{-1}(s)H(s)$是调节器的充分必要条件为a) $G_C(s) = Q^{-1}(s)H(s)$使得闭环系统内部稳定；b) $Q(s) = (\widetilde{N}(s,\theta))_l$，即存在$\widetilde{Q}(s,\theta) \in R^{m\times m}[s]$，使

得$Q(s)=\widetilde{Q}(s,\theta)\widetilde{N}(s,\theta)$。

本节关于 Robust 调节器问题的主要结果如下。

定理 3　控制器 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 为 Robust 调节器的充分必要条件为

1)　在 $\theta=\theta^{\circ}$处，$G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 使得闭环系统内部稳定，且满足非退化条件，即闭环系统的阶数$=\partial P(s,\theta^{\circ})+\partial Q(s)$；

2)　$Q(s)\in(N_m(s))_l$，即存在 $\widetilde{Q}(s)\in R^{m\times m}[s]$，使得 $Q(s)=\widetilde{Q}(s)N_m(s)$。

证　必要性　若 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 是在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处的一个 Robust 调节器，则显然定理中条件 1)是必要的[5],[6]。由于 $G_C(s)$ 是一个 Robust 调节器，那么存在一个邻域$\Omega_\Sigma(\theta^{\circ})\subset\Omega(\theta^{\circ})$，使得当 $\theta\in\Omega(\theta^{\circ})$时，$G_C(s)$ 仍是一个调节器。根据引理 2，$Q(s)$ 必须是$\widetilde{N}(s,\theta)$的左倍式，因而 $Q(s)$必须是 $\{\widetilde{N}(s,\theta),\ \theta\in\Omega_\Sigma(\theta^{\circ})\}$ 的左公倍式。故必有 $Q(s)\in(N_m(s))_l$。

充分性　对于控制器 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 假设定理中条件 1)，2）成立。由于系统在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处闭环稳定，且满足非退化条件，而装置（1.1）在 $\Omega(\theta^{\circ})$ 内，其阶数保持不变，那么存在 θ° 的一个邻域，不失一般性可假定为 $\Omega(\theta^{\circ})$，当 $\theta\in\Omega(\theta^{\circ})$ 时，闭环系统仍内部稳定[5],[8]。又由于 $Q(s)\in(N_m(s))_l$，对任一 $\theta\in\Omega(\theta^{\circ})$，$N_m(s)$ 是 $\widetilde{N}(s,\theta)$的左公倍式，故 $Q(s)\in(\widetilde{N}(s,\theta))_l$。由引理 2 可知，当 $\theta\in\Omega(\theta^{\circ})$ 时，$G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 是装置（1.1）的一个调节器，因而也就是在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处的一个 Robust 调节器。

定理 4　装置 $G_p(s,\theta)=P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta)$存在在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处的 Robust 调节器的一个充分必要条件为 $R(s,\theta^{\circ})$ 与 $N_m(s)$ 右互质，即对于 $N_m(s)$ 的任一特征根 λ 都有

$$\begin{bmatrix} R(\lambda,\theta^{\circ}) \\ N_m(\lambda) \end{bmatrix}\text{的秩}=m. \tag{3.1}$$

证　必要性　假设在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处，存在 Robust 调节器 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$，根据定理 3 的必要性，可知 $Q(s)=\widetilde{Q}(s)N_m(s)$，$\widetilde{Q}(s)\in R^{p\times p}[s]$。若 $R(s,\theta^{\circ})$，$N_m(s)$不右互质，即 $R(s,\theta^{\circ})N_m^{-1}(s)$ 有零极相消，而$N_m^{-1}(s)$ 的极点皆属于 C^+，故闭环系统的内部不可能稳定，因而与 Robust 调节器矛盾，故定理 4 的必要性得证。

充分性　若条件（3.1）成立，那么 $R(s,\theta^{\circ})$ 与 $N_m(s)$ 右互质，由此可知系统 $P^{-1}(s,\theta^{\circ})R(s,\theta^{\circ})N_m^{-1}(s)$ 是能控能观的，那么针对这系统可构造控制器 $\widetilde{G}_C(s)=\widetilde{G}^{-1}(s)H(s)$，使得闭环系统内部稳定且满足非退化条件。这样控制器 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$，$Q(s)=\widetilde{Q}(s)N_m(s)$，满足定理 3 中条件 1)，2)，因而它是在 $\theta=\theta^{\circ}$ 处的一个Robust 调节器。

注　不难看出（3.1）中 λ 可改为 $N(s)$ 的特征根。

考虑如图 2 所示系统

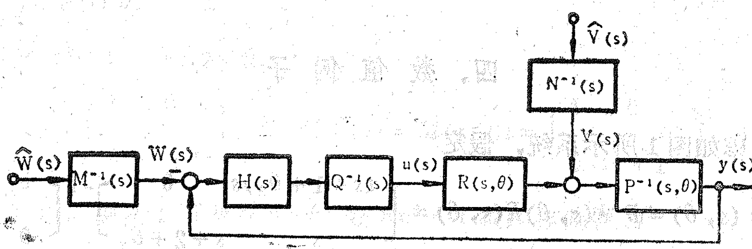

图 2

图中 $M^{-1}(s)$ 为参考输入信号模型，$M(s)\in L^{p\times p}[s]$，$M(s)$ 的特征根均属于 C^+，$W(s)$ 为参考输入信号，$\hat{W}(s)$ 为 S 的多项式向量，可看作是参考输入模型的初值，余者假定同前。

控制器 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 若满足下面条件：

1）当 $\theta=\theta^\circ$ 时，使得闭环系统内部稳定；

2）当 $\theta=\theta^\circ$ 时，达到输出调节，即对闭环系统的任意初值（包括扰动模型和参考输入模型的初值），系统偏差均有 $\lim\limits_{t\to\infty} e(t)=\lim\limits_{t\to\infty}(y(t)-W(t))=0$；

3）存在 θ° 的一个邻域 $\Omega(\theta^\circ)$，使得当 $\theta\in\Omega(\theta^\circ)$ 时，1），2）仍成立，即闭环系统仍内部稳定，并达到输出调节。

则称 $G_C(s)=Q^{-1}(s)H(s)$ 为在 $\theta=\theta^\circ$ 处的一个 Robust 控制器，当 $v\equiv 0$ 时，则称为在 $\theta=\theta^\circ$ 处的一个 Robust 跟踪控制器。显见，若 $W\equiv 0$ 时，即为前面研究过的 Robust调节器。

Robust 控制器问题可以化为图1所示R的obust 调节器问题来处理。

容易看出，图 2 等效于图 3。

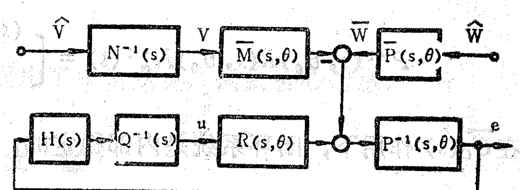

图 3

〔注：图中 $\hat{V}$ 应为 $\hat{W}$，V应为 $\overline{W}$，$\overline{W}$ 应为V，$\hat{W}$ 应为 $\hat{V}$，$N^{-1}(s)$ 应为 $\overline{P}(s,\theta)$，$\overline{P}(s,\theta)$ 应为 $N^{-1}(s)$〕

图中 $\overline{M}(s,\theta)$，$\overline{P}(s,\theta)$ 满足下面条件

$$\overline{M}^{-1}(s,\theta)\overline{P}(s,\theta)=P(s,\theta)M^{-1}(s), \tag{3.2}$$

且 $\overline{M}(s,\theta)$，$\overline{P}(s,\theta)$，$\theta\in\Omega(\theta^\circ)$，左互质。如果令 $L(s)$ 为 $N(s)$，$\overline{M}(s,\theta)$，$\theta\in\Omega(\theta^\circ)$ 的最小左公倍式（由定理1及（3.2）不难看出这最小左公倍式是存在的），那么图 3 所示系统可化为图 4 所示系统来处理，即可当作图 1 所示系统来处理，只需将 $N(s)$ 改为 $L(s)$。这样，图 2 所示的 Robust 控制问题可化为图 1 所示的 Robust 调节器问题来处理。

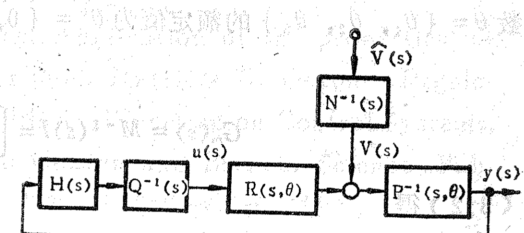

图 4

〔注：图中 $N^{-1}(s)$ 应为 $L^{-1}(s)$〕

四、数值例子

例1　考虑如图1所示系统，假定

$$G_p=(s,\theta)=P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta)=\begin{bmatrix}(s+1+\theta_2)s & 0\\ s & s+2+\theta_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+\theta_1\end{bmatrix},$$

$$G_d(s)=N^{-1}(s)I=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},$$

其中　$\theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 在 $\theta^\circ=\{0,0,0\}$ 处附近扰动．显然，当 $\theta_1\neq-1$ 时，$R(s,\theta)$ 与 $N(s)$ 外斜互质．由于

$$N(s)R(s,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+\theta_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1+\theta_1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}\quad(\theta_1\neq-1),$$

由此可知$\widetilde{N}(s,\theta)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}$，故 $N_m(s)=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}$．按照熟知方法，可设计控制器$\overline{G_C}(s)=\overline{Q}^{-1}(s)H(s)$ 使得系统

$$P^{-1}(s,\theta_0)R(s,\theta_0)N_m^{-1}(s)=\begin{bmatrix}(s+1)s & 0\\ s & s+2\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}^{-1}$$

在$\overline{G_C}(s)$ 作用下，闭环系统是内部稳定的，并满足非退化条件．那么 $G_C(s)=N_m^{-1}(s)\overline{Q}^{-1}(s)H(s)$ 即为原装置 $G_p(s)$ 的一个在 $\theta=\theta^\circ$ 处的 Robust 调节器．不难看出，在本例中在 $\theta=\theta^\circ$ 处的 Robust 调节器与调节器是一致的，但对于一般情形来说，这不一定真确．

例2　考虑如图2所示系统，装置为

$$G_p=(s,\theta)=P^{-1}(s,\theta)R(s,\theta)=\begin{bmatrix}s(s+1+\theta_2) & 0\\ s & s+2+\theta_3\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 1+\theta_1\end{bmatrix}.$$

参数 $\theta=\{\theta_1,\theta_2,\theta_3\}$ 的额定值为 $\theta^\circ=\{0,0,0\}$．扰动信号 $v\equiv0$，参考输入模型为

$$G_m(s)=M^{-1}(s)I=\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}.$$

由（3.2）得

$$P(s,\theta)M^{-1}(s)=\begin{bmatrix}s(s+1+\theta_2) & 0\\ s & s+2+\theta_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s & 0\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & s^2+1\end{bmatrix}^{-1}.$$

$$\cdot\begin{bmatrix} s+1+\theta_2 & 0 \\ s^2+1 & s+2+\theta_3 \end{bmatrix}.$$

由此可知$\overline{M}(s,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{bmatrix}$，因而$L(s)=\overline{M}(s,\theta)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{bmatrix}$。这样，整个问题化为例1的问题。由例1可得在$\theta=\theta^\circ$处Robust跟踪控制器为

$$G_C(s)=N_m^{-1}(s)\overline{Q}^{-1}(s)H(s)=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1}\overline{Q}^{-1}(s)H(s),$$

其中 $\overline{Q}(s)$，$H(s)$ 选择得使闭环系统内部稳定，并满足非退化条件。

值得注意的是，参考输入模型

$$G_m(s)=M^{-1}(s)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & s^2+1 \end{bmatrix}^{-1} \text{中} \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

这部分模型不包含在跟踪控制器$G_C(s)$中，而是包含在装置$G_p(s)$中，即$P^{-1}(s,\theta)=\begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} s+1+\theta_2 & 0 \\ 1 & s+2+\theta_3 \end{bmatrix}^{-1}$中包含了这部分模型。

同时，也不难看出，对于本例题在$\theta=\theta^\circ$处的Robust跟踪控制器与跟踪控制器是一致的，但对于一般情形，这不一定真确。

致谢 张朝池同志审阅了本文初稿，并提出了宝贵意见，谨致衷心谢意。

参 考 文 献

〔1〕 I. Gohberg, M. A. Kaashoek, L. Lerer and L. Rodman, Common Multiples and Common Divisors of Matrix Polynomials, I. Spectral Method, Indiana J. Math., 30,(1981),321—356.

〔2〕 W. A. Wolovich and P. Ferreira, Output Regulation and Tracking in Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automatic Control AC-**24**, (1979), 460—465.

〔3〕 Tu Fengsheng and Qi Yinfeng, Application of the properties of External Skew Prime Polynomial Matrices to Output Regulation, In: Proceedings of the Bilateral Meeting on Control Systems, Science Press, Beijing, China. Cordon and Breach, Science Publishers. INC.(1982)(中美控制论双边学术会议论文集)。

〔4〕 N. 贾柯勃逊，抽象代数学，卷1，科学出版社(1980)，73。

〔5〕 钱唯德、王恩平、王朝珠，无静差和结构无静差系统的结构特征，自

动化学报，8，1（1982）。
〔6〕 王朝珠、王恩平，多变量线性反馈系统的非退化条件和物理能实现，中国科学（A辑），9，（1982）848—856。
〔7〕 涂奉生、齐寅峰，多项式矩阵的外斜互质性与多变量系统的输出调节问题，数学年刊，4A(4)，（1983），516—531。
〔8〕 涂奉生，线性控制系统闭环稳定的结构稳定性，自动化学报，8，3(1981)。
〔9〕 王朝珠、王恩平，一类无静差和结构无静差系统的结构性质，应用数学学报，6（1983）。

ROBUST CONTROL FOR LINEAR MULTIVARIABLE SYSTEMS WITH PARAMETERS

Tu Fengsheng, Qi Yinfeng

(Nankai University, Tianjin)

Abstract

In this paper the concept and properties of the least common left multiple of polynomial matrices have been examined. The robust control problem of linear multivariable systems with parameters has been solved by using this concept and approach.