第2卷 第2期
1985年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 2, No. 2
April, 1985

一类线性时变大系统的运动稳定性

辜建德
（厦门大学）

摘　要

本文运用向量李雅普诺夫函数和比较原理的方法研究一类线性时变大系统的运动稳定性同时扩大了文[1]所研究的n阶常系数线性方程组和文[2]所研究的一类时变大系统的参数稳定性区域。

考虑时变大系统

$$\frac{dx}{dt}=A(t)x, \tag{1}$$

其中 $A(t)$是$[t_0,+\infty)$上连续的$n\times n$矩阵函数，$x\in R^n$，
设系统（1）可分解为r个子系统

$$\frac{dx_k}{dt}=A_{kk}(t)x_k+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}A_{ki}(t)x_i,\quad k=1,2,\cdots,r。 \tag{2}$$

其中 $A_{ki}(t)$为$[t_0,+\infty)$上连续的$n_k\times n_i$矩阵函数，当$k\neq i$时$A_{ki}(t)$称为$A(t)$的关联项。$x_k=\mathrm{col}\left(x_1^{(k)},\cdots,x_{n_k}^{(k)}\right)$，$\sum\limits_{k=1}^{r}n_k=n$。

定理 1　设系统（1）可分解为（2），其中
$A_{kk}(t)=R_{kk}+B_{kk}(t)$，若$R_{kk}$为稳定的$n_k\times n_k$常数矩阵，$B_{kk}(t)$为$[t_0,+\infty)$上连续的$n_k\times n_k$矩阵函数且满足

$$\|B_{kk}(t)\|_F\leq\frac{1-\delta_k}{2\lambda_{n_k}^{(k)}}, \tag{3}$$

其中 $0<\delta_k\leq1$，为常数，$\lambda_{n_k}^{(k)}$为满足矩阵方程

$$c_kR_{kk}+R_{kk}^Tc_k=-E \tag{4}$$

本文于1983年6月收到，1984年5月8日收到修改稿。

的矩阵 c_k 的最大特征值，$\|B_{kk}(t)\|_F$ 是矩阵 $B_{kk}(t)$ 的Frobenius 模(定义见文〔3〕)。如果 $A(t)$ 的关联项 $A_{ki}(t)$ $(k\neq i)$ 在〔$t_0,+\infty$)上连续有界，即存在常数 $B_{ij}>0$ 使 $|a_{ij}(t)|\leq B_{ij}$，　　(5)

其中 $a_{ij}(t)$ 是 $A(t)$ 中除去 $A_{kk}(t)$ 以外的元素，$k=1,2,\cdots,r$。且知矩阵

$$D=\begin{bmatrix} \dfrac{-\delta_1}{2\lambda_{n_1}^{(1)}} & \dfrac{L_{12}}{\delta_1} & \cdots\dfrac{L_{1r}}{\delta_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{L_{r1}}{\delta_r} & \dfrac{L_{r2}}{\delta_r}\cdots & \dfrac{-\delta_r}{2\lambda_{n_r}^{(r)}} \end{bmatrix}\text{是稳定的，}$$

其中

$$L_{ki}=\frac{2(n-n_k)\left[\lambda_{n_k}^{(k)}\right]^2\sum\limits_{p=1}^{n_k}\sum\limits_{q=1}^{n_i}B^2_{\sum\limits_{l=1}^{k-1}n_l+p,\ \sum\limits_{m=1}^{i-1}n_m+q}}{n_i\lambda_1^{(i)}}\left(k\neq i,\text{约定}\sum_{l=1}^{0}n_l=0\right)$$

$\lambda_1^{(k)}$ 是矩阵 c_k 的最小特征值。则可知系统(1)的零解是渐近稳定的。

证　因矩阵 R_{kk} 是稳定的，故必存在唯一定正矩阵 c_k 满足(4)，作定正的二次型 $V_k(x_k)=x_k^Tc_kx_k$ 易知　$\lambda_1^{(k)}\|x_k\|_2^2\leq V_k(x_k)\leq\lambda_{n_k}^{(k)}\|x_k\|_2^2$，　　(6)

$$\text{故有}\left.\frac{dV_k}{dt}\right|_{(2)}=-\|x_k\|_2^2+2x_k^T\left[c_kB_{kk}(t)\right]x_k+2\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}x_k^T\left[c_kA_{ki}(t)\right]x_i。\qquad(7)$$

由文〔3〕可知 $\|c_k\|_2=\lambda_{n_k}^{(k)}$ 且有 $\|c_kB_{kk}(t)x_k\|_2\leq\|c_k\|_2\|B_{kk}(t)x_k\|_2$，而由文〔3〕引理2可知 $\|B_{kk}(t)x_k\|_2\leq\|B_{kk}(t)\|_F\|x_k\|_2$。

$$\text{所以易知}\left.\frac{dV_k}{dt}\right|_{(2)}\leq-\|x_k\|_2^2+2\lambda_{n_k}^{(k)}\|B_{kk}(t)\|_F\|x_k\|_2^2+2\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}\lambda_{n_k}^{(k)}\|A_{ki}(t)\|_F\|x_i\|_2\|x_k\|_2。$$

由(3)、(5)、(6)可知

$$\left.\frac{dV_k}{dt}\right|_{(2)}\leq\sum_{\substack{\lambda=1\\i\neq k}}^{r}\left(-\frac{n_i\delta_k}{n-n_k}\|x_k\|_2^2+\sqrt{\frac{2n_i\lambda_1^{(i)}L_{ki}}{n-n_k}}\|x_i\|_2\|x_k\|_2\right),$$

故由文〔3〕引理1可知

$$\left.\frac{dV_k}{dt}\right|_{(2)}\leq\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}\left[-\frac{n_i\delta_k}{2(n-n_k)}\|x_k\|_2^2+\frac{\lambda_1^{(i)}L_{ki}}{\delta_k}\|x_i\|_2^2\right]$$

$$\leq-\frac{\delta_k}{2\lambda_{n_k}^{(k)}}V_k+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}\frac{L_{ki}}{\delta_k}V_i,$$

故有 $\left.\frac{dV}{dt}\right|_{(2)}\leq DV$。其中 $V(x)=(V_1(x_1),\ \cdots,\ V_r(x_r))^T\geq 0$。

考虑比较系统 $\frac{dV^*}{dt}=DV^*$, （8）

其中 $V^*=(V_1^*(x_1),\ \cdots,\ V_r^*(x_r))^T$. 因为矩阵 D 是稳定的，故知系统（8）的零解是渐近稳定的，即有 $\lim\limits_{t\to+\infty}V_k^*=0$，$k=1,\ 2\cdots,\ r$. 而由文〔1〕的引理3.2可知 $V_k\leq V_k^*$，故有 $\lim\limits_{t\to+\infty}V_k=0$，由 V_k 的定正性可知 $\lim\limits_{t\to+\infty}x_k=0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$. 所以线性系统（1）的零解是渐近稳定的．且参数 B_{ij} 的稳定性区域由条件 C，即 D 的特征方程系数所满足的 Routh-Hurwitz 条件给出．定理1证毕．

推　论　若定理1中 $B_{kk}(t)\equiv 0$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ r$. 而 $A_{ij}(t)\cdots(i\neq j)$ 中的元素 a_{kl} 均为常数，则可得到文〔1〕中关于 n 阶常系数线性系统 $\frac{dx}{dt}=Ax$ （9）

稳定性的结论，且扩大了文〔1〕中所给出的系统（9）的参数稳定性区域．事实上，由文〔1〕可知系统（9）的参数稳定性区域由条件 C^*，即由矩阵 D^* 的特征方程系数所满足的 Routh-Hurwitz 条件给出，其中

$$D^*=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2A_2^{(1)}} & \frac{L_{12}^*}{A_1^{(2)}} & \cdots & \frac{L_{1r}^*}{A_1^{(r)}}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{L_{r1}^*}{A_1^{(1)}} & \frac{L_{r2}^*}{A_1^{(2)}} & \cdots & \frac{-1}{2A_2^{(r)}}\end{pmatrix},$$

$$L_{ki}^{*}=\frac{n-n_k}{2}\max_{P=1,2,\cdots,n_i}\left\{\sum_{q=1}^{n_k}(B_{pq}^{(i)})^2\right\}(k\neq i)$$

$$B_{pq}^{(i)}=\sum_{j=1}^{n_k}v_{jq}^{(k)}\;a_{\sum\limits_{l=1}^{k-1}n_l+j,\ \sum\limits_{m=1}^{i-1}n_m+p},\qquad\left(约定\sum_{l=1}^{0}n_l=0\right)$$

$V_k(x_1^{(k)},\cdots,x_{n_k}^{(k)})=\frac{1}{2}\sum\limits_{i,j=1}^{n_k}v_{ij}^{(k)}\;x_i^{(k)}\;x_j^{(k)}$ 是定正二次型 $k=1,2,\cdots,r$.

且有 $A_1^{(k)}$、$A_2^{(k)}$ 为正常数使 $A_1^{(k)}\|x_k\|_2^2\leq V_k(x_k)\leq A_2^{(k)}\|x_k\|_2^2$.

而由本文定理1的证明可知有 $\lambda_1^{(k)}=A_1^{(k)}$，$\lambda_{n_k}^{(k)}=A_2^{(k)}$，且知系统（9）的参数稳定性区域由条件 C 即矩阵 D 的特征方程系数所满足的 Routh－Hurwitz 条件所给出．其中

$$D=\begin{pmatrix}-\dfrac{1}{2A_2^{(1)}} & \dfrac{L_{12}}{A_1^{(2)}} & \cdots & \dfrac{L_{1r}}{A_1^{(r)}}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ \dfrac{L_{r1}}{A_1^{(1)}} & \dfrac{L_{r2}}{A_1^{(2)}} & \cdots & -\dfrac{1}{2A_2^{(r)}}\end{pmatrix}\quad L_{ki}=\frac{n-n_k}{2n_i}\sum_{p=1}^{n_i}\sum_{q=1}^{n_k}(B_{pq}^{(i)})^2\ (k\neq i).$$

因为 $L_{ki}\leq L_{ki}^{*}$，故容易推知条件 C 所给出的参数的稳定性区域比由条件 C^{*} 所给出的参数的稳定性区域要大．

定理 2　设系统（1）可分解为（2），其中 $A_{kk}(t)=P_{kk}(t)+B_{kk}(t)$，$P_{kk}(t)$ 和 $B_{kk}(t)$ 均为 $[t_0,+\infty)$ 上连续的 $n_k\times n_k$ 矩阵函数，若系统 $\dot{x}_k=p_{kk}(t)x_k$ 是可化的（定义见文[3]），且在 ЛЯПУНОВ 变换 $x_k=S_k(t)y_k$ 下化为 $\dot{y}_k=R_{kk}y_k$，其中 R_{kk} 是 $n_k\times n_k$ 常数矩阵．如果 R_{kk} 是稳定的，且知

$$\|B_{kk}(t)\|_F\leq\frac{1-\delta_k}{2M_k^2\ \lambda_{n_k}^{(k)}},\tag{10}$$

其中 $0<\delta_k\leq1$，为常数，$M_k>0$，$\|S_k(t)\|\leq M_k$，$\|S_k^{-1}(t)\|\leq M_k$，$\lambda_{n_k}^{(k)}$ 为满足（4）的矩阵 c_k 的最大特征值，$k=1,2,\cdots,r$．$\sum\limits_{k=1}^{r}n_k=n$．如果 $A(t)$ 中除去 $A_{kk}(t)$ 以外的所

有元素 $a_{ij}(t)$ 都满足 $|a_{ij}(t)|\leq a$，$k=1,2,\cdots,r_0$ 且知矩阵

$$D^*=\begin{pmatrix} -\dfrac{\delta_1}{2\lambda_{n_1}^{(1)}} & \dfrac{L_{12}^*}{\delta_1} \cdots \dfrac{L_{1r}^*}{\delta_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{L_{r1}^*}{\delta_r} & \dfrac{L_{r2}^*}{\delta_r} \cdots \dfrac{-\delta_r}{2\lambda_{n_r}^{(r)}} \end{pmatrix}$$ 是稳定的，其中

$$L_{ki}^*=\frac{2(n-n_k)n_kM_k^2M_i^2a^2[\lambda_{n_k}^{(k)}]^2}{\lambda_1^{(i)}}\quad(k\neq i)$$

$\lambda_1^{(k)}$ 是矩阵 c_k 的最小特征值，则可知系统（1）的零解是渐近稳定的．

证　作变换 $x_k=S_k(t)y_k$，则由 ЛЯПУНОВ 变换的性质和定理 1 可知定理 2 是成立的。

考虑线性系统

$$\frac{dx_k}{dt}=(A_{kk}(t)+B_{kk}(t))x_k+\sum_{\substack{i=1\\i\neq k}}^{r}A_{ki}(t)x_i,\quad k=1,2\cdots,r. \tag{11}$$

其中 $x_k\in R^{n_k}$，$A_{ki}(t)$，$B_{kk}(t)$ 为 $[t_0^+,\infty)$ 上连续的 $n_k\times n_i$ 和 $n_k\times n_k$ 矩阵函数，$\sum_{k=1}^{r}n_k=n$.

定理 3　设系统（1）可分解为（11），其中对称矩阵 $A_{kk}^H(t)=\dfrac{1}{2}(A_{kk}(t)+A_{kk}^T(t))$ 的所有特征值 $\lambda_i^{(k)}$ 满足 $\lambda_i^{(k)}\leq-\delta_k<0$，$i=1,2,\cdots,n_k$，且 $A(t)$ 中除去 $A_{kk}(t)$，$B_{kk}(t)$ 外的所有元素 $a_{ij}(t)$ 满足 $|a_{ij}(t)|\leq B_{ij}$，如果 $\|B_{kk}(t)\|_F\leq\delta_k-\delta_k^*$，其中 $0<\delta_k^*\leq\delta_k$ 为常数，$k=1,2,\cdots,r$．且知矩阵

$$D^*=\begin{pmatrix} -\delta_1^* & \dfrac{L_{12}^*}{\delta_1^*} \cdots \dfrac{L_{1r}^*}{\delta_1^*} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \dfrac{L_{r1}^*}{\delta_r^*} & \dfrac{L_{r2}^*}{-\delta_r^*} \cdots -\delta_r^* \end{pmatrix}$$ 是稳定的，其中

$$L_{ki}^{*}=\frac{(n-n_k)\sum\limits_{p=1}^{n_k}\sum\limits_{q=1}^{n_i}B^{2}_{\sum\limits_{l=1}^{k-1}n_l+p,\ \sum\limits_{m=1}^{i-1}n_m+q}}{n_i}\quad\left(k\neq i,\ 约定\sum_{l=1}^{0}n_l=0\right)$$

则可知系统（1）的零解是渐近稳定的.

证　作 $V_k=x_k^T x_k$，由文〔4〕可知 $x_k^T\ A_{kk}^H(t)x_k\leq-\delta_k\|x_k\|_2^2$，则与定理1的证明类似易知定理3是成立的.

推　论　若定理3中$B_{kk}(t)\equiv 0, k=1,2,\cdots,r$. 则可得文〔2〕的定理，且扩大了文〔2〕中所给出的系统（1）的参数稳定性区域.

参　考　文　献

〔1〕 秦元勋、王慕秋、王联，运动稳定性理论与应用，科学出版社(1981)，173—190.

〔2〕 徐道义，一类时变系统的稳定性，科学通报，3（1983），190.

〔3〕 辜建德，一类非线性非自治大系统的运动稳定性，厦门大学学报（自然科学版），22（1983），448.

〔4〕 Michel, A.N., Miller, R. K., Qualitative Analysis of large Scale Dynamical Systems, Acad. Press New York San Francisco Landon （1977），27—28.

ON THE STABILITY OF THE MOTION OF A CLASS OF LINEAR LARGE-SCALE SYSTEMS WITH TIME-VARYING COEFFICIENTS

Gu Jiande

（Xiamen University）

Abstract

In this paper, we study the stability of the motion of a class of linear large-scale systems with time-varying coefficients by using Vector Lyapunov functions and the comparison principle.

In this paper, some new criteria of stability of the motion of a class of linear large-scale systems with time-varying coefficients are obtained. The result in papers〔1〕,〔2〕is improved and the parametric domain of stability is enlarged.