第2卷 第2期
1985年4月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol. 2, No.2
April, 1985

一类非线性系统的能控性条件

陈云烽
（中山大学）

摘要

本文讨论非线性系统 $\dot{x}=Ax+Bu+g(x,u)$ 的完全能控性条件，并举例说明.

考虑非线性系统

$$\dot{x}=Ax+Bu+g(x,u),\qquad t\geq 0;\tag{1}$$

其中，$x(t)$ 是 n 维状态变量，$u(t)$ 是 r 维控制变量，A，B 分别是 $n\times n$，$n\times r$ 实常数矩阵；$g(x,u)$ 是 $(x,u)\in R_{n+r}$ 上的连续 n 维向量实函数，且 $g(0,0)=0$，故 $x(t)=0$ 是系统（1）的平衡点；其次，若存在常数 K，使

$$\|g(x,u)-g(\tilde{x},u)\|_{R_n}\leq K\|x-\tilde{x}\|_{R_n},$$

$$\forall x,\ \tilde{x}\in R_n,\ u\in R_r;$$

那么，对任给的 $u(\cdot)\in L_2^r[0,t_1]$ 和 $x_0\in R_n$，方程（1）在区间 $[0,t_1]$ 上有唯一解 $x(\cdot)$，使 $x(0)=x_0$，且方程（1）几乎处处得到满足.

假设系统（1）的线性部分

$$\dot{x}=Ax+Bu,\tag{2}$$

在 Kalman 意义上是完全能控的，则对任意 $t_1>0$，

$$W(t_1)\triangleq\int_0^{t_1}e^{-As}BB^Te^{-A^Ts}ds\tag{3}$$

是非奇异阵[1]，故逆阵 $W^{-1}(t_1)$ 存在.

对于给定的终止时刻 $t_1>0$ 和 $u(\cdot)\in L_2^r[0,t_1]$，系统(1)满足初始条件 $x(0)=x_0$ 的解等价于如下积分方程的解：

$$x(t)=e^{At}[x_0+\int_0^t e^{-As}(Bu(s)+g(x(s),u(s))ds],\qquad 0\leq t\leq t_1,\tag{4}$$

本文于1983年9月9日收到。1984年1月24日收到修改稿。

记 $G(t) \triangleq -B^T e^{-A^T t} W^{-1}(t_1), \quad 0 \le t \le t_1,$ （5）

取 $u(t) = G(t)(x_0 + \int_0^{t_1} e^{-As} g(x(s), u(s)) ds),$ （6）

代入（4）式，得

$$x(t) = \int_0^{t_1} Q(t,s) g(x(s), u(s)) ds + \zeta(t), \tag{7}$$

式中，

$$\zeta(t) = e^{At}(I - W(t)W^{-1}(t_1))x_0, \tag{8}$$

$$Q(t,s) = \begin{cases} e^{At}(I - W(t)W^{-1}(t_1))e^{-As}, & 0 \le s < t \le t_1; \\ -e^{At}W(t)W^{-1}(t_1)e^{-As}, & 0 \le t \le s \le t_1. \end{cases} \tag{9}$$

可见有 $x(t_1) = 0$；于是，如果对任意 $x_0 \in R_n$，关于 u，x 的积分方程组（6），（7）都有唯一解存在，则意味着：对任意初态 $x(0) \in R_n$，都存在控制 u，使系统（1）的状态由初态 $x(0)$ 转移到零终态 $x(t_1) = 0$，这时，我们称系统（1）在区间 $[0, t_1]$ 是完全能控的.

为方便起见，令

$$\eta(t) \triangleq G(t)x_0, \qquad 0 \le t \le t_1; \tag{10}$$

$$R(t,s) \triangleq G(t)e^{-As}, \qquad 0 \le t, s \le t_1; \tag{11}$$

$$K(t,s) \triangleq \begin{pmatrix} R(t,s) \\ Q(t,s) \end{pmatrix}, \qquad 0 \le t, s \le t_1; \tag{12}$$

并定义 Helbert 空间 $L_2^{r+n}[0, t_1]$ 上映射到自身的积分算子

$$T\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}(t) \triangleq \int_0^{t_1} K(t,s) g(x(s), u(s)) ds + \begin{pmatrix} \eta(t) \\ \zeta(t) \end{pmatrix}, \tag{13}$$

则方程（6），（7），可写成

$$T\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ x(t) \end{pmatrix}. \tag{14}$$

所以，只要算子 T 有唯一的不动点，则方程（6），（7）就有唯一解. 这里，虽然是在 L_2 空间中讨论不动点，但由于方程（7）也即方程（4）的形式，决定了解 $x(t)$ 必然是连续函数，且几乎处处可微满足方程（1）. 于是，若记

$$M(t_1) = \max_{0 \le t, s \le t_1} [\lambda_{\max}(K^T(t,s)K(t,s))]^{1/2}, \tag{15}$$

$$\mu = \inf_{t_1 > 0} t_1 M(t_1), \tag{16}$$

则有如下定理：

定　理　如果线性系统（2）完全能控，且存在正数 $\varepsilon > 0$，使n维向量函数 $g(x, u)$ 满足

$$\| g(x,u)-g(\tilde{x},\tilde{u})\|_{R_n} \leq \frac{1}{\mu+\varepsilon}\left\| \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \right\|_{R_{r+n}},$$

$$\forall \begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{x} \end{pmatrix} \in R_{r+n}, \tag{17}$$

则存在 $t_1>0$，使非线性系统（1）在区间 $[0,t_1]$ 上完全能控．

证　根据压缩映射原理[2]，只须证明存在 $t_1>0$，使得算子 T 是压缩算子．为此作范数估计如下：记

$$\Delta_g(s) \triangleq g(x(s),u(s)) - g(\tilde{x}(s),\ \tilde{u}(s)),$$

则有

$$\left\| T\begin{pmatrix} u \\ x \end{pmatrix}(\cdot) - T\begin{pmatrix} \tilde{u} \\ \tilde{x} \end{pmatrix}(\cdot) \right\|_{L_2}^2$$

$$= \int_0^{t_1}\left(\int_0^{t_1} K(t,s)\Delta g(s)\,ds\right)^T\left(\int_0^{t_1} K(t,s)\Delta g(s)\,ds\right)dt$$

$$\leq \int_2^{t_1}\left(\int_2^{t_1} \Delta_g^T(s)K^T(t,s)K(t,s)\Delta_g(s)\,ds \int_0^{t_1} ds\right)dt$$

$$\leq t_1^2 M^2(t_1)\int_0^{t_1} \Delta_g^T(s)\Delta_g(s)\,ds$$

$$\leqslant \left(\frac{t_1 M(t_1)}{\mu+\varepsilon}\right)^2 \int_0^{t_1}\left\| \begin{pmatrix} u(s) \\ x(s) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{u}(s) \\ \tilde{x}(s) \end{pmatrix} \right\|_{R_{r+n}}^2 ds,$$

$$= \left(\frac{t_1 M(t_1)}{\mu+\varepsilon}\right)^2 \left\| \begin{pmatrix} u(\cdot) \\ x(\cdot) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \tilde{u}(\cdot) \\ \tilde{x}(\cdot) \end{pmatrix} \right\|_{L_2}^2,$$

由于 $\varepsilon>0$，根据 μ 的定义式（16），必存在 $t_1>0$，使 $t_1M(t_1)<\mu+\varepsilon$，即

$$\frac{t_1 M(t_1)}{\mu+\varepsilon}<1,$$

故 T 是压缩算子，定理得证．

注 1　当 $g(x,u)$ 不含 x，退化为 $g_1(x)$ 时，将条件（17）改为

$$\| g_1(x)-g_1(\tilde{x})\|_{R_n} \leqslant \frac{1}{\mu_1+\varepsilon}\|x-\tilde{x}\|_{R_n},\qquad \forall x,\tilde{x}\in R_n, \tag{17$'$}$$

定理仍成立，式中，

$$\mu_1 = \inf_{t_1>0}\{t_1 \max_{0\leqslant t,s\leqslant t_1}[\lambda_{\max}(Q^T(t,s)Q(t,s))]^{1/2}\}.$$

注 2　当 $g(x,u)$ 不含 x，退化为 $g_2(u)$ 时，将条件（17）改为

$$\|g_2(u)-g_2(\tilde{u})\|_{R_n}\leqslant\frac{1}{\mu_2+\varepsilon}\|u-\tilde{u}\|_{R_r},\quad \forall u,\tilde{u}\in R_r,\tag{17}''$$

定理仍成立，式中，

$$\mu_2=\inf_{t_1>0}\{t_1\max_{0\leqslant t,s\leqslant t_1}[\lambda_{\max}(R^T(t,s)R(t,s))]^{1/2}\}.$$

注3 对任意的 $p\times q$ 阶实矩阵 $H=(h_{ij})$，可证明[3]

$$[\lambda_{\max}(H^TH)]^{\frac{1}{2}}\leqslant\min\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant p}\sum_{j=1}^{q}|h_{ij}|,\ \max_{1\leqslant j\leqslant q}\sum_{i=1}^{p}|h_{ij}|\right\},\tag{18}$$

借助此式估计 μ 值，可避免特征值的计算。

例 讨论系统

$$\begin{cases}\dot{x}_1=x_2+kl_n\sqrt{1+x_1^2},\\ \dot{x}_2=u\end{cases}\tag{19}$$

的能控性。

相应的线性部分是完全能控的，而非线性项不含 u，可利用注记1讨论。

按（9）式计算 $Q(t,s)$，各元 $q_{ij}(t,s)$ 的值为：

当 $0\leqslant s<t\leqslant t_1$ 时，有

$$q_{11}(t,s)=1-3\left(\frac{t}{t_1}\right)^2+2\left(\frac{t}{t_1}\right)^3,$$

$$q_{12}(t,s)=t\left[1-2\left(\frac{t}{t_1}\right)+\left(\frac{t}{t_1}\right)^2\right]-s\left[1-3\left(\frac{t}{t_1}\right)^2+2\left(\frac{t}{t_1}\right)^3\right],$$

$$q_{21}(t,s)=\frac{6}{t_1}\left(\frac{t}{t_1}\right)\left(1-\frac{t}{t_1}\right),$$

$$q_{22}(t,s)=\left[1-4\left(\frac{t}{t_1}\right)+3\left(\frac{t}{t_1}\right)^2\right]+6\frac{ts}{t_1^2}\left(1-\frac{t}{t_1}\right);$$

当 $0\leqslant t\leqslant s\leqslant t_1$ 时，有

$$q_{11}(t,s)=-\left(\frac{t}{t_1}\right)^2\left(3-\frac{t}{t_1}\right),$$

$$q_{12}(t,s)=-\frac{t^2}{t_1}\left(2-\frac{t}{t_1}\right)+\frac{t^2s}{t_1^2}\left(3-2\frac{t}{t_1}\right),$$

$$q_{21}(t,s)=\frac{6t}{t_1^2}\left(1-\frac{t}{t_1}\right),$$

$$q_{22}(t,s)=-\frac{t}{t_1}\left(4-3\frac{t}{t_1}\right)+\frac{6ts}{t_1^2}\left(1-\frac{t}{t_1}\right).$$

利用估计式（18）可得 $\mu_1\leqslant\frac{3}{2}$,

于是当 $|k|<\frac{4}{3}$ 时，取 $\varepsilon=\frac{1}{|k|}-\frac{3}{4}>0$，则有 $\frac{|k|}{2}=\frac{1}{\frac{3}{2}+2\varepsilon}<\frac{1}{\mu_1+\varepsilon}$,

从而，$\forall x,\ \tilde{x}\in R_2$，有

$$\|g_1(x)-g_1(\tilde{x})\|_{R_2}=|k|\left(\ln\sqrt{1+x_1^2}-\ln\sqrt{1+\tilde{x}_1^2}\right)$$

$$\leqslant\frac{|k|}{2}\|x-\tilde{x}\|_{R_2}<\frac{1}{\mu_1+\varepsilon}\|x-\tilde{x}\|_{R_2}$$

即条件（17）′满足，故当 $|k|<\frac{4}{3}$ 时，必存在 $t_1>0$，使系统（19）在区间 $[0,t_1]$ 完全能控。

参 考 文 献

〔1〕 关肇直、陈翰馥，线性系统的能控性和能观测性，科学出版社（1975），第二章。

〔2〕 Curtain R. F. and Rritchard A. J. Functional Analysis in Modern Applied Mathematics, Academic Press, London, (1977) Chapter 1.

〔3〕 须田信英等，自动控制中的矩阵理论（中译本），科学出版社（1979）226—229。

A SUFFICIENT CONDITION FOR CONTROLLABILITY OF A CLASS OF NONLINEAR SYSTEMS

Chen Yunfeng

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper we discuss the controllability problem of a nonlinear system of the following form

$$\dot{x}=Ax+Bu+g(x,u),$$

A sufficient condition of this problem is derived. An example of application is also given.