第2卷 第2期　　控 制 理 论 与 应 用　　Vol. 2. No.2
1985年4月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　April, 1985

在频域中研究单输入、单输出线性控制系统的二次性能指标

郑 应 文

（福州大学）

摘　要

本文用频域方法研究线性系统调节的最佳性能。文中提出一组“平方性能指标”，即由误差的平方、误差与时间乘积的平方、误差导数的平方以及它们正加权组合的积分来描述系统的性能，人们可以按照不同系统的不同要求来选取其中的一个方案来进行系统设计与分析。使用 Laplace 变换的 Parseval 等式和Åström递推公式，可以使这类计算变得十分便利，更易于在计算机上实现。

线性系统的最佳调节，是长期以来人们十分关注的一个问题。近年来人们愈来愈倾向于用误差的各种函数的积分来描述系统性能[1]~[3]。设误差为$e(t)$，我们将设法使$\int_0^\infty f[e(t),t]\,dt$达到最小。对于$f[e(t),t]$的选择，有各种不同的方法，由此所获得的系统动态性能是不同的，同时计算的繁简也是不同的。

本文考虑一类品质指标，它们是由

$$S_1=\int_0^\infty e^2(t)dt \qquad (\text{ISE}),$$

$$S_2=\int_0^\infty t^2e^2(t)dt \qquad (\text{ISTSE}),$$

$$S_3=\int_0^\infty \dot{e}^2(t)dt \qquad (\text{ISDE})$$

以及它们的正加权组合所定义，我们把它们叫做平方性能指标。它的优点在于既能较好较全面地反映出系统的特性，而在数学上的处理又十分方便。

为了把时域里的误差积分与频域里的传递函数联系起来，使用 Laplace 变换的 Parseval 等式。设$f(t)$在$(0,\infty)$平方可积，它的拉氏变换为$F(s)$，如果$F(s)$在右半平面解析，那么

$$\int_0^\infty [f(t)]^2dt=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}F(s)F(-s)ds.$$

本文于 1983 年 9 月 2 日收到，1984 年 6 月 5 日收到修改稿。

如果 $f(t)$ 的拉氏变换是 $F(s)$，那么 $tf(t)$ 的拉氏变换是 $-\frac{dF}{ds}$，$\dot{f}(t)$ 的拉氏变换是 $sF(s)-f(0)$。这样，就有

$$\int_0^\infty e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} E(s)E(-s)ds,$$

$$\int_0^\infty t^2e^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} E'(u)|_{u=s}E'(u)|_{u=-s}ds,$$

$$\int_0^\infty \dot{e}^2(t)dt = \frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty} [sE(s)-e(0)][-sE(-s)-e(0)]ds.$$

于是，各种平方性能指标就可以化为等式右边的各种积分计算。在控制系统中，常设 $E(s)$ 是稳定有理式，即 $E(s)=\frac{B(s)}{A(s)}$，这里 $A(s)$、$B(s)$ 是多项式，A 的次数高于 B，且 A 的零点都在左半平面。因此，各种平方性能指标终归可以化为以下的积分计算：

$$I=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{B(s)B(-s)}{A(s)A(-s)}ds.$$

为了计算这个积分，使用 Åström 的递推方法[4]。设

$$A_k(s)=a_0^{(k)}s^k+a_1^{(k)}s^{k-1}+\cdots+a_{k-1}^{(k)}s+a_k^{(k)},$$

$$B_k(s)=b_1^{(k)}s^{k-1}+\cdots+b_{k-1}^{(k)}s+b_k^{(k)},$$

$$\widetilde{A}_k(s)=a_1^{(k)}s^{k-1}+a_3^{(k)}s^{k-3}+\cdots;$$

$$A_n(s)=A(s),\qquad B_n(s)=B(s);$$

定义 $A_{k-1}(s)=A_k(s)-\alpha_k s\widetilde{A}_k(s)$，$B_{k-1}(s)=B_k(s)-\beta_k\widetilde{A}_k(s)$，$(k=n,\ n-1,\ \cdots 1)$，其中 $\alpha_k=a_0^{(k)}\big/a_1^{(k)}$，　$\beta_k=b_1^{(k)}\big/a_1^{(k)}$。

在这些假设下，有

$$I_n=\frac{1}{2\pi j}\int_{-j\infty}^{j\infty}\frac{B_n(s)B_n(-s)}{A_n(s)A_n(-s)}ds=I_{n-1}+\frac{\beta_n^2}{2\alpha_n}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\beta_k^2\Big/\alpha_k$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{b_1^{(k)2}}{a_0^{(k)}a_1^{(k)}}.$$

现在设系统的闭环传递函数是 $F(s)$，输入的拉氏变换是 $U(s)$，则输出响应 $Y(s)$

$=U(s)F(s)$，系统的误差响应是$E(s)=U(s)-U(s)F(s)=U(s)[1-F(s)]$。再分别求出$E'(s)$、$sE(s)-e(0)$等，就能方便地算出系统的各种平方性能指标。

在计算中，$E(s)$、$E'(s)$、$sE(s)-e(0)$等必须保证它们与s的乘积在s趋于0时也趋于0。例如对于$E(s)$，应有

$$\lim_{s\to 0} sE(s)=0.$$

由终值定理，知道这时$e(t)$在$t\to\infty$时极限是0，否则误差积分将发散。

例如计算阶跃输入下的位移无静差系统，这时$U(s)=\dfrac{1}{s}$，

$$F(s)=\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+1},\quad E(s)=\frac{1}{s}-\frac{1}{s}\cdot\frac{1}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+1}$$

$$=\frac{s^{n-1}+a_1s^{n-2}+\cdots+a_{n-1}}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+1}.$$用递推公式计算ISE时，容易看到$\beta_k=\alpha_k$，所以

$$I_{ISE}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\alpha_k.$$

下面研究如何用这个方法来确定最佳系统参数。

例 1　对于位移无静差二阶系统与阶跃输入，其误差响应为

$$E(s)=\frac{s+2a}{s^2+2as+1},$$

容易算出$\alpha_1=2a$，$\alpha_2=\dfrac{1}{2a}$，故$I_{ISE}=a+\dfrac{1}{4a}$，当$a=0.5$时，I_{ISE}取得极小值1。

而$\dot{e}(t)$的拉氏变换为

$$sE(s)-e(0)=\frac{s^2+2as}{s^2+2as+1}-1=\frac{-1}{s^2+2as+1},$$

所以$I_{ISDE}=\dfrac{1}{4a}$。

ISE与ISDE的组合平方性能指标为$I_{ISE}+I_{ISDE}=a+\dfrac{1}{2a}$。

当$a=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$时，这个积分$\int_0^\infty[e^2(t)+\dot{e}^2(t)]dt$取得极小值$\sqrt{2}$。

这个方法与这两个结果可以与[4]作比较。

例 2　二阶匀速无静差系统$\dfrac{as+1}{s^2+as+1}$在斜坡输入下的误差响应是

$$E(s)=\frac{1}{s^2}-\frac{1}{s^2}\cdot\frac{as+1}{s^2+as+1}=\frac{1}{s^2+as+1},$$

它的导数是

$$E'(s)=\frac{2s-a}{s^4+2as^3+(a^2+2)s^2+2as+1},$$

容易算出 $I_{ISE}=\frac{1}{2a}$，$I_{ISTSE}=\frac{1}{4}a+\frac{1}{4a}+\frac{1}{a^3}$。

根据不同的加权准则来计算极值，可以得到各种不同的最佳参数，如

积分准则	最佳参数	积分值
$\int_0^\infty t^2e^2(t)dt$	$a=2$	$I=0.75$
$\frac{1}{2}\int_0^\infty [e^2(t)+t^2e^2(t)]dt$	$a=2.3$	$I=0.49$
$\frac{1}{3}\int_0^\infty [2e^2(t)+t^2e^2(t)]dt$	$a=2.6$	$I=0.40$
$\frac{1}{4}\int_0^\infty [3e^2(t)+t^2e^2(t)]dt$	$a=2.9$	$I=0.34$

为了研究更复杂的系统，我们编制了进行计算与选优的计算机程序。

总之，使用ISE、ISTSE、ISDE以及它们的正加权组合来作为系统性能指标，能广泛地适用于具有各种特性的系统，同时计算起来十分方便，特别适用于使用电子计算机。我们可以用以进行评价系统的优劣，选择最佳参数，确定各参数敏感度等工作。用计算机对阶跃输入下各最佳系统的过渡过程进行数字仿真表明，在使用平方性能指标准则时，ISE的权大，系统的上升时间较快，但超调量较大；ISTSE的权大，则系统的调整时间较短；ISDE的权大，则系统的振荡次数较少。人们可以根据对系统的不同要求来选择适当的加权系数，以达到理想的性能。

致谢　本文在用计算机进行选优与仿真中得到福州大学黎照人同志的协助与指导，在此表示谢意。

参考文献

〔1〕 Graham. D. and Lathrop. R. C., The Synthesis of Optimum Transient Response, Criteria and Standard Forms. AIEE. Trans., **72**(1953), 273—285.

〔2〕 Schultz. W. C. and Rideout. C. V., Control System Performance

Measures, Past, Present, and Future. IRE. Trans., AC—6 (1961), 22—34.
〔3〕 (日)绪方胜彦，现代控制工程(卢伯英等译)，科学出版社，(1976)，226—238.
〔4〕 Åström. K. J., Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, London (1970), 128—139.

A STUDY OF QUADRATIC PERFORMANCE INDICES OF SISO LINEAR CONTROL SYSTEMS IN FREQUENCE DOMAIN

Zheng Yingwen
(Fuzhou University)

Abstract

By the Parseval theorem it is possible to express the quadratic performance indices of a SISO linear control system by a complex integral of rational transfer function along the imaginary axis. This complex integral can be evaluated in terms of system parameters by applying Åström's recursive formulas. The results of evaluation for a second-order system are given in this paper to demonstrate the possibility of minimization of the quadratic performance indices by properly selecting the system parameters.