第2卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol. 2. No. 3
1985年7月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　July, 1985

能控性不变的参数摄动区间的一种估计

成　邦　文

（武汉计算机培训中心）

摘　　要

本文给出了线性定常系统状态矩阵摄动时保持能控性不变的摄动区间的估计.

文〔1〕讨论了线性定常系统状态矩阵摄动时的能控性问题，给出了两种估计能控性余度的方法，本文将给出保持能控性不变的参数摄动区间的估计。

线性定常系统

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}. \tag{1}$$

$\mathbf{x}\in R^n$，$\mathbf{u}\in R^r$，A,B 为相应维数矩阵，B 满秩，且（1）完全能控。

状态矩阵 A 摄动时，有

$$\dot{\mathbf{x}} = A_1\mathbf{x} + B\mathbf{u}. \tag{2}$$

$A_1 = [a_{ij}+\varepsilon_{ij}]$，$a_{ij}$ 是 A 的元素，ε_{ij} 是 a_{ij} 的摄动值。

令　$\varepsilon_{ij}=\delta_{ij}a_{ij}$，$\delta_{ij}$ 为摄动系数。我们希望确定 δ_{ij} 在多大范围内变化，即找一个 δ，当 $|\delta_{ij}|<\delta$ 时，系统（2）完全能控。

引理　$H=[h_{ij}]$，$G=[g_{ij}]$ 都是 n 阶实对称矩阵，若 $h_{ij}\geq|g_{ij}|$，则 $\lambda_{\max}(H)\geq\lambda_{\max}(G)$。

证　设 $\mathbf{x}=(\chi_1\chi_2\cdots\chi_n)^T$，$\mathbf{x}^T\mathbf{x}=1$，是与 $\lambda_{\max}(G)$ 对应的 G 的特征向量。令 $\bar{\mathbf{x}}=(|\chi_1||\chi_2|\cdots|\chi_n|)^T$，显然 $\bar{\mathbf{x}}^T\bar{\mathbf{x}}=1$，且

$$\lambda_{\max}(H)\geq\bar{\mathbf{x}}^T H\bar{\mathbf{x}} = \sum_{i,j=1}^{n} h_{ij}|\chi_i|\,|\chi_j|$$

$$\geq\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\chi_i\chi_j=\mathbf{x}^T G\mathbf{x}$$

$$=\lambda_{\max}(G).$$　　证毕。

因系统（1）完全能控，故有非奇异矩阵

本文于1983年12月14日收到。1984年6月17日收到修改稿。

$$T=(b_1\cdots b_r Ab_1\cdots A^{\mu_1-1}b_1\cdots Ab_r\cdots A^{\mu_r-1}b_r),\quad \sum_{i=1}^{r}\mu_i=n$$

与T对应，记

$$T_\sigma=(b_1\cdots b_r A_1 b_1\cdots A_1^{\mu_1-1}b_1\cdots A_1 b_r\cdots A_1^{\mu_r-1}b_r),$$

$$T_1=(\overline{A}\,\overline{b}_1\cdots\overline{A}^{\mu_1-1}\overline{b}_1\cdots\overline{A}\,\overline{b}_r\cdots\overline{A}^{\mu_r-1}\overline{b}_r)。$$

$\overline{A}$，$\overline{b1}$，…，$\overline{b}_r$分别是A，b_1，…，b_r的各元素取绝对值后形成的矩阵和向量。显然，T，T_δ，T_1对应出现，选择不同的μ_1，…μ_r，可得到不同的T，T_δ，T_1。设P是以一切的T为元素的集。

定理 系统（1）完全能控，如$\delta_{ij}(i,j=1,\cdots,n)$满足

$$|\delta_{ij}|<\delta,\quad \delta=\max_{T\in P}\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(T^TT)}{\lambda_{\max}(T_1^TT_1)}}+1\right)^{\frac{1}{\mu-1}}-1,\tag{3}$$

其中 $\mu=\max(\mu_1,\cdots\mu_r)$，则系统（2）也完全能控。

证 因 $T_\delta=T[I-T^{-1}(T-T_\delta)]$，

$$\|T^{-1}(T-T_\delta)\|\le\|T^{-1}\|\|T_\delta-T\|,$$

当 $$\|T^{-1}\|\|T_\delta-T\|<1\tag{4}$$

时，T_δ非奇异，即系统（2）完全能控。取2—范数，注意到$\|T^{-1}\|_2^{-1}=\sqrt{\lambda_{\min}(T^TT)}$，由（4）得

$$\|T_\delta-T\|_2<\sqrt{\lambda_{\min}(T^TT)}\ 。\tag{5}$$

现在分析$(A_1^l-A^l)b_j(l\le\mu-1,b_j=(b_{1j}b_{2j}\cdots b_{nj})^T$的第$i$个分量$[(A_1^l-A^l)b_j]_i$，有

$$\begin{aligned}[(A_1^l-A^l)b_j]_i&=\sum_{k_1,\cdots,k_l=1}^{n}[(1+\delta_{ik_1})(1+\delta_{k_1k_2})\cdots(1+\delta_{k_{l-1}k_l})-1]\cdot\\&\qquad a_{ik_1}a_{k_1k_2}\cdots a_{k_{l-1}k_l}b_{k_lj}\\&\le\sum_{k_1,\cdots k_l=1}^{n}[(1+\delta)^l-1]|a_{ik_1}|\cdots|a_{k_{l-1}k_l}||b_{k_lj}|\\&\le[(1+\delta)^{\mu-1}-1][\overline{A}^l\overline{b}_j]_i。\end{aligned}\tag{6}$$

式中的δ是待求的δ_{ij}的上界值，$[\overline{A}^l\overline{b}_j]_i$表示向量$[\overline{A}^l\overline{b}_j]$的第$i$个分量。故

$$|[T_\delta-T]_{ij}|\le[(1+\delta)^{\mu-1}-1][O_{n\times r}T_1)_{ij}。$$

从而

$$|[(T_\delta - T)^T(T_\delta - T)]_{ij}| \le [(1+\delta)^{\mu-1}-1]^2 \begin{bmatrix} O_{rr} & \\ & T_1^T T_1 \end{bmatrix}_{ij}.$$

上两式中$[\cdot]_{ij}$表示矩阵$[\cdot]$的第ij个元素。由引理，并注意到，对任意阵Q，$\|Q\|_2=\sqrt{\lambda_{\max}(Q^TQ)}$，可得

$$\|T_\delta - T\|_2 \le \|[(1+\delta)^{\mu-1}-1][O_{n\times r}T_1]\|_2$$
$$=[(1+\delta)^{\mu-1}-1]\sqrt{\lambda_{\max}(T_1^TT_1)}\,.$$

从而当

$$\delta=\left(\sqrt{\frac{\lambda_{\min}(T^TT)}{\lambda_{\max}(T_1^TT_1)}}+1\right)^{\frac{1}{\mu-1}}-1 \qquad (7)$$

而$|\delta_{ij}|<\delta$时，(5)成立，这时系统(2)完全能控。以上证明对任意$T\in P$都成立，所以本定理成立。显然，此定理所给出的只是保持能控性不变的充份条件。

现在，以文[1]中例3.1为算例，把本文方法和文[1]的Gram法及小分枝解法进行比较。

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&-2&4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\0&1\end{pmatrix}$$

分别估算出保持能控性不变的最大摄动界δ，如下表

方 法	Gram 法	小分枝解法	本文方法
摄动δ	0.015912132	0.2385228	0.0572548

可见，本文方法的精度比Gram法好，比小分枝解法要差。但本文方法简捷，计算较简单。

显然，用本文定理可求出保持能观性不变的摄动界δ_1，而当$|\delta_{ij}|<\min(\delta,\ \delta_1)$时保持能控性能观性不变。

参考文献

[1] 张荣祥、陈兆宽，线性控制系统最经济结构综合解的适定性问题，自动化学报，7，4 (1981)。

THE APPROXIMATE PERTURBATION RANGE OF STATE MATRIX KEEPING CONTROLLABILITY INVARIANT

Cheng Bangwen
(Wuhan Training Center for Computer Science and Engineering)

Abstract

In this paper, the approximate perturbation range of the state matrix of a linear time-invariant system is given, keeping the system controllability invariant.