第2卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 2, No. 4
1985年10月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　October, 1985

大系统指数稳定性的某些结果

吴 文 珍

（厦门大学）

摘 要

Lyapunov 直接方法的关键在于寻求一个满足一定条件的 Lyapunov 函数（简称为 V 函数）。而大系统指数稳定性对 V 函数的要求往往比较苛刻。专著〔1〕中要求 V 函数与 $\|x\|^2$ 同量级（即存在 K_1，$K_2>0$，使得满足 $K_1\|x\|^2\le V(t,x)\le K_2\|x\|^2$）；专著〔2〕中要求 V 函数与某个 K 类函数同量级，后者的条件虽然比前者的弱一些，但并未给出论证。本文通过放宽对 V 函数的要求而给出了几个较一般的结果，使得〔1〕中的一些主要定理相应地成为它们的简单推论。

一、预 备 知 识

记 $J_0=[t_0,\infty)$，$J=(-\infty,\infty)$，$L=\{1,\cdots,l\}$，$i\in L$ 表示 $i=1,\cdots,l$。设 G 为 R^n 中包含坐标原点的某一区域，以下总假设 V 函数 $V(t,x)$ 满足 $V(t,0)\equiv 0$，且统一规定模

$$\|x\|=\sum_{i=1}^{n}|x_i|.$$

考虑大系统

$$(S)\qquad \dot{x}=f(t,x),$$

假设它可以分解成 l 个互联子系统

$$(\Sigma_i)\qquad \dot{z}_i=f_i(t,z_i)+g_i(t,z_1,\cdots,z_l),\quad i\in L,$$

其对应的孤立子系统为

$$(S_i)\qquad \dot{z}_i=f(t,z_i),\quad i\in L,$$

其中 $z_i=(x_{i1},\cdots,x_{in_i})^T\in R^{n_i}$，$\sum_{i=1}^{l}n_i=n$，$x^T=(z_1^T,\cdots z_l^T)\in R^n$，$t\in J$。同时假设函数 f、f_i、g_i 保证系统 (S)、(Σ_i) 和 (S_i) 解的右边整体存在性和唯一性。

本文曾在第四届（昆明，1983．12）全国控制理论与应用学术交流会上宣读。
本文于1984年2月21收到，1984年8月收到修改稿。

定义1 $\dot{V}_{(s)}(t,x)$ 表示函数 $V(t,x)$ 沿着系统 (S) 的全导数，即 $\dot{V}_{(s)}(t,x) \triangleq \dfrac{\partial V(t,x)}{\partial t}+\dfrac{\partial V(t,x)}{\partial x}\cdot f(t,x)$。

定义2 称系统 (S) 的零解 $x^*=0$ 为全局指数稳定，如果存在 $\lambda>0$，且对任意给定的 $\beta>0$，存在 $K(\beta)>0$，使当 $\|x_0\|\le\beta$ 时，便有

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\le K(\beta)\exp[-\lambda(t-t_0)],\quad \forall\ t\in J_0,$$

对一切 $(t_0,x_0)\in J\times R^n$ 成立。

定义3 称系统 (S) 的零解 $x^*=0$ 在区域 G 上局部指数稳定，如果存在 $\lambda>0$，且对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使当 $\|x_0\|<\delta$ 时，便有

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\le\varepsilon\cdot\exp[-\lambda(t-t_0)],\quad \forall\, t\in J_0,$$

对一切 $(t_0,x_0)\in J\times G$ 成立。

定义4 若函数 $\varphi(r)$ 满足下述条件：(i) $\varphi(r)\in C[0,\tau)$，其中 τ 为有限正数或 $+\infty$；(ii) $\varphi(r)$ 在 $[0,\tau)$ 上严格单调增加；(iii) $\varphi(0)=0$，则称 $\varphi(r)$ 为 K 类函数。记为 $\varphi\in K$。

若 $\varphi\in K$，$\tau=+\infty$，且 $\lim\limits_{\gamma\to+\infty}\varphi(r)=+\infty$，则称 $\varphi(r)$ 为 KR 类函数。记为 $\varphi\in KR$。

定义5 对于孤立子系统 (S_i)，如果存在定正函数 Φ_i 和 KR 类函数 Ψ_i，使得 $\Psi_i(r)\le\Phi_i(r)$，且存在 V 函数 $V_i(t,z_i)\in C^1(J\times R^{n_i})$，它们一起满足

$$\left.\begin{aligned}&C_i\|z_i\|^\alpha\le V_i(t,z_i)\le\Psi_i(\|z_i\|),\\&\dot{V}_{i(s_i)}(t,z_i)\le\sigma_i\Phi_i(\|z_i\|)\end{aligned}\right\},\quad \forall(t,z_i)\in J\times R^{n_i},$$

其中 α，$C_i>0$，$\sigma_i\in R$。我们就称孤立子系统 (S_i) 具有性质 Q。

二、二个基本结果

基本定理I 对于系统 (S)，若存在函数 $\varphi\in K$ 和 V 函数 $V(t,x)\in C^1(J\times G)$，它们一起满足

(1)
$$\left.\begin{aligned}&C\|x\|^2\le V(t,x)\le\varphi(\|x\|),\\&\dot{V}_{(s)}(t,x)\le-\varphi(\|x\|),\end{aligned}\right\}\quad \forall(t,x)\in J\times G,$$

其中 C，$\alpha>0$。则系统 (S) 的零解 $x^*=0$ 在区域 G 上局部指数稳定。

证 由 (1) 容易得出

$$V(t,x)\le V(t_0,x_0)\exp[-(t-t_0)],$$

由此再由 (1) 得

$$(2)\qquad \|x(t;t_0x_0)\|\leq C^{-\frac{1}{\alpha}}V^{\frac{1}{\alpha}}(t,x)\leq C^{-\frac{1}{\alpha}}\varphi^{\frac{1}{\alpha}}(\|x_0\|)\exp\left[-\frac{1}{\alpha}(t-t_0)\right],$$

$\forall t\in J_0$，由于$\varphi\in K$，依K类函数的定义知，$\lim\limits_{r\to 0^+}\varphi(r)=0$，故由（2）易见，存在$\lambda=\dfrac{1}{\alpha}>0$，且对任意给定的$\varepsilon>0$，存在$\delta(\varepsilon)=\varphi^{-1}(C\varepsilon^{\alpha})>0$，使当$\|x_0\|<\delta$时，便有

$$\|x(t;t_0,x_0)\|\leq\varepsilon\cdot\exp[-\lambda(t-t_0)],\quad \forall t\in J_0,$$

对一切$(t_0, x_0)\in J\times G$成立。依定义3知原结论成立。

记 $\widetilde{G}=\{x|x\in R^n, \|x\|<1\}$，我们有：

推论 对于系统(S)，若存在V函数$V(t,x)\in C^1(J\times\widetilde{G})$，使满足

$$\begin{aligned}&k_1\|x\|^a\leq V(t,x)\leq k_2\|x\|^b,\\&\dot{V}_{(s)}(t,x)\leq -k_3\|x\|^b,\end{aligned}\qquad \forall (t,x)\in J\times\widetilde{G},$$

其中k_1，k_2，k_3，a和b均为正常数，且$a\geq b$。则系统(S)的零解$x^*=0$在$\widetilde{G}$上局部指数稳定。

特别地，若取$a=b=2$，$\widetilde{G}=\{x|x\in R^n, \|x\|\leq H\}$，便为[1]中的定理5.5 .

基本定理Ⅱ 对于系统(S)，若存在定正函数Φ和KR类函数Ψ，使$\Psi(r)\leq\Phi(r)$，且存在V函数$V(t,x)\in C^1(J\times R^n)$，它们一起满足

$$\begin{aligned}&C\|x\|^a\leq V(t,x)\leq\Psi(\|x\|),\\&\dot{V}_{(s)}(t,x)\leq-\Phi(\|x\|),\end{aligned}\qquad \forall(t,x)\in J\times R^n,$$

其中C，$\alpha>0$。则系统(S)的零解$x^*=0$全局指数稳定。

证 与基本定理Ⅰ的证明相仿，其中利用了如下事实：$\forall\beta>0$，当$\|x_0\|\leq\beta$时，恒有：$\Psi^{\frac{1}{\alpha}}(\|x_0\|)\leq\Psi^{\frac{1}{\alpha}}(\beta)$。

三、主要结果

在上节中，我们把系统(S)看作单一系统，给出了两个基本结果，这一节我们要把(S)看作由l个子系统组成的复合系统来考虑，给出大系统全局指数稳定性的两个较一般的结果。

定理1 对于具有分解为(Σ_i)的大系统(S)，如果满足

(i) 每个孤立子系统(S_i)都具有性质Q；

(ii) 对于(i)中给定的函数Φ_i和V_i，成立

$$\frac{\partial V_i(t,z_i)}{\partial z_i}\cdot g_i(t,z_1,\cdots,z_l)\le \Phi_i^{\frac{1}{2}}(\|z_i\|)\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\Phi_j^{\frac{1}{2}}(\|z_j\|),$$

$$\forall\, t\in J,\quad z_i\in R^{n_i},\quad z_j\in R^{n_j},\quad i,j\in L,$$

其中 $a_{ij}\in R$。

(iii) 对于 (i) 中给定的 σ_i，存在正向量 $d^T=(d_1,\cdots,d_l)$，使矩阵 $S=(S_{ij})_{l\times l}$ 为负定，其中

$$S_{ij}=\begin{cases}d_i(\sigma_i+a_{ij}), & i=j,\\ (d_ia_{ij}+d_ja_{ji})/2, & i\ne j.\end{cases}$$

则大系统 (S) 的零解 $x^*=0$ 全局指数稳定。

证　作加权和 V 函数 $V(t,x)=\sum_{i=1}^{l}d_iV_i(t,z_i)$，利用所给的条件导出 $V(t,x)$ 关于复合系统 (S) 满足基本定理Ⅱ的条件。

现在考虑具有分解

$$(\Sigma_i^N)\qquad \dot z_i=f_i[t,z_i,g_i(t,z_1,\cdots z_l)]\triangleq h_i(t,x),\quad i\in L$$

的大系统 (S)，其中假设函数 h_i 保证系统 (Σ_i^N) 解的右边整体存在性和唯一性。我们有：

定理 2　对于具有分解为 (Σ_i^N) 的大系统 (S)，如果满足

(i)　存在函数 $\Psi_i\in KR$ 和 V 函数 $V_i(t,z_i)\in C^1(J\times R^{n_i})$，使得

$C_i\|z_i\|^{\alpha}\le V_i(t,z_i)\le \Psi_i(\|z_i\|)$，$\forall\,(t,z_i)\in J\times R^{n_i}$，$i\in L$，其中 α，$C_i>0$。

(ii)　对于 (i) 中给定的 Ψ_i 和 V_i，存在定正函数 Φ_i，$\Phi_i(r)\ge\Psi_i(r)$，使成立

$$\frac{\partial V_i(t,z_i)}{\partial t}+\frac{\partial V_i(t,z_i)}{\partial z_i}\cdot h_i(t,x)\le \Phi_i^{\frac{1}{2}}(\|z_i\|)\sum_{j=1}^{l}a_{ij}\Phi_j^{\frac{1}{2}}(\|z_j\|),$$

$$\forall\, t\in J,\quad z_i\in R^{n_i},\quad z_j\in R^{n_j},\quad x\in R^n,\quad i,j\in L.$$

(iii)　存在正向量 $d^T=(d_1,\cdots,d_l)$，使矩阵 $S=(S_{ij})l\times l$ 为负定，其中

$$S_{ij}=\begin{cases}d_ia_{ii}, & i=j,\\ (d_ia_{ij}+d_ja_{ji})/2, & i\ne j.\end{cases}$$

则大系统 (S) 的零解 $x^*=0$ 全局指数稳定。

本定理的证明与定理 1 的相仿。

说明 1　定理 1 和定理 2 是利用基本定理Ⅱ而得出的有关大系统全局指数稳定的结

果。对于局部情形，利用基本定理I可得出类似结果。

说明2 对于大系统关联指数稳定性[3]，可以得到类似的结果[4]。

参考文献

〔1〕 贺建勋，王志成，常微分方程（下册），湖南科技出版出，长沙(1981)，318—367。

〔2〕 Michel, A.N. and Miller, R.K., Qualitative Analysis of Large Scale Dynamical Systems, Academic Press, New York (1977), 20—160.

〔3〕 Šiljak, D.D., Large-Scale Dynamic Systems: Stability and Structure, North-Holland, New York (1978), 99—105.

〔4〕 吴文珍，大系统关联指数稳定性的某些结果，第四届全国控制理论与应用学术交流会资料，昆明（1983），10—18。

SOME RESULTS ABOUT EXPONENTIAL STABILITY OF LARGE SCALE DYNAMIC SYSTEMS

Wu Wenzhen

(Xiamen University)

Abstract

The key to the Lyapunov's direct method is how to find a Lyapunov function or V function, which must satisfy certain conditions. It is difficult to find such a V function for determining the exponential stability of large scale systems, for the strict condition must be satisfied by V function. It is required that V function should be the same order of magnitude as $\|x\|^2$ in [1] (i.e., there exist two positive numbers K_1 and K_2 so that $K_1\|x\|^2 \le V(t,x) \le K_2\|x\|^2$). While in [2] it is required that V function should be the same order of magnitude as the function belonged to the Class K. Although the condition of the latter is not so strict as that of the former, its proofs have not been given. This paper gives some general results by deducing the condition for V function. As a result, some main theorems in [1] have become their corollaries.