

线性定常多变量系统的 解耦控制和极零点配置

陈锦娣 徐和生

(北京工业学院)

摘 要

本文利用多项式矩阵方法,讨论了采用输入——输出反馈补偿器和串联补偿器解耦的有关问题。这些问题是:系统可以解耦的充分必要条件,解耦系统的可控性、可观测性和稳定性,以及解耦系统的极——零点配置等问题。最后,将这种解耦方法和状态反馈解耦进行了比较。

一、引 言

系统的解耦问题,亦即消除系统输入和输出之间的交链问题,是控制理论中的一个重要问题,在很多文献中都对这个问题进行过讨论。本文根据状态反馈解耦的思想,从系统的多项式矩阵描述出发讨论这个问题。

二、解耦控制与解耦系统极——零点配置补偿器的设计

(一) 系统不存在右传递零点的情况

设有 p 个输入和 p 个输出的多变量线性定常系统,其动态特性可由传递矩阵 $G_p(s)$ 完全表征, $G_p(s)$ 为 $p \times p$ 真有理非奇异矩阵,它的不可简约右分解为

$$G_p(s) = N_p(s) D_p^{-1}(s), \quad (1)$$

其中 $D_p(s)$ 是列化简的。加入输入——输出反馈补偿器 $G_{C0}(s) = D_C^{-1}(s) N_{C0}(s)$ 和 $G_{C1}(s) = D_C^{-1}(s) N_{C1}(s)$ 后,整个系统的方块图如图1所示。不难得出,整个系统从 r 到 y 的传递矩阵

$$G_f(s) = N_p(s) [D_C(s) D_p(s) + N_{C0}(s) D_p(s) + N_{C1}(s) N_p(s)]^{-1} D_C(s), \quad (2)$$

$G_p(s)$ 非奇异,亦即 $N_p(s)$ 非奇异,其逆存在。可令

$$D_f(s) N_p(s) = D_C(s) D_p(s) + N_{C0}(s) D_p(s) + N_{C1}(s) N_p(s), \quad (3)$$

$$\text{其中 } D_f(s) = \text{diag}[d_{f,i}(s) \quad i = 1, 2, \dots, p], \quad (4)$$

$$D_C(s) = \text{diag}[d_{ci}(s) \quad i=1, 2, \dots, p]. \quad (5)$$

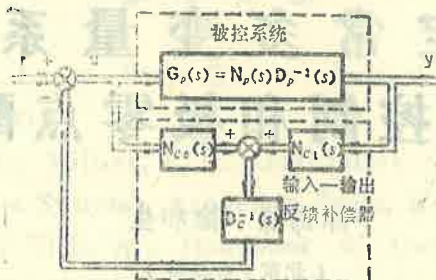


图 1 解耦控制补偿器(一)

将式(3)改写成

$$D_f(s)N_p(s) - D_C(s)D_p(s) = N_{C0}(s)D_p(s) + N_{C1}(s)N_p(s). \quad (6)$$

如果对满足上述约束条件的任何 $D_p(s)$ 、 $N_p(s)$ 、 $D_f(s)$ 和 $D_C(s)$ ，式(6)对 $N_{C0}(s)$ 和 $N_{C1}(s)$ 有解，则将式(3)~(5)代入式(2)得

$$G_f(s) = N_p(s)[D_f(s)N_p(s)]^{-1}D_C(s) = \text{diag}[d_{fi}^{-1}(s)d_{ci}(s) \quad i=1, 2, \dots, p]. \quad (7)$$

整个闭环系统的传递矩阵 $G_f(s)$ 为一对角线型非奇异矩阵，从而实现了解耦控制。

定理 1 对于满足式(1)、(4)和(5)约束条件的任何 $D_p(s)$ 、 $N_p(s)$ 、 $D_f(s)$ 和 $D_C(s)$ ，式(6)对 $N_{C0}(s)$ 和 $N_{C1}(s)$ 有解，且得到的 $D_C^{-1}(s)N_{C0}(s)$ 和 $D_C^{-1}(s)N_{C1}(s)$ 是真有理的充分必要条件是 $d_{ci}(s)$ ($i=1, 2, \dots, p$) 的次数 $k \geq \nu - 1$ (其中 ν 为 $G_p(s)$ 的可观测性指数) 和

$$\partial_{Ci}[D_f(s)N_p(s)] \leq \partial_{Ci}D_p(s) + k^{(1)}, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (8)$$

证 (参见文献[1]p532, 文献[5]p239, 文献[6]p511)

定义 1 定义 e_i 为传递矩阵 $G_p(s)$ 中第 i 行各元素分母与分子次数差的最小值。

定理 2 对于满足式(1)和(4)约束的任何 $D_p(s)$ 、 $N_p(s)$ 和 $D_f(s)$ ，(8)式成立的充分条件是

$$\deg d_{fi}(s) - \deg d_{ci}(s) \leq e_i, \quad i=1, 2, \dots, p. \quad (9)$$

必要条件是

$$\sum_{i=1}^p [\deg d_{fi}(s) - \deg d_{ci}(s)] \leq \sum_{i=1}^p e_i. \quad (10)$$

证 将式(1)改写为

$$G_p(s)D_p(s) = N_p(s),$$

令 $G_p(s) = [g_{ij}(s)]$, $D_p(s) = [d_{ij}(s)]$, $N_p(s) = [n_{ij}(s)]$, $i, j=1, 2, \dots, p$ 则有

$$n_{ij}(s) = \sum_{k=1}^p g_{ik}(s) d_{kj}(s),$$

注 1 $\partial_{Ci}A(s)$ ——表示矩阵 $A(s)$ 的第 i 列的次数。

显然

$$\deg n_{ii}(s) \leq \partial_{C_i} D_p(s) - e_i, \quad (11)$$

因为

$$D_f(s) N_p(s) = \begin{pmatrix} d_{f1}(s)n_{11}(s) & d_{f1}(s)n_{12}(s) & \cdots & d_{f1}(s)n_{1p}(s) \\ d_{f2}(s)n_{21}(s) & d_{f2}(s)n_{22}(s) & \cdots & d_{f2}(s)n_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{fp}(s)n_{p1}(s) & d_{fp}(s)n_{p2}(s) & \cdots & d_{fp}(s)n_{pp}(s) \end{pmatrix}. \quad (12)$$

由式(11)和(12)可以断言

$$\partial_{C_i} D_f(s) N_p(s) \leq \max_i [\deg d_{fi}(s) + \partial_{C_i} D_p(s) - e_i], \quad j=1, 2, \dots, p. \quad (13)$$

若式(9)成立, 即 $\deg d_{fi}(s) \leq e_i + \deg d_{Ci}(s) = e_i + k$, $i=1, 2, \dots, p$, 将其代入式(13), 得

$$\partial_{C_i} D_f(s) N_p(s) \leq \partial_{C_i} D_p(s) + k, \quad i=1, 2, \dots, p.$$

这就证明了式(9)为式(8)成立的充分条件。

下面证明式(10)为式(8)成立的必要条件。令

$$\begin{aligned} G_p(s) &= \begin{pmatrix} \frac{\bar{a}_{11}(s)}{\bar{b}_{11}(s)} & \frac{\bar{a}_{12}(s)}{\bar{b}_{12}(s)} & \cdots & \frac{\bar{a}_{1p}(s)}{\bar{b}_{1p}(s)} \\ \frac{\bar{a}_{21}(s)}{\bar{b}_{21}(s)} & \frac{\bar{a}_{22}(s)}{\bar{b}_{22}(s)} & \cdots & \frac{\bar{a}_{2p}(s)}{\bar{b}_{2p}(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\bar{a}_{p1}(s)}{\bar{b}_{p1}(s)} & \frac{\bar{a}_{p2}(s)}{\bar{b}_{p2}(s)} & \cdots & \frac{\bar{a}_{pp}(s)}{\bar{b}_{pp}(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{a_{11}(s)}{b_1(s)} & \frac{a_{12}(s)}{b_1(s)} & \cdots & \frac{a_{1p}(s)}{b_1(s)} \\ \frac{a_{21}(s)}{b_2(s)} & \frac{a_{22}(s)}{b_2(s)} & \cdots & \frac{a_{2p}(s)}{b_2(s)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{a_{p1}(s)}{b_p(s)} & \frac{a_{p2}(s)}{b_p(s)} & \cdots & \frac{a_{pp}(s)}{b_p(s)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} b_1(s) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & b_2(s) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & b_p(s) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a_{11}(s) & a_{12}(s) & \cdots & a_{1p}(s) \\ a_{21}(s) & a_{22}(s) & \cdots & a_{2p}(s) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1}(s) & a_{p2}(s) & \cdots & a_{pp}(s) \end{pmatrix} \\ &\triangleq B^{-1}(s) A(s) = \bar{D}_p^{-1}(s) \bar{N}_p(s), \quad (14) \end{aligned}$$

其中 $\bar{D}_p(s)$ 和 $\bar{N}_p(s)$ 左互质, 则有

$$\partial r_i \mathbf{A}(s) = \deg b_i(s) - e_i, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$$\deg \det \mathbf{A}(s) \leq \sum_{i=1}^p [\deg b_i(s) - e_i] = \deg \det \mathbf{B}(s) - \sum_{i=1}^p e_i,$$

$$\deg \det \bar{\mathbf{N}}_p(s) \leq \deg \det \bar{\mathbf{D}}_p(s) - \sum_{i=1}^p e_i.$$

由式(1)和(14)得, $\bar{\mathbf{D}}_p^{-1}(s) \bar{\mathbf{N}}_p(s) = \mathbf{N}_p(s) \mathbf{D}_p^{-1}(s)$, $\bar{\mathbf{D}}_p(s)$ 和 $\bar{\mathbf{N}}_p(s)$ 左互质, $\mathbf{D}_p(s)$ 和 $\mathbf{N}_p(s)$ 右互质, 这就意味着 $\bar{\mathbf{N}}_p(s) = \mathbf{U}_l(s) \mathbf{N}_p(s) \mathbf{U}_r(s)$ (其中, $\mathbf{U}_l(s)$ 和 $\mathbf{U}_r(s)$ 为单模矩阵), $\deg \det \bar{\mathbf{D}}_p(s) = \deg \det \mathbf{D}_p(s)$ (见参考文献[7] p227和参考文献[1] p381), 因而

$$\deg \det \mathbf{N}_p(s) \leq \deg \det \mathbf{D}_p(s) - \sum_{i=1}^p e_i = \sum_{i=1}^p [\partial_{C_i} \mathbf{D}_p(s) - e_i].$$

若 $\mathbf{D}_f(s) \mathbf{N}_p(s)$ 为列化简的, $\mathbf{A}(s)$ 为行化简的, 则

$$\sum_{i=1}^p \partial_{C_i} \mathbf{D}_f(s) \mathbf{N}_p(s) = \deg \det [\mathbf{D}_f(s) \mathbf{N}_p(s)] = \sum_{i=1}^p [\deg d_{f_i}(s) + \partial_{C_i} \mathbf{D}_p(s) - e_i]. \quad (15)$$

由式(8)得

$$\sum_{i=1}^p \partial_{C_i} \mathbf{D}_f(s) \mathbf{N}_p(s) \leq \sum_{i=1}^p [\partial_{C_i} \mathbf{D}_p(s) + k] = \sum_{i=1}^p [\partial_{C_i} \mathbf{D}_p(s) + \deg d_{C_i}(s)],$$

将式(15)代入上式得

$$\sum_{i=1}^p [\deg d_{f_i}(s) - e_i] \leq \sum_{i=1}^p \deg d_{C_i}(s).$$

这就证明了式(10)为式(8)成立的必要条件。

证毕

定理1可确定 $d_{C_i}(s)$ 的次数, 而本定理则可确定 $d_{f_i}(s)$ 的次数。定理1又告诉我们 $d_{f_i}(s)$ 和 $d_{C_i}(s)$ 的系数可由设计者任意选定。因此, 采用输入—输出反馈补偿器解耦时, 同时实现了解耦系统的极点和零点的配置。

1. 解耦系统的可控性和可观测性 设被解耦系统是既可控又可观测的, 从式(7)可以看出, $\det \mathbf{N}_p(s) = 0$ 的根, 即 $\mathbf{G}_p(s)$ 的传递零点, 为解耦系统的输出解耦零点, 即不可观测模式; 而 $d_{f_i}(s)$ 和 $d_{C_i}(s)$ ($i = 1, 2, \dots, p$) 的公因式的根, 为解耦系统的输

入解耦零点, 即不可控模式。由此可见, 解耦系统的可观测性和可控性取决于式 $G_p(s)$ 中是否具有传递零点和 $d_{fi}(s)$ 与 $d_{ci}(s)$ ($i=1, 2, \dots, p$) 是否存在公因式。

2. 解耦系统的稳定性 从式 (7) 还可以看出, $\det [D_f(s)N_p(s)] = \det D_f(s) \cdot \det N_p(s) = 0$ 的根, 为解耦系统的特征值。 $D_f(s)$ 是由设计者根据需要选定的, $\det D_f(s) = 0$ 的根位于 s 的左半平面的希望位置上; 而 $\det N_p(s) = 0$ 的根, 即 $G_p(s)$ 的传递零点, 由控制系统本身的性质决定。若 $G_p(s)$ 中存在右传递零点, 解耦系统就是不稳定的了, 这时上述解耦方法实际上是不可行的。只有 $G_p(s)$ 的传递零点皆为左零点时, 解耦系统才是稳定的, 解耦控制方可实现。

(二) 系统存在右输出阻塞零点的情况

定义 2 设有 $p \times p$ 真有理传递函数矩阵 $G_p(s)$, 令 $\beta_i(s)$ 为 $G_p(s)$ 第 i 行各元素分子的最大公因式, 则 $\beta_i(s) = 0$ ($i=1, 2, \dots, p$) 的根称为 $G_p(s)$ 的输出阻塞零点。 $\beta_i(s) = 0$ ($i=1, 2, \dots, p$) 的公共根称为阻塞零点。

设 $G_p(s)$ 中存在输出阻塞零点, 则式 (1) 可改写成

$$G_p(s) = N_{p1}(s) N_{p2}(s) D_p^{-1}(s), \quad (16)$$

其中, $N_p(s) = N_{p1}(s) N_{p2}(s)$, $N_{p1}(s) = \text{diag} [\beta_i(s) \ i=1, 2, \dots, p]$ 由 $G_p(s)$ 的输出阻塞零点部分组成。式 (16) 中 $N_{p1}(s)$ 已经解耦, 因此, 只要对 $N_{p2}(s) D_p^{-1}(s)$ 进行解耦, 就可使 $G_p(s)$ 实现解耦控制。如果 $G_p(s)$ 的右传递零点均为输出阻塞零点, 则式 (16) 中 $\det N_{p2}(s) = 0$ 的根均为左根, 采用图 1 所示输入——输出反馈补偿器对 $N_{p2}(s) D_p^{-1}(s)$ 进行解耦, 解耦系统是稳定的。也就是说, 对于这种情况通过上述处理后, 仍可用图 1 所示输入——输出反馈补偿器实现解耦控制。

(三) 系统存在右传递零点的情况

若 $G_p(s)$ 除输出阻塞零点而外的传递零点中仍有右零点, 则仅采用输入——输出反馈补偿器进行解耦, 解耦系统不可能稳定。这时必须同时采用串联补偿器和输入——输出反馈补偿器方可实现解耦。加入串联补偿器的目的是使右传递零点变为阻塞零点而保留在解耦系统中, 从而使解耦系统变为稳定。

定理 3 设 $p \times p$ 真有理非奇异传递矩阵 $G_p(s)$ 具有 r 个右传递零点 (不包括输出阻塞零点), 则存在一 $p \times p$ 真有理矩阵 $G_s(s)$ 使 $G_p(s)$ 的 r 个右传递零点变为 $G_p(s) G_s(s)$ 的阻塞零点, $G_s(s)$ 的最小次数为 $r(p-1)$ 。

证 设 $G_p(s)$ 的不可简约左分解为

$$G_p(s) = D_p^{-1}(s) N_p(s) = D_p^{-1}(s) N_{p1}(s) N_{p2}(s),$$

其中, $N_{p2}(s)$ 由 $N_p(s)$ 中的右传递零点 (不包括输出阻塞零点) 部分组成, 从题设知 $\deg \det N_{p2}(s) = r$ 。因为

$$N_{p2}(s) \cdot \text{adj } N_{p2}(s) = \det N_{p2}(s) \cdot I_p,$$

令 $G_s(s) = \text{adj } N_{p2}(s) \cdot D_s^{-1}(s)$ 为真有理矩阵, 则

$$G_p(s)G_s(s) = D_p^{-1}(s)N_{p1}(s) \cdot \det N_{p2}(s) \cdot D_s^{-1}(s).$$

显然, $G_p(s)G_s(s)$ 没有右传递零点 (不包括阻塞零点), $G_p(s)$ 的右传递零点在 $G_p(s)G_s(s)$ 中变成了阻塞零点. 定理的第一部分得证.

现在证明定理的第二部分. 因为

$$\deg \det [\operatorname{adj} N_{p2}(s)] = r(p-1). \quad (17)$$

我们又知道, 存在一单模矩阵 $U(s)$ 使 $\operatorname{adj} N_{p2}(s) \cdot U(s)$ 成为列化简的 (见参考文献 [1] p 386 或参考文献 [6] p 603). 因此

$$r(p-1) = \sum_{i=1}^p \partial_{Ci} [\operatorname{adj} N_{p2}(s) \cdot U(s)] \leq \sum_{i=1}^p \partial_{Ci} [\operatorname{adj} N_{p2}(s)]. \quad (18)$$

令 $\bar{D}_s(s)$ 是列化简的, 且 $\partial_{Ci} \bar{D}_s(s) = \partial_{Ci} [\operatorname{adj} N_{p2}(s) \cdot U(s)]$, $i=1, 2, \dots, p$. 又令 $D_s(s) = \bar{D}_s(s) U^{-1}(s)$, 则

$$G_s(s) = \operatorname{adj} N_{p2}(s) \cdot D_s^{-1}(s) = \operatorname{adj} N_{p2}(s) U(s) \bar{D}_s^{-1}(s)$$

是真有理的, 其次数为

$$\deg \det \bar{D}_s(s) = \sum_{i=1}^p \partial_{Ci} \bar{D}_s(s) = r(p-1).$$

由式 (18) 和参考文献 [1] p 385 可以断言, $r(p-1)$ 为 $G_s(s)$ 的最小次数. 证毕.

下面就两种情况分别给出求取串联补偿器和输入——输出反馈补偿器的步骤.

(1) 具有串联和输入——输出反馈补偿器的解耦系统的方框图如图 2 所示. 输入——输出反馈补偿器 $D_C^{-1}(s)N_{C0}(s)$ 和 $D_C^{-1}(s)N_{C1}(s)$ 与串联补偿器 $G_s(s)$ 的求取步骤为

1° 求 $G_p(s)$ 的不可简约右分解 $G_p(s) = N_p(s) D_p^{-1}(s)$, 其中 $D_p(s)$ 是列化简的.

2° 令 $N_p(s) = N_{p1}(s) N_{p2}(s) N_{p3}(s)$, (19)

其中 $N_{p1}(s)$ 为对角线形矩阵, 由 $N_p(s)$ 的右输出阻塞零点部分组成 (也可以包括左输出阻塞零点), $N_{p2}(s)$ 由 $N_p(s)$ 的右传递零点 (不包括右输出阻塞零点) 部分组成, $N_{p3}(s)$ 为 $N_p(s)$ 的其余部分.

3° 求 $\operatorname{adj} N_{p2}(s)$, 并通过初等行运算求一单模矩阵 $V(s)$, 使 $V(s) \operatorname{adj} N_{p2}(s)$ 成为列化简的. 再将 $G_p(s)$ 写成

$$G_p(s) = N_{p1}(s) N_{p2}(s) V^{-1}(s) V(s) N_{p3}(s) D_p^{-1}(s). \quad (20)$$

4° 利用输入——输出反馈补偿器对 $V(s) N_{p3}(s) D_p^{-1}(s)$ 进行解耦. 令式 (6) 中

$$D_f(s) = d_f(s) I_p, \quad D_C(s) = d_C(s) I_p, \quad (21)$$

则加入输入——输出反馈补偿器后系统的传递矩阵为

$$\mathbf{N}_{p1}(s)\mathbf{N}_{p2}(s)\mathbf{V}^{-1}(s)\mathbf{D}_f^{-1}\mathbf{D}_C(s) = d_f^{-1}(s)d_C(s)\mathbf{N}_{p1}(s)\mathbf{N}_{p2}(s)\mathbf{V}^{-1}(s). \quad (22)$$

5° 求串联补偿器 $\mathbf{G}_s(s)$, 使整个系统实现解耦控制. 令

$$\mathbf{G}_s(s) = \mathbf{V}(s) \operatorname{adj} \mathbf{N}_{p2}(s) \cdot \mathbf{D}_s^{-1}(s), \quad (23)$$

其中 $\mathbf{D}_s(s)$ 为对角线形矩阵, 且 $\partial_{Ci} \mathbf{D}_s(s) = \partial_{Ci} [\mathbf{V}(s) \operatorname{adj} \mathbf{N}_{p2}(s)]$, $i = 1, 2, \dots, p$.

则整个系统的传递矩阵

$$\mathbf{G}_f[s] = d_f^{-1}(s)d_C(s)\mathbf{N}_{p1}(s) \det \mathbf{N}_{p2}(s) \cdot \mathbf{D}_s^{-1}(s). \quad (24)$$

故实现了解耦控制, 且解耦系统是稳定的.

(2) 具有串联和输入——输出反馈补偿器的解耦系统的方框图如图 3 所示. 串联补偿器 $\mathbf{G}_s(s)$ 和输入——输出反馈补偿器 $\mathbf{D}_C^{-1}(s)\mathbf{N}_{C0}(s)$ 和 $\mathbf{D}_C^{-1}(s)\mathbf{N}_{C1}(s)$ 的求取步骤为

1° 求取 $\mathbf{G}_p(s)$ 的不可简约左分解 $\mathbf{G}_p(s) = \overline{\mathbf{D}}_p^{-1}(s)\overline{\mathbf{N}}_p(s)$, 将 $\overline{\mathbf{N}}_p(s)$ 中的右传递零点 (不包括右输出阻塞零点) 部分与其它部分分开

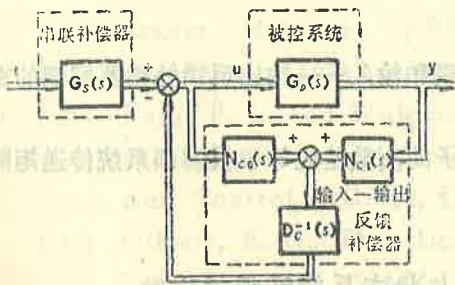


图 2 解耦控制补偿器 (二)

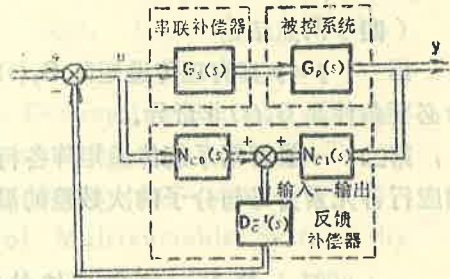


图 3 解耦控制补偿器 (三)

$$\overline{\mathbf{N}}_p(s) = \overline{\mathbf{N}}_{p1}(s)\overline{\mathbf{N}}_{p2}(s), \quad (25)$$

其中 $\overline{\mathbf{N}}_{p2}(s)$ 为右传递零点 (不包括右输出阻塞零点) 部分.

2° 求 $\operatorname{adj} \overline{\mathbf{N}}_{p2}(s)$, 并通过初等列运算求一单模矩阵 $\mathbf{U}(s)$, 使 $\operatorname{adj} \overline{\mathbf{N}}_{p2}(s) \cdot \mathbf{U}(s)$ 成为列化简的.

3° 令 $\mathbf{G}_s(s) = \operatorname{adj} \overline{\mathbf{N}}_{p2}(s) \cdot \mathbf{D}_s^{-1}(s)$,

$$\mathbf{D}_s(s) = \overline{\mathbf{D}}_s(s)\mathbf{U}^{-1}(s), \quad (26)$$

其中 $\overline{\mathbf{D}}_s(s)$ 在保证它为列化简和 $\partial_{Ci} \overline{\mathbf{D}}_s(s) = \partial_{Ci} [\operatorname{adj} \overline{\mathbf{N}}_{p2}(s) \cdot \mathbf{U}(s)]$ 的前提下可任意选取, 则 $\mathbf{G}_s(s)$ 的次数 $\deg \det \mathbf{D}_s(s) = r(p-1)$ 为最小 (见定理 3). 于是

$$\mathbf{G}_p(s)\mathbf{G}_s(s) = \det \overline{\mathbf{N}}_{p2}(s) \cdot \overline{\mathbf{D}}_p^{-1}(s)\overline{\mathbf{N}}_{p1}(s)\mathbf{D}_s^{-1}(s). \quad (27)$$

4° 求一右互质的 $D_p(s)$ 和 $N_{p1}(s)$, 且 $D_p(s)$ 为列化简的, 使 $N_{p1}(s)D_p^{-1}(s) = \overline{D}_p^{-1}(s)$ $\overline{N}_{p1}(s)$, 并令 $N_{p1}(s) = N_{p11}(s)N_{p12}(s)$, 其中, $N_{p11}(s)$ 为右输出阻塞零点部分, 则

$$G_p(s)G_s(s) = \det \overline{N}_{p2}(s) \cdot N_{p11}(s)N_{p12}(s)[D_s(s)D_p(s)]^{-1}. \quad (28)$$

5° 求输入——输出反馈补偿器 $D_c^{-1}(s)N_{c0}(s)$ 和 $D_c^{-1}(s)N_{c1}(s)$, 将 $N_{p12}(s)[D_s(s)D_p(s)]^{-1}$ 进行解耦。

比较图 2 和图 3 两种串联和输入——输出反馈补偿器的形式, 不难看出, 图 2 中输入——输出反馈补偿器的次数较图 3 为低。但是, 使用这种形式补偿器进行解耦的条件是式 (20) 中 $V(s)N_{p2}(s)D_p^{-1}(s)$ 的 $e_i (i=1, 2, \dots, p)$ 均相等, 并允许将 $D_f(s)$ 和 $D_c(s)$ 选为式 (21) 所示形式。

同时采用串联和输入——输出反馈补偿器解耦时, 除右输出阻塞零点保留在解耦系统中, 右传递零点 (不包括输出阻塞零点) 变为解耦系统的阻塞零点外, 解耦系统的其他极点和零点可任意配置。

(四) 两点结论

第一, $p \times p$ 真有理传递矩阵 $G_p(s)$ 可通过串联和输入——输出反馈补偿器解耦的充分必要条件是 $G_p(s)$ 非奇异。

第二, 一般解耦系统传递矩阵各行分母与分子的次数差应等于被解耦系统传递矩阵相应行各元素分母与分子的次数差的最小值。

三、输入——输出反馈补偿器解耦与状态反馈解耦的比较

在 $G_p(s)$ 没有右传递零点的情况下, 采用输入——输出反馈补偿器解耦时, 若令式 (6) 中 $D_f(s) = D_c(s) \text{diag}[s^{e_i} \ i=1, 2, \dots, p]$, 则所得结果与利用观测器的估计状态实现状态反馈所得积分型解耦的传递矩阵完全相同。这是因为, 输入——输出反馈补偿器综合的思想来源于状态反馈和观测器理论。但是, 利用多项式矩阵理论, 采用输入——输出反馈补偿器综合系统时, 可使系统解耦和解耦系统的极点配置一次完成, 同时还可以增设某些极点和零点, 这些极——零点的位置也可以任意设置, 后者利用状态空间法是做不到的。此外, 利用状态反馈解耦时, 分析解耦系统的可控性、可观测性和稳定性比较麻烦, 而利用输入——输出反馈补偿器解耦时, 解耦系统的可控性、可观测性和稳定性却一目了然。不仅如此, 它还给出了加入串联补偿器解决解耦系统稳定性的方法。

虽然输入——输出反馈补偿器解耦和状态反馈解耦可以得到同样的结果, 但是放宽了系统可解耦的条件。输入——输出反馈补偿器解耦仅仅要求被解耦系统的传递矩阵非奇异, 而状态反馈解耦的可解耦条件等价于式 (14) 中 $A(s)$ 为行化简的, 亦即 $G_p(s)$ 的

传递零点数等于 $\left(n - \sum_{i=1}^p e_i\right)$ 。这是因为, 状态反馈只能配置系统的极点, 不能改变

系统的极点数, 而利用输入——输出反馈补偿器配置分母矩阵, 只要求式(8)成立, 因而解耦系统的极点数可以小于各子系统的极点数之和。这就是输入——输出反馈补偿器解耦的可解耦条件宽于状态反馈解耦的原因。

然而, 如果解耦系统的极点数小于各子系统的极点数之和, 则从 r 到 u 的传递矩阵不是真有理的, 当输入信号 r 中附加有高频干扰时, 有可能将系统的通道阻塞, 这个问题在工程实际中必须予以考虑, 由于篇幅所限, 这里就不详细讨论了。

参 考 文 献

- [1] Kailath, T., Linear Systems, Englewood Cliffs. N. J: Prentice-Hall, (1980)。
- [2] Bitmead, R. R., Kung S-Y, Anderson. B. D. O. and Kailath. T., Greatest Common Divisors via Generalized Sylvester and Bezout Matrices, IEEE Trans. Aut. Control, AC-23, December, (1978), 1043-1047。
- [3] Falb, P. L. and Wolovich. W. A., Decoupling in the Design and Synthesis of Multivariable Control Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-12, December, (1976), 651-659。
- [4] Gilbert, E. G., The Decoupling of Multivariable Systems by State Feedback, SIAM. J. Control, 7, February, (1969), 50-63。
- [5] Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems Springer-Verlag, New York, Inc, (1974)。
- [6] Chen, C. T., Linear System Theory and Design, HRW Series in Electrical and Computer Engineering, CBS College, (1984)。
- [7] Edited by Fallside, F., Control System Design by Pole-Zero Assignment, Academic Press, (1977)。

DECOUPLING AND POLE-ZERO ASSIGNMENT OF LINEAR TIME-INVARIANT MULTIVARIABLE SYSTEMS

Chen Jindi, Xu Hesheng

(Beijing Institute of Technology)

Abstract

In this paper, some problems of decoupling using input-output feedback Compensator in Combination with cascade Compensator are considered by applying the theory of polynomial matrices. These problems include sufficient and necessary Condition for decoupling; controllability, observability and stability of the decoupled systems; and pole-zero assignment. Comparison of this method with the state feedback method is also discussed.