

ITAE 标准传递函数的结构型式探讨

雷 迅

(中国科学院武汉数学物理研究所)

摘 要

本文将时域里判断积分型的性能指标、ITAE 性能指标敛散问题转换到了复频域里进行讨论,并给出了对应的判断公式和定理。根据给出的定理,本文证明了 ITAE 标准传递函数(1)的适用范围。

一、引 言

文[1—3]为单变量系统的 ITAE 最佳调节律奠定了一定的理论基础和提供了实验依据。但是为什么取位移、匀速、匀加速无静差传递函数的结构型式,当阶跃、斜坡、抛物线函数输入时,可以保证 ITAE 性能指标是收敛的?即传递函数的最佳系数是可求的?而且什么样的结构型式将会导致 ITAE 性能指标是发散的?如果不满足文[1]给出的 ITAE 标准传递函数的结构型式,是否也可以构成具有 ITAE 最佳调节律的系统?本文试图对其进行探讨。

二、主 要 结 果

工程上,单输入单输出的线性定常系统最终总可以简化为图 1 所示的系统:

图 1 所示系统,若采用文[4]中极限判定定理来判断其系统对于 ITAE 性能指标*的敛散性,首先需求出 $e(t)$ 解析表达式,而求解 $e(t)$ 的工作,众所周知那怕是对于低阶系统也将是件烦琐的工作,能否将其敛散性的判断问题转化到复频域里进行呢?基于这一点,本文给出了如下定理:

定理 1 设连续函数 $f(t) \geq 0, t \in [a, \infty), a > 0$, 其拉氏变换 $F(s)$ 是存在的, ($F(0) = 0$), 若 $F(s)$ 在虚轴上, 以及 s 平面的右半平面是解析的, 又假如存在 $P > 1$



图 1 单输入单输出定常系统的示意图

本文于 1984 年 9 月 18 日收到。1985 年 5 月 3 日收到修改稿。

*ITAE 性能指标: $J = \int_0^{\infty} t |e| dt$, 即误差的绝对值乘以时间 t 的积分。

的正整数, 使得 $\lim_{s \rightarrow 0} |s \frac{d^P F(s)}{ds^P}|$ 存在, 则 $\int_a^\infty f(t) dt$ 是收敛的. 若 $\lim_{s \rightarrow 0} |s \frac{dF(s)}{ds}| = d > 0$, (或 $\lim_{s \rightarrow 0} |s \frac{dF(s)}{ds}| = \infty$), 则 $\int_a^\infty f(t) dt$ 是发散的.

定理 2 设连续函数 $e(t)$, $t \in [a, \infty)$, $a > 0$, 其拉氏变换 $E(s)$ 是存在的, ($E(0) = 0$), 若它在虚轴上, s 右半平面是解析的, 又假定存在 $P > 1$ 的正整数, 使得 $\lim_{s \rightarrow 0}$

$|s \frac{d^{P+1} E(s)}{ds^{P+1}}|$ 存在, 则 $\int_a^\infty t |e| dt$ 是收敛的, 若 $\lim_{s \rightarrow 0} |s \frac{d^2 E(s)}{ds^2}| = d > 0$, (或 $\lim_{s \rightarrow 0}$

$|s \frac{d^2 E(s)}{ds^2}| = \infty$), 则积分 $\int_a^\infty t |e(t)| dt$ 是发散的.

证 令 $f(t) = e(t)t$, ($e(t) \geq 0$)

对于某一个大于 1 的正整数 P , 则

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^P f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} t^{P+1} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (-1)^{P+1} s \frac{d^{P+1} E(s)}{ds^{P+1}}, \quad (2.1)$$

令 $f(t) = -e(t)t$, ($e(t) < 0$)

对于某一个大于 1 的正整数 P , 则:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^P f(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} -t^{P+1} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} (-1)^{P+2} s \frac{d^{P+1} E(s)}{ds^{P+1}}. \quad (2.2)$$

如果 (2.1)、(2.2) 存在, 根据极限判定定理^[4], 可知 $\int_a^\infty t |e(t)| dt$ 是收敛的.

如果 (2.1) (2.2) 等于某个常数 $|d|$, 或无穷大, 则 $\int_a^\infty t |e(t)| dt$ 是发散的.

定理 1 的证明方法完全类似, 故略之.

众所周知: ITAE 位移、匀速、匀加速无静差最佳调节律的传递函数的结构型式是分别以误差 $e(t)$ 信号对阶跃函数、斜坡, 以及抛物线函数满足 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 而命名的,

但 ITAE 性能指标收敛与否, 并不能用 $\lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = 0$ 来判断. 虽然此条件满足, ITAE

性能指标也可能发散, 故有必要对文(1)中三种传递函数的结构型式予以讨论.

图 1 所示系统其误差传递函数表达式如下:

$$E(s) = \frac{u_{sr}(s)}{1+G(s)} = \frac{P(s)}{Q(s)}, \quad (2.3)$$

$$\text{令 } P(s) = \Delta_1, \quad Q(s) = \Delta_2, \quad \Delta_3 = \frac{d\Delta_1}{ds}, \quad \Delta_4 = \frac{d\Delta_2}{ds},$$

$$\Delta_5 = \frac{d\Delta_3}{ds}, \quad \Delta_6 = \frac{d\Delta_4}{ds}, \quad \Delta_7 = \frac{d\Delta_5}{ds}, \quad \Delta_8 = \frac{d\Delta_6}{ds}.$$

$$\frac{dE(s)}{ds} = \frac{\Delta_3}{\Delta_2} - \frac{\Delta_1 \Delta_4}{\Delta_2^2}, \quad (2.4a)$$

$$\frac{d^2E(s)}{ds^2} = \frac{\Delta_5}{\Delta_2} - 2 \frac{\Delta_3 \Delta_4}{\Delta_2^2} - \frac{\Delta_1 \Delta_6}{\Delta_2^2} + 2 \frac{\Delta_1 \Delta_4^2}{\Delta_2^3}, \quad (2.4b)$$

$$\begin{aligned} \frac{d^3E(s)}{ds^3} = & \frac{\Delta_7}{\Delta_2} - \frac{3(\Delta_4 \Delta_5 + \Delta_3 \Delta_6) + \Delta_1 \Delta_8}{\Delta_2^2} + \frac{6(\Delta_3 \Delta_4^2 + \Delta_1 \Delta_4 \Delta_6)}{\Delta_2^3} \\ & - \frac{6\Delta_1 \Delta_4^3}{\Delta_2^4}, \end{aligned} \quad (2.4c)$$

对于位移无静差系统而言, $E(s)$ 可以表示如下:

$$E(s) = \frac{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-3} s^3 + \beta_{n-2} s^2 + \beta_{n-1} s}{s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-3} s^3 + \beta_{n-2} s^2 + \beta_{n-1} s + 1} \cdot \frac{1}{s}, \quad (2.5)$$

其中:

$$\Delta_1 = s^{n-1} + \beta_1 s^{n-2} + \cdots + \beta_{n-3} s^2 + \beta_{n-2} s + \beta_{n-1}, \quad (2.6)$$

$$\Delta_2 = s^n + \beta_1 s^{n-1} + \cdots + \beta_{n-2} s^2 + \beta_{n-1} s + 1, \quad (2.7)$$

$$\Delta_3 = (n-1)s^{n-2} + \beta_1(n-2)s^{n-3} + \cdots + 2\beta_{n-3}s + \beta_{n-2}, \quad (2.8)$$

$$\Delta_4 = ns^{n-1} + \beta_1(n-1)s^{n-2} + \cdots + 2\beta_{n-2}s + \beta_{n-1}, \quad (2.9)$$

$$\Delta_5 = (n-1)(n-2)s^{n-3} + \beta_1(n-2)(n-3)s^{n-4} + \cdots + 2\beta_{n-3}, \quad (2.10)$$

$$\Delta_6 = n(n-1)s^{n-2} + \beta_1(n-1)(n-2)s^{n-3} + \cdots + 6\beta_{n-3}s + 2\beta_{n-2}, \quad (2.11)$$

$$\Delta_7 = (n-1)(n-2)(n-3)s^{n-4} + \beta_1(n-2)(n-3)(n-4)s^{n-5} + \cdots + 6\beta_{n-4}, \quad (2.12)$$

$$\Delta_8 = n(n-1)(n-2)s^{n-3} + \beta_1(n-1)(n-2)(n-3)s^{n-4} + \cdots + 6\beta_{n-3}, \quad (2.13)$$

根据 (2.2)、(2.4c) 可解得:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d^3E(s)}{ds^3} = & \lim_{s \rightarrow 0} s \left[\frac{\Delta_7}{\Delta_2} - \frac{3(\Delta_4 \Delta_5 + \Delta_3 \Delta_6) + \Delta_1 \Delta_8}{\Delta_2^2} + \right. \\ & \left. \frac{6(\Delta_3 \Delta_4^2 + \Delta_1 \Delta_4 \Delta_6)}{\Delta_2^3} - \frac{6\Delta_1 \Delta_4^3}{\Delta_2^4} \right]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

将 $\Delta_i (i=1, \cdots, 8)$, 分别代入 (2.14) 经计算解得:

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \frac{d^3 E(s)}{ds^3} = 0. \quad (2.15)$$

可见位移无静差传递函数的结构型式是可以保证阶跃函数输入时, ITAE 性能指标收敛的。同理可证: 对 ITAE 性能指标而言, 位移无静差传递函数的结构型式当斜坡, 抛物线函数输入时其是发散的; 匀速无静差传递函数的结构型式当阶跃, 斜坡函数输入时其是收敛的, 但当抛物线函数输入时其是发散的; 匀加速无静差传递函数的结构型式当阶跃、斜坡、抛物线函数输入时其都将是收敛的。

工程实践中, 往往由于条件所限, 有时也会碰到不满足 ITAE 标准传递函数的结构型式, 但又希望实现 ITAE 最佳调节律的系统的情况。基于过去文献仅只提供了满足 ITAE 标准传递函数的结构型式的最佳校正方法和实际例子^[1-3], 故本文对非标准 ITAE 传递函数的 ITAE 最佳调节律作了进一步探讨。作者自编了 ITAE—G 程序,

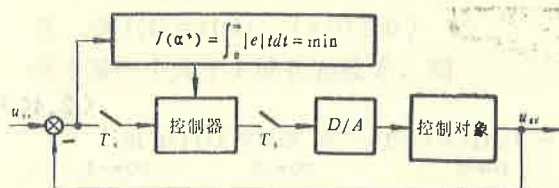


图 2 ITAE 控制器的参数寻优示意图

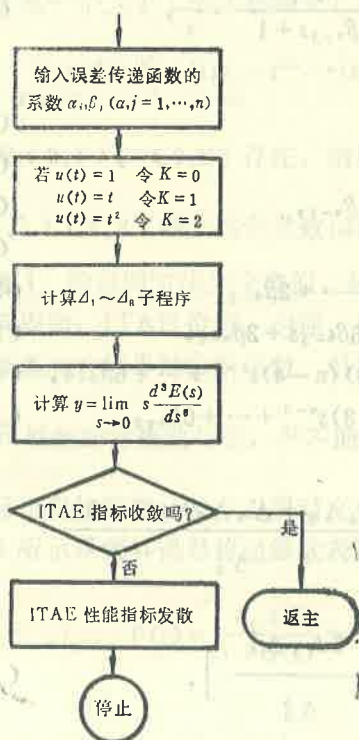


图 3a ITAE 性能指标、散判断子程序

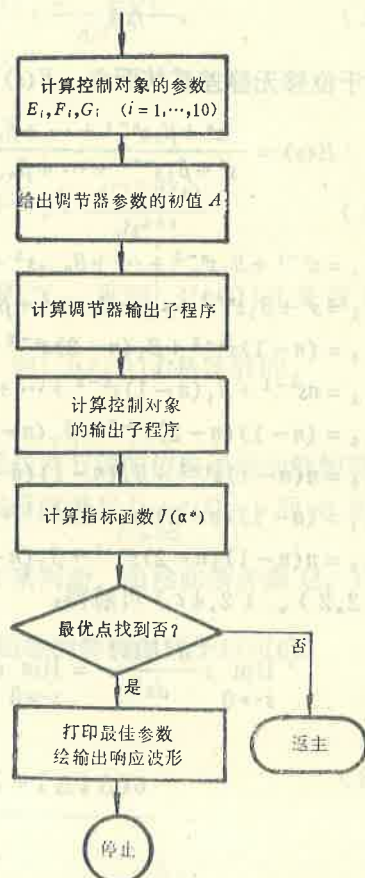


图 3b 控制器的 ITAE 最佳参数寻优子程序

其能判断系统对 ITAE 性能指标的收敛性, 能根据工程上常见的控制对象, 按单纯形寻优法^[5]寻找调节器的最优参数。整个系统寻优的思想方法如图2所示, 主要子程序框图如图 3a、3b 所示。

三、例

从文[3]可知: 若将 SCR—D 双环调速系统按 ITAE 二阶最佳调节律校正其电流环后, 系统等效结构图如图 4 所示:

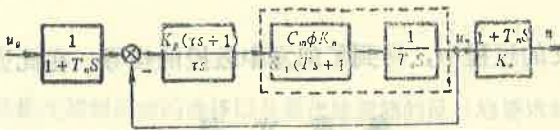


图 4 SCR—D 双环调速系统的结构等效图

系统等效的闭环传递函数如下:

$$W(s) = \frac{\frac{KK_p}{\tau T_i T} (1 + \tau s)}{s^3 + \frac{1}{T} s^2 + \frac{KK_p}{T_i T} s + \frac{KK_p}{\tau T T_i}} \cdot \frac{1}{K_n}, \quad (2.16)$$

其中
$$K = \frac{C_m \phi K_n}{K_I}; \quad T_i = GD^2/375.$$

因 (2.16) 不满足位移无静差标准传递函数结构型式, 故不能按位移无静差 ITAE 最佳调节律进行校正^[1], 因输入是阶跃函数也不能按匀速无静差 ITAE 最佳调节律进行校正^[1]。但据本文公式 (2.2) 可证: 此结构型式虽不满足 ITAE 位移无静差标准传递函数的结构型式^[1], 但当阶跃函数输入时, ITAE 性能指标将是收敛的。故作者采用 ITAE—G 程序, 将图 4 虚线所示部分视为控制对象, 将 ITAE 性能指标作为计算机寻找 K_p 、 τ 这两个参数的性能指标, 经计算机寻优求得系统最优参数 $K_p = 4.122$, $\tau = 1.53$, 然后对其做了物理实验, 获得了较理想的输出响应如图 5 所示。

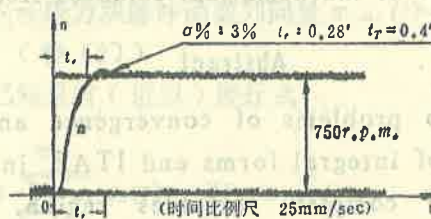


图 5 SCR—D 双环调速系统的物理实验

注 $\sigma\%$: 超调量; t_r : 上升时间; t_s : 调整时间

四、结 论

工程实践中,误差函数 $e(s)$ 通常是以 s 为变量的传递函数形式给出的,而用极值定理^[4]来判断 ITAE 性能指标的敛散性将较为困难。本文将时域里判断 ITAE 性能指标敛散的问题转换到了复频域里进行,给出了判别公式(2.1)(2.2)及判断定理,论证了 ITAE 标准传递函数的结构型式^[1]的实用范围。结合 SCR—D 双环调速系统,说明了传递函数结构型式选择的重要性,为非标准 ITAE 传递函数的 ITAE 最佳调节律在工程实践中应用提供了物理实验依据。

致谢 在完成本文的过程中,得到了郭友中教授的指导,在此谨致以谢意。

参 考 文 献

- [1] Grahan. D. & Iatlirop, R. C., The synthesis of optimal transient response criteria and standard forms. AIEE Trans., 72, (1953), 273.
- [2] 项国波, 线性定常反馈控制系统中的 ITAE 最佳调节, 中国科学, 2, (1982), 185.
- [3] 雷迅, 可控硅直流传动控制系统中的 ITAE 最佳调节律, 自动化学报, 3, (1983), 229.
- [4] 樊映川, 高等数学, 人民教育出版社, (1965).
- [5] 熊光楞, 控制系统的数字仿真, 清华大学出版社, (1982).

APPROACH TO CONFIGURATION OF ITAE STANDARD TRANSFER FUNCTION

Lei Xun

(Wuhan Institute of Mathematical Sciences Academia Sinica)

Abstract

The approach to problems of convergence and divergence for performance index of integral forms and ITAE in the time region are converted into complex variables region, correspondingly, the critical formulas and theorem are given in the complex variables region. This paper demonstrates the suitable extent of ITAE standard transfer function by means of above theorems.