第3卷 第3期
1986年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 3, No. 3
Sept., 1986

多台电轴系统稳定性区域之扩大

陈 潮 填

(广东省电力局)

摘 要

刘永清在〔1〕、〔2〕中研究了疏松桂[3]提出的多台电轴系统的稳定性，本文应用标量Ляпунов函数分解法，从如何寻求尽可能大的稳定域的观点出发，研究了电力拖动自动控制系统中带平衡机的n台电轴系统的稳定性，扩大了参数稳定性区域[5]，并给出渐近稳定性区域估计式。

一、四台电轴系统的稳定性

疏松桂已在〔3〕中建立了带平衡机的电轴系统数学模型。如四台电轴系统的微分方程为

$$\begin{cases} \ddot{x}+a\dot{x}+2c\left[\sin x+2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{y}{2}\right]-k_g x-k_h y+(f_1-f_4)=0, \\ \ddot{y}+a\dot{y}+2c\left[\sin y+2\sin\dfrac{y}{2}\cos\dfrac{x}{2}\right]-k_g' y-k_h' x+(f_2-f_3)=0, \end{cases} \tag{1}$$

其中 a、c 为正常数，k_g、k_g'、k_h、k_h' 是绝对值较小的常数，f_1-f_4 与 f_2-f_3 是不同时为零的常数[2]、[3]。

将(1)写为一阶微分方程组的形式，并求出方程组距初值(0, 0, 0, 0)最近的奇点(x_0, 0, y_0, 0)，这里 $x_0^2+y_0^2\neq 0$。将它平移到原点上去即得

$$\begin{cases} \dot{x}=u, & \dot{u}=-au-k_1x+k_2y+F_1(x,y), \\ \dot{y}=v, & \dot{v}=-av+k_3x-k_4y+F_2(x,y). \end{cases} \tag{2}$$

当 x_0、y_0 很小时常数 $|k_2|$、$|k_3|$ 也很小，k_1、k_4 是正常数。

$$F_1(x,y,x_0,y_0)=-2c\left[\sin x_0(\cos x-1)+\cos x_0(\sin x-x)+\sin\frac{x_0+y_0}{2}\left(\cos\frac{x+y}{2}-1\right)+\cos\frac{x_0+y_0}{2}\left(\sin\frac{x+y}{2}-\frac{x+y}{2}\right)\right.$$

本文于1984年10月21日收到，1985年11月24日收到修改稿。

$$+\sin\frac{x_0-y_0}{2}\left(\cos\frac{x-y}{2}-1\right)+\cos\frac{x_0-y_0}{2}$$

$$\left(\sin\frac{x-y}{2}-\frac{x-y}{2}\right)\Big].$$

$F_2(x,y,x_0,y_0)=F_1(y,x,y_0,x_0)$.

（2）的线性微分方程组的两个孤立子系统：

(φ_1)：　$\dot{x}=u$，　$\dot{u}=-k_1x-au$；　(φ_2)：　$\dot{y}=v$，　$\dot{v}=-k_4y-av$.

关联项　$g_1(x,u,y,v)=(0,k_2y+F_1(x,y))^T$，$g_2(x,u,y,v)=(0,k_3x+F_2(x,y))^T$.

定理 1　若

$$\begin{cases} H_1<ak_1[a^2+(1+k_1)^2]^{-\frac{1}{2}}, & (3)\\ (H_2+|k_2|)(H_2+|k_3|)<\{ak_1[a^2+(1+k_1)^2]^{-\frac{1}{2}} & \\ \qquad -H_1\}\cdot\{ak_4[a^2+(1+k_4)^2]^{-\frac{1}{2}}-H_3\}. & (4)\end{cases}$$

则非线性电轴大系统（2）的平衡态是局部渐近稳定的，其渐近稳定性区域 D 为

$$[a^2+k_1(1+k_1)]x^2+2axu+(1+k_1)u^2+[a^2+k_4(1+k_4)]y^2+2ayv$$
$$+(1+k_4)v^2\le M^2.$$

i）若参数 k_2、k_3 已给出，则 M 为满足（3）和（4），且使 D 不包含其它奇点的正常数。

ii）若要估计参数 k_2、k_3 的取值范围，则可由满足（3）且使 D 不包含其它奇点的正常数 M 确定出参数稳定性区域（4）. 而

$$H_1=\left[CA_1|\sin x_0|+L_1\sqrt{A_1^2+A_2^2}\right]M+\left[\frac{c|\cos x_0|}{3}A_1^2\right.$$

$$\left.+L_2(A_1^2+A_2^2)\right]M^2,$$

$$H_2=L_1M\sqrt{A_1^2+A_2^2}+L_2M^2(A_1^2+A_2^2),$$

$$H_3=\left[CA_2|\sin y_0|+L_1\sqrt{A_1^2+A_2^2}\right]M+\left[\frac{c}{3}|\cos y_0|A_2^2\right.$$

$$\left.+L_2(A_1^2+A_2^2)\right]M^2,$$

$$L_1=\frac{c}{4}\left\{\left|\sin\frac{x_0+y_0}{2}\right|+\left|\sin\frac{x_0-y_0}{2}\right|\right\},\quad A_1=\sqrt{\frac{1+k_1}{k_1[a^2+(1+k_1)^2]}},$$

$$L_2=\frac{c}{24}\left\{\left|\cos\frac{x_0+y_0}{2}\right|+\left|\cos\frac{x_0-y_0}{2}\right|\right\},\quad A_2=\sqrt{\frac{1+k_4}{k_4[a^2+(1+k_4)^2]}}.$$

简证　对(φ_1)、(φ_2)作正定 Ляпунов 函数 $V_1(x,u)=[a^2+k_1(1+k_1)]x^2+$

$2axu+(1+k_1)u^2$; $V_2(y,v)=[a^2+k_4(1+k_4)]y^2+2ayv+(1+k_4)v^2$,

以$U(x,u,y,v)=V_1(x,u)+V_2(y,v)$作为（2）的正定$V$函数

i）$\because k_1(x^2+u^2)\le V_1(x,u)\le(k_1^2+k_1+a^2+1)(x^2+u^2)$;

$$\begin{aligned}&DV_{1(\varphi_1)}(x,u)=-2ak_1(x^2+u^2)\\&k_4(y^2+v^2)\le V_2(y,v)\le(k_4^2+k_4+a^2+1)(y^2+v^2),\\&DV_{2(\varphi_2)}(y,v)=-2ak_4(y^2+v^2)\end{aligned}\tag{5}$$

$\therefore$孤立子系统(φ_1)、(φ_2)都具有性质B'。

ii）由 Lagrange 乘子法知在$U\le M^2$内

$$|x|\le A_1M,\quad |y|\le A_2M,\quad |x\pm y|\le\sqrt{A_1^2+A_2^2}M.$$

并由　$|\cos x-1|\le\dfrac{x^2}{2}$　$|\sin x-x|\le\dfrac{|x|^3}{6}$　得到

$$|F_1(x,y)|\le H_1|x|+H_2|y|,\qquad |F_2(x,y)|\le H_2|x|+H_3|y|.$$

取　$a_{11}=2H_1\sqrt{a^2+(1+k_1)^2}$，$a_{12}=2(H_2+|k_2|)\sqrt{a^2+(1+k_1)^2}>0$,

$a_{21}=2(H_2+|k_3|)\sqrt{a_2+(1+k_4)^2}>0$, $a_{22}=2H_3\sqrt{a^2+(1+k_4)^2}$,

则　$\nabla V_1(x,u)^T\cdot g_1(x,u,y,v)\le\sqrt{x^2+u^2}[a_{11}\sqrt{x^2+u^2}+a_{12}\sqrt{y^2+v^2}]$,

$\nabla V_2(y,v)^T\cdot g_2(x,u,y,v)\le\sqrt{y^2+v^2}[a_{21}\sqrt{x^2+u^2}+a_{22}\sqrt{y^2+v^2}]$

$\forall(x,u,y,v)\in \mathbf{D}$.

iii）由于$\sigma_1=-2ak_1$, $\sigma_2=-2ak_4$,

$$D=\begin{pmatrix}-(\sigma_1+a_{11}) & -a_{12}\\ -a_{21} & -(\sigma_2+a_{22})\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}2[ak_1-H_1\sqrt{a^2+(1+k_1)^2}] & -2(H_2+|k_2|)\sqrt{a^2+(1+k_1)^2}\\ -2(H_2+|k_3|)\sqrt{a^2+(1+k_4)^2} & 2[ak_4-H_3\sqrt{a^2+(1+k_4)^2}]\end{pmatrix}.$$

由（3）、（4）有D的顺序主子式全大于零，从〔4〕知非线性电轴大系统（2）的平衡态在D内渐近稳定。

二、n台电轴大系统的稳定性

由〔2〕、〔3〕知一般带平衡机的n台电轴大系统的微分方程组为

$$\dot{x}_k=u_k;\quad \dot{u}_k=-au_k-A_kx_k-\sum_{l=2}^{n}B_{kl}x_l-\sum_{l=2}^{n}F_{kl}(x_2,\cdots,x_n)-F_k(x_k)$$

$$(k=2,\cdots,n),\tag{6}$$

其中　a、b、c和A_k是正数，B_{kl}是绝对值较小的常数。而非线性项

$$F_k(x_k) = -b\cos x_{k0}(\cos x_k - 1) - b\sin x_{k0}(\sin x_k - x_k) + \cos x_{k0}(\sin x_k - x_k) - c\sin x_{k0}(\cos x_k - 1),$$

$$F_{kl}(x_2,\cdots,x_n) = b\{\cos x_{l0}(\cos x_l - 1) + \sin x_{l0}(\sin x_l - x_l) - \cos(x_{l0} - x_{k0})[\cos(x_l - x_k) - 1] - \sin(x_{l0} - x_{k0})[\sin(x_l - x_k) - (x_l - x_k)]\} + c\{\cos x_{l0}(\sin x_l - x_l) - \sin x_{l0}(\cos x_l - 1) - \cos(x_{l0} - x_{k0})[\sin(x_l - x_k) - (x_l - x_k)] + \sin(x_{l0} - x_{k0})[\cos(x_l - x_k) - 1]\} \quad (k=2,\cdots,n;\ l=2,\cdots,n).$$

把（6）平移到奇点上去后的线性方程组的$(n-1)$个孤立子系统为

$$(\varphi_k)':\quad \dot{x}_k = u_k;\quad \dot{u}_k = -au_k - (A_k + B_{kk})x_k \qquad (k=2,\cdots,n).$$

记 $g_k(x_2,u_2,\cdots,x_n,u_n) = \left(0, -\sum\limits_{\substack{l=2\\ l\neq k}}^{n} B_{kl}x_l - \sum\limits_{l=2}^{n} F_{kl}(x_2,\cdots,x_n) - F_k(x_k)\right)^T.$

定理 2 设 $R = [r_{kl}]_{(n-1)\times(n-1)}$

$$\begin{vmatrix} r_{22} & r_{23}\cdots r_{2k} \\ r_{32} & r_{33}\cdots r_{3k} \\ \cdots & \cdots \\ r_{k2} & r_{k3}\cdots r_{kk} \end{vmatrix} > 0 \qquad (k=2,\cdots,n). \tag{7}$$

而

$$r_{kl} = \begin{cases} 2\{a(A_k + B_{kk}) - \left[\sum\limits_{i=2}^{n} L_{ki} + H_{kk} + C_k\right]\sqrt{a^2 + (A_k + B_{kk} + 1)^2} & (l=k), \\ -2(|B_{kl}| + H_{kl})\sqrt{a^2 + (A_k + B_{kk} + 1)^2} & (l\neq k), \end{cases}$$

$$\begin{cases} H_{kl}(M) = \dfrac{1}{2}\left[(b|\cos x_{l0}| + c|\sin x_{l0}|)E_l + (b|\cos(x_{l0} - x_{k0})| + c|\sin(x_{l0} - x_{k0})|)\sqrt{E_l^2 + E_k^2}\right]M + \dfrac{1}{6}[(b|\sin x_{l0}| + c|\cos x_{l0}|)E_l^2 \\ \qquad + (b|\sin(x_{l0} - x_{k0})| + c|\cos(x_{l0} - x_{k0})|)(E_l^2 + E_k^2)]M^2, \\ L_{kl}(M) = \dfrac{1}{2}[b|\cos(x_{l0} - x_{k0})| + c|\sin(x_{l0} - x_{k0})|]\sqrt{E_l^2 + E_k^2}\,M \\ \qquad + \dfrac{1}{6}[b|\sin(x_{l0} - x_{k0})| + c|\cos(x_{l0} - x_{k0})|](E_l^2 + E_k^2)M^2, \\ C_k(M) = \dfrac{1}{2}[b|\cos x_{k0}| + c|\sin x_{k0}|]E_kM + \dfrac{1}{6}[b|\sin x_{k0}| + c|\sin x_{k0}|]E_k^2 M^2, \\ E_k = \sqrt{(A_k + B_{kk} + 1)/(A_k + B_{kk})[(A_k + B_{kk} + 1)^2 + a^2]}. \end{cases} \tag{8}$$

则 n 台电轴非线性大系统（6）的平衡态是局部渐近稳定的，其渐近稳定性区域 D′ 为

$$\sum_{l=2}^{n}\{[a^2+(A_k+B_{kk})(A_k+B_{kk}+1)]x_k^2+2ax_ku_k+(A_k+B_{kk}+1)u_k^2\}\leq M^2,$$

其中 M 为满足（7）且使 D′ 不包含其它奇点的正常数，参数稳定性区域由(7)所确定.

简证　做出每个孤立子系统$(\varphi_k)'$的V 函数

$V_{k-1}(x_k,u_k)=[a^2+(A_k+B_{kk})(A_k+B_{kk}+1)]x_k^2+2ax_ku_k+(A_k+B_{kk}+1)u_k^2$,　以

$$V(x_2,u_2,\cdots,x_n,u_n)=\sum_{k=2}^{n}V_{k-1}(x_k,u_k)$$作为系统（6）的正定 V 函数

i) ∵ $(A_k+B_{kk})(x_k^2+u_k^2)$

$$\leq V_{k-1}(x_k,u_k)\leq[(A_k+B_{kk})^2+(A_k+B_{kk})+a^2+1](x_k^2+u_k^2)$$

$$\left.\frac{dV_{k-1}}{dt}\right|_{(\varphi_k)'}=-2a(A_k+B_{kk})(x_k^2+u_k^2)\quad(k=2,\cdots,n).$$

故每个孤立子系统都具有性质 B'.

ii) 由 Lagrange 乘子法知在 D′：$V\leq M^2$ 内

$$|x_k|\leq E_kM,\quad |x_l-x_k|\leq\sqrt{E_l^2+E_k^2}\,M\quad(k,l=2,\cdots,n).$$

而　$|F_{kl}(x_2,\cdots,x_n)|\leq H_{kl}|x_l|+L_{kl}|x_k|$，$|F_k(x_k)|\leq C_k|x_k|$.

取

$$a_{kl}=\begin{cases}2\left[\sum\limits_{i=2}^{n}\hat{L}_{ki}+C_k+H_{kk}\right]\sqrt{a^2+(A_k+B_{kk}+1)^2} & (l=k),\\ 2(|B_{kl}|+H_{kl})\sqrt{a^2+(A_k+B_{kk}+1)^2} & (l\neq k).\end{cases}\qquad(9)$$

则　$$\nabla V_{k-1}(x_k,u_k)\cdot g_k(x_2,u_2,\cdots,x_n,u_n)\leq\sqrt{x_k^2+u_k^2}\cdot\sum_{l=2}^{n}a_{kl}\sqrt{x_l^2+u_l^2}$$

$$\forall(x_2,u_2,\cdots,x_n,u_n)\in D'\quad(k=2,\cdots,n).$$

iii) 从（8）知 $H_{kl}>0$，$L_{kl}>0$，$C_k>0$. 再从（9）知 $a_{kl}\geq0$　$(l\neq k)$ 成立，又因 $\sigma_k=-2a(A_k+B_{kk})$，故

$$r_{kl}=\begin{cases}-(\sigma_k+a_{kk})=2\left\{a(A_k+B_{kk})-\left[\sum\limits_{i=2}^{n}L_{ki}+H_{kk}+C_k\right]\sqrt{a^2+(A_k+B_{kk}+1)^2}\right\} & (l=k),\\ -a_{kl}=-2(|B_{kl}|+H_{kl})\sqrt{a^2+(A_k+B_{kk}+1)^2} & (l\neq k).\end{cases}$$

从（7）知检验矩阵 $R=[r_{kl}]$ 的顺序主子式都大于零，由〔5〕知多台电轴非线性大系统

（6）的平衡态在D'内是渐近稳定的。

三、一个电力拖动控制系统的例子

下面以疏松桂、刘永清[1]-[3]负责过的一项电力拖动控制系统的工程设计中所采用的数据为例，说明这种方法的用处。

在四点拖动的生产机械中，若取参数为

$$a=4.23,\ c=78,\ k_g=k_g'=0.24,\ f_1-f_4=-34,\ f_2-f_3=0,$$

可求得距原点最近的平衡点约为（0.11，0，5×10^{-5}，0）。

（3）即：$0.037254M+4.007\times10^{-4}M^2<4.216$。它对$0<M\leq66$成立。而其参数稳定性区域为

$$\begin{aligned}&(|k_2|+0.00973M+1.337\times10^{-4}M^2)(|k_3|+0.00973M+1.337\times10^{-4}M^2)\\&\quad<(4.216-0.037254M-4.007\times10^{-4}M^2)(4.216-0.0097434M\\&\qquad-4.007\times10^{-4}M^2).\end{aligned}\tag{10}$$

渐近稳定性区域为：

$$96789x^2+8.46xu+311.6u^2+97376.7y^2+8.46yv+312.5v^2\leq M^2.$$

当取参数$k_h=k_h'=0.16$，即$k_2=k_3=0.158$时，取$M=58$，这时初值点P：（-0.11，0，-5×10^{-5}，0）落在这个稳定域中，故过初值点P的运动是渐近稳定的。

另一方面，如果要估计参数k_2、k_3所允许取值的范围，则可由初值点P确定出$M\in[35,66]$，将M的值代入（10）式，便是参数k_2、k_3的稳定域。

致谢　在完成本文的过程中，得到刘永清教授的热情指导，特此致谢。

参考文献

〔1〕Liu Yongqing and Song Zhongkun, On the Decomposition problem of Large-scale System in the Theory of Stability. Recent Developments in Control Theory and its Applications. Proceedings of the Bilateral Meeting on Control Systems, (1981), 460-477.

〔2〕刘永清、宋中崑，多台电轴系统在稳定性理论中的分解问题，自动化学报，**10**，2，（1984），121—128.

〔3〕疏松桂，多台电轴系统的稳定性及非线性振荡问题，数学学报，**11**，2，（1961）.

〔4〕Michel, A. N., R. K. Miller, Qualitative Analysis of Large-scale Dynamical Systems. Academic Press New York, San Francisco, London, (1977).

[5] Chen Chaotian, Inquiry into the Extension of the Stable Parametric Range, International Conference of Differential Equations. Fuzhou University, (1985).

THE EXTENSION OF STABILITY DOMAIN OF LARGE-SCALE SYSTEM OF MULTI-ELECTRIC MOTORS

Chen Chaotian

(Bureau of Electric power Industry of Guang dong province, Guangzhou)

Abstract

Prof. Liu Yongqing (ref. [1],[2]) has investigated the stability of multi-electric motors system proposed by prof. Shu Songgui (ref.[3]). By using scalar Lyapunov function decomposition method, the author in this paper has studied the stability of n electric motors with balancing machine in the electric driving automatic control system in the viewpoint of finding as long as possible the stability field and extend the parametric stability field. At the same time, its asymptrotical stability field has been estimated.