第3卷 第4期 控制理论与应用 Vol. 3, No. 4
1986年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1986

大系统控制理论中的奇摄动方法

连 瑞 兴

（厦门大学）

摘 要

本文介绍奇摄动方法的一些基本概念，综述奇摄动方法在大系统控制理论中的应用的近期成果，并提供一些参考文献以供从事大系统控制、估计、稳定性分析，以及动态最优化各方面的工程师和应用数学家在进一步研究时作参考.

一、引 言

如所周知，从某种意义上说，大系统最优控制理论所遇到的主要困难是所谓“维数灾难”，为了克服这种维数灾，在大系统最优控制理论中除了采用分解-协调以构成多级递阶最优化和分散控制之外，奇摄动方法也是一种很有吸引力的有效方法. P. V. Kokotovic 等人曾在1976[A1]和1984年[A2]对奇摄动方法在控制理论中的应用做了全面的综述，共引用480篇参考文献. 从这二个综述及其所引用的文献可看出，奇摄动方法在控制理论中的应用（包括大系统的建模、系统分析，以及控制方案的设计方法等等），目前在国际上是个十分活跃的研究领域. 不论在理论的深度，或者应用的广度都有较快的进展. 限于篇幅，我们仅对奇摄动方法的一些基本概念及其在大系统最优控制理论的应用的若干有关问题做一扼要的介绍.

二、奇摄动方法的基本概念

2.1 线性奇摄动系统

假设受控大系统的模型为

$$\begin{cases} \dot{x} = A_{11}x + A_{12}z + B_1u, & x(t_0) = x^0, \\ \mu\dot{z} = A_{21}x + A_{22}z + B_2u, & z(t_0) = z^0, \end{cases} \tag{2.1}$$

其中，$x \in R^n$，$z \in R^m$，$u \in R^p$（p维控制向量），μ为正的小参数. 这就是线性奇摄动系统. 如果μ很小，且A_{22}^{-1}存在，令

本文于1986年5月6日收到.

$$\eta = z + Lx,\ （其中 L = A_{22}^{-1}A_{21} + O(\mu)），$$

$$\xi = x - M\eta,\ （M 待定）.$$

适当选取M，并且暂时让$u=0$,则（2.1）可化为

$$\dot{\xi} = [A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21} + O(\mu)]\xi. \tag{2.2}$$

$$\mu\dot{\eta} = [A_{22} + O(\mu)]\eta. \tag{2.3}$$

这说明奇摄动系统（2.1）可以化为双时标系统（2.2）和（2.3）.因为它的小特征值靠近$A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$的特征值，而大特征值靠近$A_{22}/\mu$的特征值. 反之，任何双时标系统都可以化成奇摄动模型（2.1）（见[A2]），若$\mu=0$,并以x_s表示ξ,则（2.2）变成

$$\dot{x}_s = (A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21})x_s,\quad x_s(t_0) = x^0, \tag{2.4}$$

它叫做（2.1）的退化系统（或拟平稳系统）. 实际上，（2.4）也可从（2.1）的第二式形式地令$\mu\dot{z}=0$，并解出

$$z_s = -A_{22}^{-1}A_{21}x_s,\ （记住 u_s = 0）, \tag{2.5}$$

然后代入（2.1）的第一式就得到（2.4）.（2.5）式所示的z_s也叫做z在$\mu=0$时的拟平稳状态. 如果对（2.3）式引入快时标

$$\tau = t - t_0/\mu,\quad 在 t = t_0 时,\quad \tau = 0, \tag{2.6}$$

并以z_f代替η，再让（2.3）式中$\mu=0$，则它又变成所谓边界层系统

$$\frac{dz_f}{d\tau} A_{22}z_f(\tau),\quad z_f(0) = z^0 - z_s(t_0), \tag{2.7}$$

有时也称（2.7）为快子系统（因为它的时标τ相对于t是快的）. 在文[A1]中已证，若A_{22}是稳定的，则（2.1）的解的双时标近似是

$$x(t,\mu) = x_s(t) + O(\mu), \tag{2.8}$$

$$z(t,\mu) = z_s(t) + z_f(\tau) + O(\mu). \tag{2.9}$$

关于系统（2.1）的稳定性和绝对稳定性的研究请看参考文献[C1, C2, C3].

2.2 非线性奇摄动系统

现在考虑时变非线性奇摄动系统

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x,u,t),\quad x(t_0) = x^0, \\ \mu\dot{z} = g(x,u,t),\quad z(t_0) = z^0, \end{cases} \tag{2.10}$$

当$\mu=0$时，记相应的状态为x_s，z_s，它们满足

$$\begin{cases} \dfrac{dx_s}{dt} = f(x_s,z_s,t),\quad x_s(t_0) = x^0, \\ \quad 0 = g(x_s,z_s,t). \end{cases} \tag{2.11}$$

它就是（2.10）的退化系统，其解$x_s(t)$，$z_s(t)$叫做当$\mu=0$时的退化解. 为了得到x,

z的快部分，引入快时标

$$\tau=t-t_0/\mu,\ t=t_0,\ \tau=0,$$

则(2.10)变成

$$\begin{cases}\dfrac{d\mathrm{x}}{d\tau}=\mu\mathrm{f}(\mathrm{x},\mathrm{z},t_0+\mu\tau), & (2.12)\\[2ex] \dfrac{d\mathrm{z}}{d\tau}=\mathrm{g}(\mathrm{x},\mathrm{z},t_0+\mu\tau)。 & (2.13)\end{cases}$$

再让$\mu\to 0$，则$\dfrac{d\mathrm{x}}{d\tau}=0$，亦即，在快时标下，$\mathrm{x}(\tau)=$常值．于是，在(2.13)中令$\mu=0$，即得快子系统

$$\frac{d\mathrm{z}_f}{d\tau}=\mathrm{g}(\mathrm{x}^0,\mathrm{z}_s^0+\mathrm{z}_f(\tau),t_0),\ \mathrm{z}_f(0)=\mathrm{z}^0-\mathrm{z}_s^0\ . \qquad (2.14)$$

为了确保原系统(2.10)的解具有近似结构

$$\mathrm{x}(t,\mu)=\mathrm{x}_s(t)+O(\mu),\ \mathrm{z}(t,\mu)=\mathrm{z}_s(t)+\mathrm{z}_f(\tau)+O(\mu),$$

则要求快子系统(2.14)关于($\mathrm{x}^0,\mathrm{z}_s^0,t_0$)是一致渐近稳定的．对线性时不变系统，这意味着它的大特征值具有大的负实部，使得快状态变量能迅速达到z_s．关于奇摄动方法(或双时标法)的基础理论及其应用的近期研究成果可查阅A、B、C各组参考文献．

2.3 离散时间奇摄动系统

近几年来，对双时标离散时间模型的分析和描述已有相当快的进展(见D组参考文献)．事实上，差分方程的理论与常微分方程是很相似的，这使人们想到对离散时间系统也可采用双时标方法。但是，试图对一般具有快、慢动态的离散时间系统按严格的奇摄动格式来描述，当离散化区间固定时还会遇到困难。最近，Phillips[D1]和Mahmoud[D2]，仿照连续时间的方法，考虑如下离散时间系统

$$\begin{bmatrix}\mathrm{x}(k+1)\\ \mathrm{z}(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A & B\\ C & D\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathrm{x}(k)\\ \mathrm{z}(k)\end{bmatrix},\ \begin{bmatrix}\mathrm{x}(0)\\ \mathrm{z}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathrm{x}^0\\ \mathrm{z}^0\end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

的双时标性质，如果它能变成

$$\begin{bmatrix}\xi(k+1)\\ \eta(k+1)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}F_1 & 0\\ 0 & F_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi(k)\\ \eta(k)\end{bmatrix},$$

使得$\max\limits_i|\lambda_i(F_1)|\ll\min\limits_j|\lambda_j(F_2)|$，则(2.15)就明显地具有双时标性质，而且它的慢子系统可用

$$\mathrm{x}_s(k+1)=(A-BL_0)\mathrm{x}_s(k),\ L_0=-(I_m-D)^{-1}C \qquad (2.16)$$

来模拟．而快子系统是

$$z_f(k+1)=Dz_f(k),\quad z_f(0)=z^0-z_s(0). \tag{2.17}$$

基于这种分离结构，在文〔D1、2〕中提出一种两步设计方法.关于奇摄动（或双时标）离散时间系统的更一般研究方法，及其对控制问题的应用，请看D组参考文献.

三、奇摄动系统的合成控制

3.1 线性系统的合成控制

考虑线性奇摄动系统

$$\begin{bmatrix}\dot{x}\\ \mu\dot{z}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_1\\ B_2\end{bmatrix}u,\quad \begin{bmatrix}x(0)\\ z(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x^0\\ z^0\end{bmatrix}, \tag{3.1}$$

$$y=[C_1,C_2]\begin{bmatrix}x\\ z\end{bmatrix}, \tag{3.2}$$

其中，$x\in R^n$，$z\in R^m$，$u\in R^p$（控制向量），$y\in R^r$（输出向量）假如A_{22}^{-1}存在，那么按上一节所述的处理方法，可得慢子系统

$$\begin{cases}\dot{x}_s=A_0x_s+B_0u_s, \quad x_s(0)=x^0,\\ y_s=C_0x_s+D_0u_s\end{cases} \tag{3.3}$$

和快子系统

$$\begin{cases}\dfrac{dz_f}{d\tau}=A_{22}z_f+B_2u_f, \quad z_f(0)=z^0+z_s(0),\\ y_f=C_2z_f,\end{cases} \tag{3.4}$$

其中，$z_f=z-z_s$，$u_f=u-u_s$，$y_f=y-y_s$，$z_s=-A_{22}^{-1}A_{21}x_s-A_{22}^{-1}B_2u_s$，

$$\begin{aligned}&A_0=A_{11}-A_{12}A_{22}^{-1}A_{21},\quad B_0=B_1-A_{12}A_{22}^{-1}B_2,\\ &C_0=C_1-C_2A_{22}^{-1}A_{21},\quad D_0=-C_2A_{22}^{-1}B_2.\end{aligned} \tag{3.5}$$

奇摄动系统可分解成快、慢状态分离的两个子系统，这使人们想到分别对快、慢子系统设计出快、慢控制律，然后组合成原奇摄动系统的“合成”控制.若无须快控制，则只用慢控制.这些想法已被许多作者所采用（见E组参考文献），并成功地用于大型奇摄动系统控制问题（或稳定性分析）的简化设计.比如，若

$$u_s=K_0x_s,\quad u_f=K_2z_f \tag{3.6}$$

是分别对慢子系统（3.3）和快子系统（3.4）设计的状态反馈控制.然后，构造合成控制

$$u_c=u_s+u_f=K_0x_s+K_2z_f. \tag{3.7}$$

注意到$z_s=-A_{22}^{-1}(A_{21}+B_2K_0)x_s$，以及$x\approx x_s$，$z\approx z_s+z_f$，把它们代入（3.7）式，即得原系统（3.1）的合成控制

$$u_c(x,z)=K_0x+K_2[z+A_{22}^{-1}(A_{21}+B_2K_0)x]. \tag{3.8}$$

当A_{22}是稳定矩阵，快变量无须控制，那么取$K_2=0$，这时合成控制u_c就是慢控制u_s，当然，这是一种$O(\mu)$阶近乎最优控制．这种方法是在〔E1〕中首先提出的．关于（3.1）按二次型指标的合成控制的近乎最优性的证明见文〔E2〕，把两步设计方法推广到更一般的奇摄动系统的有〔E3〕、〔E4〕。

3.2　非线性系统的合成控制

对非线性奇摄动系统的合成控制，Suzuki[E5]曾给出一般的描述．最近，在文〔E6〕、〔E7〕中利用二次型Lyapunov函数得到一些新的结果，这里扼要地介绍他们的工作．考虑一般非线性奇摄动系统

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,z,u),\ f(0,0,0)=0,\\ \mu\dot{z}=g(x,z,u,\mu),\ g(0,0,0,\mu)=0.\end{cases} \tag{3.9}$$

令$\mu=0$，得慢子系统

$$\dot{x}_s=f(x_s,h(x_s,u_s),u_s), \tag{3.10}$$

其中，$z_s=h(x_s,u_s)$是$g(x_s,z_s,u_s,0)=0$的唯一解．对（3.10）取反馈控制$u_s=M(x_s)$，使其闭环系统渐近稳定，对快子系统

$$\frac{dz_f}{d\tau}=g(x,z,M(x)+u_f,0),\quad \tau=t/\mu, \tag{3.11}$$

构造反馈控制$u_f=\Gamma(x,z)$，使得$\Gamma(x,h(x,M(x)))\approx 0$．亦即，在（3.11）的平衡点$z=h(x,M(x))$处）$u_f=0$，并且控制$u_f=\Gamma(x,z)$使（3.11））关于x一致渐近稳定．在适当条件下，文〔E7〕证明了合成控制$u_c(x,z)=M(x)+\Gamma(x,z)$能使原系统（3.9）稳定化．在〔E8〕中讨论一类特殊非线性系统（即关于z和u是线性的）的合成控制，给出具体的两步设计方法，并证明在适当条件下，对充分小的μ，所造出的合成控制能使原奇摄动系统的平衡点$x=0$，$z=0$稳定．在〔E6〕中则利用更一般的Lyapunov函数来解除关于z是线性的限制．笔者在〔E9〕中也讨论过一般非线性奇摄动系统按一般的非线性指标的近乎最优反馈控制．

四、大系统的最优控制

大系统的主要特征是，可用的信息是分散的，具有众多的决策者，每一个决策者的目标又各不相同．近几年来，奇摄动方法已成为大系统的建模、分析和设计控制方案的重要工具．这里介绍一类多时标的（或叫做多型性的）大系统的控制、极点配置，及其Pareto解．假设大系统的模型为

$$
\begin{cases}
\dot{x} = A_{00}x + \sum_{i=1}^{N} A_{0i}z_i + \sum_{i=1}^{N} B_{0i}u_i, \\
\mu_i\dot{z}_i = A_{i0}x + A_{ii}z_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mu_{ij}A_{ij}z_j + B_{ii}u_i, i = 1,\cdots,N,
\end{cases}
\tag{4.1}
$$

其中，x 是在整个大系统起主导作用的慢状态，z_i 是快状态变量，每一个快子系统都带有不同的奇摄动小参数 μ_i，第 i 个子系统与其它子系统的弱偶合通过小参数μ_{ij}来刻画，对这种大系统的一种合理的简化处理是，在第 i 个子系统中，除 μ_i外，令其他 $\mu_{ij}=0$，那么，大系统的简化模型为

$$
\begin{cases}
\dot{x}_i = A_ix_i + A_{0i}z_i + B_{0i}u_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} B_{ij}u_i, \\
\mu_i\dot{z}_i = A_{i0}x_i + A_{ii}z_i + B_{ii}u_i, i = 1,2,\cdots,N.
\end{cases}
\tag{4.2}
$$

通常（4.2）所描述的大系统具有这样的性质：每一个决策者（或控制站）只知道全系统的部分信息，而每一个决策者又有各自的不同时标模型，故称之为“多时标”的大系统．Khalil [F1]；Kokotovic [F2] 对确定性的（4.2）系统做了分析，得出 u_i 可分成慢部分（用以控制 x_i）和快部分（用来控制 z_i），在文〔F3〕中还讨论了（4.2）的极点配置和 Pareto 解．在随机问题中，仔细地研究还需确立合适的多时标模型．此外，还会遇到模拟快随机变量的困难，以及存在非经典信息模式的问题．为了说明这些概念，我们考虑

$$
\begin{cases}
\dot{x} = A_{00}x + \sum_{i=1}^{N} A_{0i}z_i + \sum_{i=1}^{N} B_{0i}u_i + G_0W, \\
\mu_i\dot{z}_i = A_{i0}x + A_{ii}z_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \mu_{ij}A_{ij}z_j + B_{ii}u_i + \sqrt{(\mu_i)}G_iW,
\end{cases}
\tag{4.3}
$$

其中，$W(t)$ 是高斯白噪声过程，每一个决策者的信息模式和目标函数分别为

$$
\begin{cases}
y_{i0} = c_{i0}x + v_{i0} \\
y_{ii} = c_{ii}z_i + \sqrt{(\mu_i)}v_{ii} \\
y_i = [y_{i0}^{\tau}, y_{ii}^{\tau}]^{\tau}, i = 1,2,\cdots,N,
\end{cases}
\tag{4.4}
$$

$$J_i = E\left\{ \mathbf{x}_T^{\tau}\Gamma_{0i}\mathbf{x}_T + \mu_i \mathbf{z}_{iT}^{\tau}\Gamma_{ii}\mathbf{z}_{iT} + \int_0^T\left(\mathbf{x}^{\tau}\mathbf{Q}_{i0}\mathbf{x} + \mathbf{z}_i^{\tau}\mathbf{Q}_{ii}\mathbf{z}_i + \mathbf{u}_i^{\tau}\mathbf{R}_i\mathbf{u}_i\right)dt \right\}, \tag{4.5}$$

其中，$v_{i0}(t)$，$v_{ii}(t)$都是高斯白噪声，且与$W(t)$互相独立的。显然，由(4.3)～(4.5)所规定的随机问题，在任何意义下的解都与非经典信息模式有关，没有可实现的有限维解存在，为了得到可实现的解，必须对信息结构做进一步假设。在任何情形下，最优控制(策略)都导致一组互相耦合的积分—微分方程的解，它们的极限解是否对应于多时标问题的解还是不清楚的。为了回答这一问题，〔F4〕、〔F5〕分别就两类重要的拟古典信息模式详细地研究了（4.3）～（4.5）所描述的控制问题。前者针对每一个决策者拥有预先指定的有限维补偿器结构的一类随机 Nash 对策建立了多时标问题的适定性（Well—Posedness)，后者对带有采样观测的静态和动态队问题，在一步延迟观测的通讯模式条件下，建立了同样的结果。而在文〔F9〕中已取消了各快子系统弱相互作用的限制，提出足以保证多参数边界层系统渐近稳定的“块状D—稳定性”条件，给出判别一类系统满足这种条件的一些准则。关于块状D—稳定条件对一类非线性系统的推广，及其与多时标方法的关系；大系统的分散化镇定；大型奇摄动系统的稳定性分析等等问题的近期工作请看F组参考文献。

五、结　束　语

限于篇幅，有关奇摄动方法（或双时标方法）在控制理论中的许多方面的应用（诸如奇摄动微分对策；奇异系统；电力系统和网络；高增益反馈系统；轨道最优化；随机系统的建模、估计和控制；分布参数系统；自适应控制等等）都不可能一一介绍，有的只给出一些近期的参考文献。这里特别指出，列在B组的参考文献是值得一读的，其中有的拓广了奇摄动方法的应用领域；有的则对渐近方法的数学基础进行深入的研究，提出奇摄动的新方法.总之，综观近几年来的研究动态，当前的趋势是：

1）在建模方面，已超出传统的奇摄动模型（用小参数乘在快变量的导数前面），进而研究两类更一般的奇摄动模型，第一类是高增益反馈控制系统和某些奇异系统，第二类是由于某些大型动态网络中存在“稳秘”的参数，使其某些状态变量互相绞结成一牢不可破的小组，这就导致它的模型具有“多型性”的形式(或者说具有多时标特性)。

2）在分析方面，已趋向于围绕着离散时间、随机和非线性的系统，按时标分离的方式来分析它的可控性、稳定性以及极点配置等问题。特别，奇摄动方法很有希望作为自适应系统的鲁棒性分析的强有力工具。在线性系统的新频域方法和几何方法中也开始采用奇摄动方法了。

3）在设计方面，双时标状态反馈设计方法，已开始推广到输出反馈、观测器和补偿器的设计，对一类随机非线性系统的合成控制方法的成功，使它能推广到很广泛的一类奇摄动系统，而通过“多时标”模拟的途径，使得多时标方法在大系统的分散化控制

以及微分对策问题中的应用具有很大的潜力.

参考文献

A. Surveys and Monographs

〔1〕 Kokotovic, P. V., R. E. O'Malley, Jr and P. Sannuti, Singular Perturbations and Order Reduction in Control Theory—A Overview, Automa tica, **12**, 2, (1976), 123—132.

〔2〕 Saksena, V. R., J. O'Reilly and P. V. Kokotovic, Singular Perturbations and Time—scale Methods in Control Theory: Survey 1976—1983, Automatica, **20**, 3, (1984), 273—293.

〔3〕 O'Malley, R. E., Jr., Book Review, Bulletin AMS, 7, 414, (1982).

〔4〕 Ardema, M. (Ed.), Singular Perturbations in Systems and Control, CISM Courses and Lectures, **280**, Springer, New York, (1983).

〔5〕 Arnold, V. I., Geometrical Methods in the Theory of Ordinary Differential Eguations, Springer, Berlin, (1983).

〔6〕 Blankenship, G. L., Asymptotic Analysis in Mathematical Physics and Control Theory: Some Problems with Common Features, Richerche di Automatica, **10**, (1979), 265.

〔7〕 Campbell, S. L., Singular Systems of Differential Equations Ⅱ. Pitman, New York, (1982).

〔8〕 Chow, J. H. (Ed.), Time—scale Modeling of Dynamic Networks with Applictions to Power Systems, Lecture Notes in Control Information Science **46**. Springer, Berlin, (1982).

〔9〕 Dontchev, A. L., Perturbations, Approximations and Sensitivity Analysis of Optimal Control Systems, Lecture Notes in Control Information Science, **52**, Springer, Berlin, (1983).

〔10〕 Eckhaus, W. and E. M. de Jager, Theory and Applications of Singular Perturbations, Springer, Berlin, (1982).

〔11〕 Ioannou, P. A. and P. V. Kokotovic, Adaptive Systems with Reduced Models, Lecture Notes in Control Information Science, **47**, Springer, Berlin, (1983).

〔12〕 Kevorkian, J. and J. D. Cole, Perturbation Methods in Applied Mathematics, Springer, Berlin, (1981).

〔13〕 Lomov, S. A., Introduction to the General Theory of Singular Perturbations, Nauka, Moscow, (1981).

〔14〕 Moiseev, N. N. and F. L. Chernousko, Asymptotic Methods in the Theory of Optimal Control, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**26**, 5, (1981), 993-1000.

[15] Pervozvanskii, A. A. and V. G. Gaitsgori, Decomposition, Aggregation and Suboptimization, Nauka (in Russian), (1979).

[16] Schuss, Z., Singular Perturbation Methods in Stochastic Differential Equations of Mathematical Physics, SIAM Review, **22**, 2, (1980), 119-155.

[17] Vasileva, A. B. and V. F. Butuzov, On Some Results of the Theory of Singular Perturbation in the Last Fiveyears, Vestnik, Mos. Univ. Comp. Math. Cyber. Ser., **15**, 3, (1981), 35.

B. Asymptotic Methods

[1] Bobisud, L. E., Christenson, C. O., A Singular Singularly Perturbed System of Nonlinear Equations From Chemical Kinetics. J. Math. Anal. & Appl., **74** (1980), 296-310.

[2] Fenichel, N., Geometric Singular Perturbation Theory for Ordinary Differential Equations, J. Diff. Equations, **31**, (1979), 53.

[3] Glizer, V. J., M. G. Dmitriev, Singular Perturbations and Generalized Functions, Soviet Dokl, **20** (1979), 1360.

[4] Matkowsky, B. J., Reiss, E. L., Singular Perturbations of Bifurcanions, SIAM J. Appl. Math., **33**, 2, (1977), 230-255.

[5] Mika, J., Singularly Perturbed Evolution Equations in Banach Spaces. J. Math. Anal. & Appl., **58**, 1, (1977), 189-201.

[6] Naidu, D. S., Rajagopalan, P. K., Application of Vasileva's Singular Perturbation Method to a Problm in Ecology. Int. J. Syst. Sci., 10, (1979), 761.

[7] Nipp, K., An Extension of Tichonov's Theorem for the Planar Case. J. Appl. Math. Phys. (ZAMP), **34**, (1983), 277.

[8] Reiss, E. L., A Modified Two Time Method for the Dynamic Transitions of Bifurcation, SIAM J. Appl. Math., **38**, 2, (1980), 249-260.

[9] Sastry, S. S., Desoer, C. A., Jump Bebaviour of Circuits and Systems, IEEE Trans. on Circuits & Syst., CAS-**28**, 12, (1981), 1109-1124.

[10] Sastry, S. S., Hijab, O., Bifurcation in the Presence of Small Noise, Syst. & Control Lett., **1**, (1981), 159.

[11] Viktorov, B. V., Application of the Singular Perturbation Method

to Automatic Control Systems, Soviet Doklady, **236**, (1977), 2.

[12] Wollkind, D. J., Singular Perturbation Techniques: a Comparison of the Method of Matched Asymptotic Expansions with That of Multiple Scales, SIAM Review, **19**, 3, (1977), 502-516.

C. Time-scale Properties of Singularly Perturbed Systems

[1] Javid, S. H., Uniform Asymptotic Stability of Linear Time Varying Singularly Perturbed Systems, J. Franklin Inst., **305**, (1978), 27.

[2] Ioannou, P., Robustness of Absolute Stability, Int. J. Control, **34**, 5, (1981), 1027-1033.

[3] Saksena, V. R., P. V. Kokotovic, Singular Perturbation of the Popov-Kalman-Yakubovich Lemma, Systems & Control Lett., **1**, (1981), 65.

[4] O'Malley, R. E., Jr and R. L. Anderson, Time-scale Decoupling and Order Reduction for Linear Time-varying Systems, Opt. Cont. Meth. Appl., **3**, (1982), 133.

[5] Phillips, R. G., The Equivalence of Time-scale Decomposition Techniques Used in the Analysis and Design of Linear Systems, Int. J. Cont., **37**, 6, (1983), 1239-1257.

[6] Peponides, G., P. V. Kokotovic, J. H. Chow, Singular Perturbatios and Time Scale in Nonlinear Models of Power Systems, IEEE Trans. Circuits & Syst., CAS-**29** (1982), 758.

[7] Peponides, G., P. V. Kokotovic, Weak Connections, Time Scales and Aggregation of Nonlinar Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**28**, 6, (1983), 729-735.

D. Discrete-time Systems

[1] Phillips, R. G., Reduced Order Modeling and Control of Two Time Scale Discrete Systems, Int. J. Control, **31**, 4, (1980), 765-780.

[2] Mahmoud, M. S., Structural Properties of Discrete Systems with Slow and Fast Modes. J. Large Scale Syst., **3**, (1982), 227.

[3] Blankenship, G., Singular Perturbed Difference Equations in Optimal Control Problems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**26**, 4, (1981), 911-917.

[4] Kando, H., T. Iwazumi, Sub-oplimal Control of Discrete Regulator Problems Via Time-scale Decomposition, Int. J. Control, **37**, 6, (1983), 1323-1347.

〔5〕 Rao, A. K., D. S. Naidu, Singular Perturbation Method Applied to the Open-loop Discrete Optimal Control Problem, Optimal Control Appl. & Methods, **3**, (1982) 3, 121.

E. Composite Control

〔1〕 Suzuki, M., Miura, M., Stabilizing Feedback Controllers for Singularly Perturbed Linear Constant Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**21**, 1, (1976), 123-124.

〔2〕 Chow, J. H., P. V. Kokotovic, A Decomposition of Near Optimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**21**, 5, (1976), 701-705.

〔3〕 Phillips, R. G., P. V. Kokotovic, A Singular Perturbation Approach to Modeling and Control of Markov Chains, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**26**, 5, (1981), 1087-1093.

〔4〕 Dragan, V., A. Halanay, Suboptimal Stabilization of Linear Systems with Several Time Scales. Int. J. Cont., **36**, 1, (1982), 109-126.

〔5〕 Suzuki, M., Composite Controls for Singularly Perturbed Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**26**, 2, (1981), 505-507.

〔6〕 Saberi, A., H. Khalil, Quadratic-type Lyapunov Functions for Singularly Perturbed Systems, 20th IEEE Conf. on Decision and Control, (1981), 204-205.

〔7〕 Saberi, A., H. Khalil, Two Time Scale Feedback Design of Nonlinear Singularly Perturbed Systems, Proc. ACC, 441, (1983).

〔8〕 Chow, J. H., P. V. Kokotovic, A Two-stage Lyapunov-Bellman Feedback Design of a Class of Nonlinear Systems, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**26**, 3, (1981), 656-663.

〔9〕 连瑞兴，大型非线性奇摄动系统的近乎最优反馈控制，厦门大学学报（自然科学版），**22**，2，(1983)，156-164.

〔10〕 Saberi, A., H. Khalil, Stabilization and Regulation of Nonlinear Singularly Perturbed Systems-composite Control, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**30**, 8, (1985), 739-746.

F. Modeling and Stability of Large Scale Systems

〔1〕 Khalil, H., P. V. Kokotovic, Decentralized Stabilization of Systems with Slow and Fast Modes. J. Large Scale Systems, **1**, (1980), 141.

[2] Kokotovic, P. V., Subsystems, Time-scales and Multimodeling, Automatica, **17**, 17, (1981), 789-795.
[3] Khalil, H. K., P. V. Kokotovic, Control Strategies for Decision Makers Using Different Models of the Same System, IEEE Trans. Aut. Cont., AC-**23**, (1978), 289-298.
[4] Saksena. V. R., T. Basar, A Multimodel Approach to Stochastic Team Problems, Automatica, **18**, 6, (1982), 713-720.
[5] Saksena, V. R., J. B. Cruz, Jr, A Multimodel Approach to Stochastic Nash Games, Automatica, **18**, 3, (1982), 295-304.
[6] Singh, Y. P., Multiple Time Analysis of Coupled Non-linear Systems, Int. J. Control, **36**, 1, (1982), 99-107.
[7] Farber, N., J. Shinar, Approximate Solution of Singularly Perturbed Nonlinear Pursuit-evasion Games. J. opt. and Appl., **32**, 1, (1980), 39-72.
[8] Salman, M. A., J. B. Cruz, Jr, Team-optimal Stackelberg Strategies for Systems with Slow and Fast Modes. Int. J. Control, **37**, 6, (1983), 1401-1416.
[9] Khalil, H. K., On the Existence of Positive Diagonal P Such That $PA+A^TP<0$, IEEE Trans. Aut. Control, AC-**27**, 1, (1982), 181-184.

THE METHOD OF SINGULAR PERTURBATIONS IN CONTROL THEORY OF LARGE SCALE SYSTEMS

Lian Ruixing

(Xiamen University)

Abstract

In this paper we reviewed the basic concepts of the method of singular perturbations, and summarized recent application results of this method in large scale system theory and practice. References given in this paper are suitable for engineers and applied mathematicians working in the field of Control, Estimation, Stability analysis and Dynamic optimization of large scale systems.