第3卷 第4期 控制理论与应用 Vol.3, No.4
1986年12月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Dec., 1986

输出反馈配置极点的新方法

陈树中 韩正之
（华东师范大学）（上海徐汇区业余大学）

摘 要

本文定义了系统的最大输出均匀分布指数 t_m。给出了利用输出反馈配制闭环极点的新方法，对几乎所有的系统，能任意近似配置的极点个数为 $\min[n,(m-1)t_m+r]$。

一、引 理

考虑能控能观时不变线性系统 (C,A,B)

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax+Bu, \\ y=Cx, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $x\in R^n$，$u\in R^m$，$y\in R^r$，rank $B=m$，rank $C=r$。由对偶性，可设 $r\geq m$。假定能控指数为 $\nu_1\geq\nu_2\cdots\geq\nu_m$，且（1）已化为能控规范型[1]。

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1m} & B_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ A_{m1} & \cdots & A_{mm} & B_m \\ C_1 & \cdots & C_m & 0 \end{bmatrix}, \quad A_{ii} = \begin{bmatrix} 0 & \vdots & I_{\nu_{i-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{ii}^T & \end{bmatrix}, \quad A_{ij} = \begin{bmatrix} 0 \\ \cdots\cdots \\ a_{ij}^T \end{bmatrix},$$

$$B_i = \begin{bmatrix} & 0 & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0\cdots0 & 1 & 0\cdots0 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

第 i 位

因研究输出反馈，这里假定（2）中 B_i 的非零行有特殊形式。

记 $$a_{ii}(\lambda) = \lambda^{\nu_i} - a_{ii}^T \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_{i-1}} \end{bmatrix}, \; i\in \underline{m}, \quad a_{ij}(\lambda) = -a_{ij} \begin{bmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{\nu_{i-1}} \end{bmatrix},$$

$$i,j\in\underline{m}, \; i\neq j. \tag{3}$$

引理 1 若有复数 λ_0，某个 $i_0\in\underline{m}$ 成立 $a_{i_0j}(\lambda_0)=0$，$\forall j\in\underline{m}$，则 $\lambda_0\in\sigma(A)$，

本文于1984年3月12日收到，1986年7月14日收到修改稿。

λ_0 是 $(A,\ \hat{B}_{i_0})$ 的输入解耦零。$\hat{B}_{i_0}$ 是 B 去掉第 i_0 列后的矩阵。

定义 1 若式(2)矩阵块 C_i 中独立列向量为 c_j^i，$j=1\cdots\mu_i$，且 $\{c_j^i,\ j\in\underline{\mu_i},\ i\in\underline{m}\}$ 构成 C 列向量空间的基，记 $t=\min\limits_{i\in\underline{m}}\mu_i$，称 t 为能控规范型下 C 的一个输出均匀分布指数。

均匀分布指数不唯一，但有最大值，记为 t_m。

引理 2 若

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank} C_m\geq t,\\
&\operatorname{rank}(C_{m-1},\ C_m)\geq 2t,\\
&\quad\vdots\\
&\operatorname{rank}(C_1\cdots C_m)\geq mt,
\end{aligned}
\tag{4}
$$

则可找到 Q，G 使 $(QAQ^{-1},\ QBG)$ 保持能控规范型，CQ^{-1} 有均匀分布指数 t。

引理 3 设 $\{a_1\cdots a_n\}$，$\{b_1\cdots b_n\}$ 是两组向量集合，张成的空间记为 X。若 $\{a_{i_1}\cdots a_{i_t},\ b_{j_1}\cdots b_{j_s}\}$ 是 X 的基，$a_{i_h}\in\{a_1\cdots a_n\}$，$b_{j_h}\in\{b_1\cdots b_n\}$，$s>t$，则对任一 $\bar{t}$，$t<\bar{t}\leq s$，对几乎所有的实数 d，可以从 $\{a_i+db_i,\ i\in\underline{n}\}$ 中选出 $\bar{t}$ 个向量，在 $\{b_i,\ i\in\underline{n}\}$ 中选出 $s+t-\bar{t}$ 个向量一起构成 X 的基。

证 设 $M_1(d)=(a_{i_1}+db_{i_1}\ \vdots\cdots\vdots\ a_{i_t}+db_{i_t})$，$d=0$ 时 $\operatorname{rank}M_1(0)=t$，让 $f(d)=\det M_1^T(d)M_1(d)$，它是 d 的多项式且不恒为零，因此对几乎所有实数 d，$\operatorname{rank}M_1(d)=t$。再设 $M_2(d)=(a_{j_1}+db_{j_1}\ \vdots\cdots\vdots\ a_{j_s}+db_{j_s})$，类似可证对几乎所有实数 d，$\operatorname{rank}M_2(d)=s$。从而对几乎所有实数 d $\operatorname{rank}M_1(d)=t$，$\operatorname{rank}(M_1(d),\ M_2(d))\geq s$ 同时成立，因 $t<\bar{t}\leq s$，于是总可在 $M_2(d)$ 中取 $\bar{t}-t$ 列，使得对几乎所有实数 d，$\{a_{i_1}+db_{i_1},\cdots,a_{i_t}+db_{i_t},\ a_{i_{t+1}}+db_{i_{t+1}}\cdots a_{i_{\bar{t}}}+db_{i_{\bar{t}}}\}$ 线性无关，其中 $a_{i_{t+1}}+db_{i_{t+1}}\cdots a_{i_{\bar{t}}}+db_{i_{\bar{t}}}$ 从 $M_2(d)$ 中选出。因对几乎所有实数 d，向量 $\{b_{j_k},\ k\in\underline{s}\}$ 与这挑出的 $\bar{t}$ 个向量张成 X，所以可在 $\{b_{j_k},\ k\in\underline{s}\}$ 中再选出 $t+s-\bar{t}$ 个向量与这 $\bar{t}$ 个向量构成 X 的基。

推论 1 若 $\{a_j^i,\ j\in\underline{n}\}$，$i\in\underline{m}$ 是 m 个向量集，它们的基分别是 $\{\alpha_j^i,\ j\in\underline{n_i}\}$，$i\in\underline{m}$，这 m 组基张成空间 X，若 $n_1<n_2$，则对任一 $\bar{t}$，$n_1<\bar{t}\leq n_2$，对几乎所有实数 d，可以 $\{a_j^1+da_j^2,\ j\in\underline{n}\}$ 中选出 $\bar{t}$ 个线性无关向量，在 $\{a_j^2,\ j\in\underline{n_2}\}$ 中选出 $n_1+n_2-\bar{t}$ 个线性无关向量，它们连同 $\{\alpha_j^i,\ j\in\underline{n_i}\}$，$i\in\{3,\cdots,m\}$ 构成 X 的基。

引理 2 证明　仅需证，当 rank $(C_{m-1},\ C_m)\geq 2t$，rank $C_m\geq t$ 时存在 Q,G 使 $(QAQ^{-1},\ QBG)$ 保持型式（2），而 C_m，C_{m-1} 经变换后各自包含的独立列向量不少于 t 个且相互独立．显然只要考虑 rank $C_{m-1}<t$．分两种情形．

1．$\nu_{m-1}=\nu_m$．记 $s=\nu_1+\cdots+\nu_{m-2}+1$（即 C_{m-1} 第一列的列数），对（2）式第一个矩阵作下面运算：

第一步：$s+\nu_{m-1}$ 列乘 d 加到 s 列，s 行乘 $-d$ 加到 $s+\nu_{m-1}$ 行．

第二步：$s+\nu_{m-1}+1$ 列乘 d 加到 $s+1$ 列，$s+1$ 行乘 $-d$ 加到 $s+\nu_{m-1}+1$ 行．

第 ν_m 步：$s+\nu_{m-1}+\nu_m-1(=n)$ 列乘 d 加到 $s+\nu_{m-1}-1$ 列，$s+\nu_{m-1}-1$ 行乘 $-d$ 加到 $s+\nu_{m-1}+\nu_m-1$ 行．

经上面 ν_m 次座标变换，式（2）中 A 的各子块 A_{ij} 形式不变，C_{m-1} 变成 $C_{m-1}+dC_m$，B_m 的最后一行等于本身加上 B_{m-1} 最后一行乘 $-d$，B 的其余行不变，因而存在 G 使 B 仍有（2）中形式，由引理 3 知结论成立．

2．$\nu_{m-1}>\nu_m$，把 1 中步骤修改如下：

第一步：$s+\nu_{m-1}$ 列乘 d 加到 $s+\nu_{m-1}-\nu_m$ 列，$s+\nu_{m-1}-\nu_m$ 行乘 $-d$ 加到 $s+\nu_{m-1}$ 行。

余下 ν_{m-1} 步依次类推，经 ν_m 步，C_{m-1} 变成 $(C^1_{m-1}\ \vdots\ C^2_{m-1}+dC_m)$，其中 $C^1_{m-1}\in R^{r\times(\nu_{m-1}-\nu_m)}$，因而结论成立．

由推论 1 不难用归纳法把上述过程推广到一般场合．

二、算　法

第一步：将 (C,A,B) 化成能控规范型（2）．

第二步：计算满足（4）的最大 t_m．

第三步：用引理 2 给出的方法，使 C 有均匀分布指数 t_m．记座标变换和输入变换阵为 Q 和 G，（2）式中 B 的非零行组成的满秩阵为 $\overline{B}_m$，可得 $Q\overline{B}_mG=I_m$．

第四步：选取 k_i，$i\in\{2,3,\cdots,m,\}$，使得

$$\lambda_s^{\nu_i}-a_{ii}^T\begin{pmatrix}1\\ \lambda_s\\ \vdots\\ \lambda_s^{\nu_i-1}\end{pmatrix}-k_iC_i\begin{pmatrix}1\\ \lambda_s\\ \vdots\\ \lambda_s^{\nu_i-1}\end{pmatrix}=0, \tag{5}$$

$$a_{ij}^T\begin{pmatrix}1\\ \lambda_s\\ \vdots\\ \lambda_s^{\nu_j-1}\end{pmatrix}+k_iC_j\begin{pmatrix}1\\ \lambda_s\\ \vdots\\ \lambda_s^{\nu_j-1}\end{pmatrix}=0,\ \forall j\in \underline{m},\ j\neq i, \tag{6}$$

其中 $s=1,\cdots,t_m$. 当（4）式成立时，对几乎所有的（$m-1$）t_m 个复数共轭成对出现的复数集，（5）、（6）总有解. 从而找到了 K_1

$$K_1=\begin{pmatrix}0\\k_2\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}\qquad A_h=A+BG^{-1}K_1C.$$

可以任意近似配置（$m-1$）t_m 个复数共轭成对出现的极点.

第五步：记 b_i 为 B 的第 i 列，将（A_h，b_1）化成

$$\begin{bmatrix}Q_2A_hQ_2^{-1} & Q_2b_1\\ CQ_2^{-1} & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\overline{A}_{11} & \overline{A}_{12} & \overline{b}_1\\ 0 & \overline{A}_{22} & 0\\ \overline{C}_1 & \overline{C}_2 & 0\end{bmatrix},\tag{7}$$

其中（$\overline{A}_{11},\overline{b}_1$）是能控对，由于（$C,A,B$）能观，所以（$\overline{C}_1$，$\overline{A}_{11}$）是能观对. 让 rank $\overline{C}_1=r_1$，则可找到 k_1，再近似配置 r_1 个极点. 由引理1，第四步中配置的$(m-1)t_m$个极点不会改变. 因此总配置数为

$$\min\{n,\ r_1+(m-1)t_m\}.\tag{8}$$

反馈阵是
$$K=G^{-1}\begin{pmatrix}k_1\\\vdots\\k_m\end{pmatrix}.\tag{9}$$

按几乎所有的定义不难推知，对几乎所有的系统（C,A,B）

$$r_1=\mathrm{rank}\overline{C}_1=\min\{r,n-(m-1)t_m\}.\tag{10}$$

因此得下面结论：

命题 1 对几乎所有的能控能观系统（C,A,B），可以任意近似配置的极点数为 $\min\{n,r+(m-1)t_m\}$.

注 1） 在第五步中若 $r_1<\min\{r,n-(m-1)t_m\}$，让第四步中配置的极点在允许范围内扰动，由几乎所有定义，对大多数系统（10）式成立.

注 2） 可以证明，对几乎所有系统 $t_m=\min\left\{v_m,\left[\dfrac{r}{m}\right]\right\}$，$[x]$ 表示不大于 x 的最大整数. 因此我们的结果优于 $\min\{n,m+r-1\}$.

参 考 文 献

〔1〕 Wolovich, W. A., Linear Multivariable Systems Springer－vorlag, New York,（1974）.

〔2〕 Kimura, H., Pole Assignment by Gain Output Feedback, IEEE Trans., AC－20, 4,（1975）, 509－516.

〔3〕 Seraji, H., A New Method for Pole Placement Using Output Feedback Int. J. Control, **28**, 1, (1978), 147－155.

A NEW METHOD FOR POLE ASSIGNMENT USING OUTPUT FEEDBACK

Chen Shuzhong
(East－China Normal University, Shanghai)

Han Zhengzhi
(Shanghai Xuhui District Part-time Colloge)

Abstract

In this paper the maximum index of output uniform distributions is defined and a new method for pole assignment using output feedback is given. For almost all systems the number of poles which can be arbitravy assigned is $\min\{n,(m-1)t_m+r\}$.