第3卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol. 3, No. 4
1986年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1986

一种求解带约束最优控制问题的算法

吴铁军　吕勇哉

(浙江大学)

摘　要

本文提出了一种求解带有复杂的等式及不等式约束条件的非线性最优控制问题的新算法。本算法效率高，通用性强，且收敛性良好。此外，本算法可方便地应用于大系统最优控制，并易于在微型计算机上实施。

一、问题的描述

考虑如下离散形式的最优控制问题（P）

$$(P)\qquad \min_{X,U} J=\Phi[X(N)]+\sum_{k=0}^{N-1}L[X(k),U(k),k] \tag{1}$$

约束条件为

$$X(k+1)=f[X(k),U(k),k],\quad X(0)=X(0), \tag{2}$$

$$h[X(k),U(k),\ k]=0, \tag{3}$$

$$g[X(k),\ U(k),k]\leq 0, \tag{4}$$

其中，$X\in R^n$，$U\in R^m$；f、h、g 分别为 n 维、p 维和 q 维泛函；J、Φ、L 均为标量泛函。假设Φ、L、f、h、g 满足必要的光滑性条件以保证问题（P）的最优解存在且唯一[2]。此外，设终端时间 N 给定。

定义 Hestenes 罚因子序列$\{c^i\}$以及 Hestenes 乘子序列$\{\lambda^i\}$、$\{\mu^i\}$分别满足

$$0<c^i\leq c^{i+1}<+\infty, \tag{5}$$

$$\lambda^{i+1}=\lambda^i+c^i\cdot h[X,U,k], \tag{6}$$

$$\mu^{i+1}=\max(0,\mu^i+c^i\cdot g[X,U,k]), \tag{7}$$

其中 $c\in R$，$\lambda\in R^p$，$\mu\in R^q$。

其次定义增广的 Lagrange 函数 L_c 如下：

$$L_c[X,U,P,\lambda,\mu,c]$$

本文于1984年12月12日收到。1986年7月9日收到修改稿。

$$\triangleq \Phi[X(N)] + \sum_{k=0}^{N-1}\{L[X,U,k] + P^T(k+1)[f(X,U,k) - X(k+1)]$$

$$+\lambda^T(k)\cdot h[X,U,k] + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{p} h_j^2[X,U,k] + \frac{1}{2c}\sum_{r=1}^{q}[\max{}^2(0,\mu_r(k)$$

$$+c\cdot g_r[X,U,k]) - \mu_r^2(k)]\}, \quad (8)$$

其中，$P\in R^n$ 为 Lagrange 乘子向量；c、λ、μ 分别为式（5）～（7）所定义。

定理 1　对于给定的 Lagrange 乘子向量 P^*，设(X^{*i},U^{*i})为以下问题(P_a)

$$(P_a)\qquad \min_{X,U} L_c[X,U,P,\lambda^i,\mu^i,c^i] \quad (9)$$

的解；又设(X^*,U^*)为问题(P)的解，则在适当的假设条件下[6]，存在上标 i^* 以及 c^* 满足 $i^*>0$，$0<c^*<+\infty$，使对于所有的 $i\geq i^*$和$c^i\geq c^*$，有

$$(X^{*i},\ U^{*i})\longrightarrow(X^*,\ U^*) \quad (10)$$

成立，且其收敛性至少是线性的。

事实上，当问题(P)满足 Kuhn－Tucker条件[3][4]时，我们知道存在唯一的P^*、λ^*、μ^*，使下述问题

$$\min_{X,U} L_c[X,U,P^*,\lambda^*,\mu^*,c^*] \quad (11)$$

的解即为问题(P)的最优解$(X^*,\ U^*)$。其次，对于给定的P^*，Bertskas 证明了[1]，当 Hestenes 乘子序列$\{\lambda^i\}$、$\{\mu^i\}$由式（6）与式（7）所规定时，存在实数 c^* 以及整数 M，满足$0<c^*<+\infty$，$0<M<+\infty$，使以下不等式成立：

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\|(\lambda^{*i+1},\mu^{*i+1})-(\lambda^*,\mu^*)\|}{\|(\lambda^{*i},\mu^{*i})-(\lambda^*,\mu^*)\|}\leq\frac{M}{c},\quad \forall c\geq c^*, \quad (12)$$

$$\|(X^{*i},U^{*i})-(X,U)\|\leq\frac{M}{c}\|(\lambda^{*i},\mu^{*i})-(\lambda^*,\mu^*)\|,\quad \forall c\geq c^*. \quad (13)$$

即 Hestenes 乘子$(\lambda^i,\ \mu^i)$至少线性地收敛于$(\lambda^*,\ \mu^*)$，因而$(X^{*i},\ U^{*i})$也以同样的速度收敛于(X^*,U^*)，且收敛是全局性的。

再定义增广的 Hamilton 函数如下：

$$H_c(k) = L[X,U,k] + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j(k)\cdot h_j[X,U,k] + \frac{c}{2}\sum_{j=1}^{p}h_j^2[X,U,k]$$

$$+\frac{1}{2c}\sum_{r=1}^{q}[\max{}^2(0,\mu_r(k)+c\cdot g_r[X,U,k]) - \mu_r^2(k)]$$

$$+\sum_{s=1}^{n} p_s(k+1)\cdot f_s[X,U,k].\tag{14}$$

定理 2　设λ^*、μ^*、c^*已知．则P^*及(X^*,U^*)满足以下一阶必要条件：

$$\frac{\partial\Phi}{\partial X^*(N)}-P^*(N)=0,\tag{15}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial X^*(k)}-P^*(k)=0,\tag{16}$$

$$\frac{\partial H_c}{\partial U^*(k)}=0,\tag{17}$$

$k=0,\cdots,N-1$.

事实上在式(14)的定义下，L_c可被改写为

$$L_c[X,U,P,\lambda,\mu,c]=\Phi[X(N)]+\sum_{k=0}^{N-1}[H_c(k)-P^T(k+1)X(k+1)].\tag{18}$$

令其一阶变分$\delta L_c=0$，考虑到$\delta X(0)=0$以及$\delta X(k)$，$\delta U(k)$和$\delta X(N)$的任意性，即得式(15)～(17)．

由定理2立即可得以下推论：

推论　设λ^*、μ^*、c^*已知．则带约束最优控制问题(P)的解(X^*, U^*)满足必要条件式(15)～(17)．

这一推论的成立从定理1与定理2的联系来看是明显的．

二、算　法

以上推论及式(5)～(7)和式(15)～(17)实际上给出了本文的算法．算法的具体步骤如下：

步骤 1　任意给定初值$\lambda^0(k)$，$\mu^0(k)$，$k=0,\cdots,N-1$以及$c^0>0$．

从$i=0$开始进行以下各步骤：

步骤 2　对于已知的$\lambda^i(k)$，$\mu^i(k)$以及c^i，根据方程式(2)及式(15)～(17)解出$X(k)$，$U(k)$，记为$X^i(k)$，$U^i(k)$．

步骤 3　若对于所有的$X^i(k)$，$U^i(k)$满足

$$h[X^i(k),\ U^i(k),\ k]=0,$$

$$g[X^i(k),\ U^i(k),\ k]\le 0,$$

则迭代过程停止，$X^i(k)$，$U^i(k)$，$k=0,\cdots,N$即为问题(P)的解．否则进行下一步骤．

步骤 4　根据式（5）～（7），利用以上各步骤的结果计算 $\lambda^{i+1}(k)$，$\mu^{i+1}(k)$及c^{i+1}。

步骤 5　令 $i+1\Rightarrow i$，并转步骤2。

三、计算示例

采用本文算法计算了以下例子：

$$\min J=\Delta t\sum_{k=0}^{N-1}\left[x_1^2(k)+x_2^2(k)+0.005u(k)\right].$$

约束条件为

$$x_1(k+1)=x_1(k)+(1-e^{-\Delta t})x_2(k)-(1-\Delta t-e^{-\Delta t})u(k),\quad x_1(0)=0,$$

$$x_2(k+1)=e^{-\Delta t}x_2(k)+(1-e^{-\Delta t})u(k),\quad x_2(0)=-1,$$

$$x_2(k)-8\left(\frac{k}{N}-0.5\right)^2+0.5\leq 0.$$

图1和图2给出了 $x_2(k)$和 $u(k)$在迭代过程中的收敛情况。计算结果表明，迭代 8 次后目标函数和最优控制的精度已达到6位有效数字。而在 Mehra 和 Davis 使用推广梯度法对同一实例的计算中[8]采用同样的参数，需经26次迭代才达到相同的精度。

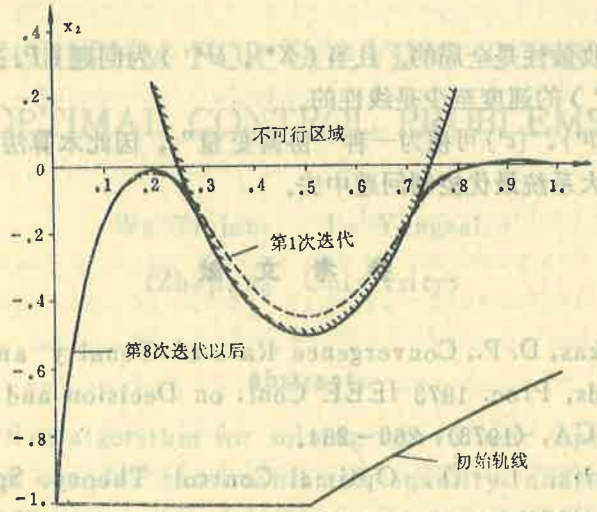

图 1　x_2轨线在迭代过程中的收敛情况

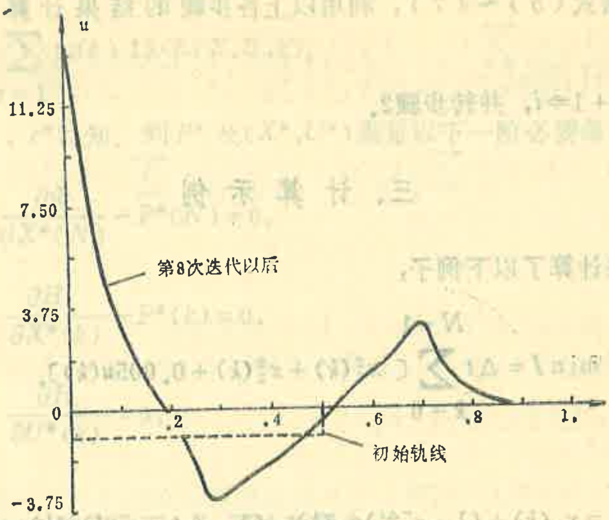

图 2 u轨线在迭代过程中的收敛情况

四、结 论

1. 本文提出的算法使用Hestenes的迭代格式[9]（式(6)～(7)）计算乘子(λ^*, μ^*)的值，同时当罚因子c满足$0<c^*\leq c<+\infty$时算法的收敛性得到保证。因而总的计算工作量少于普通乘子法[6]，且避免了罚函数法所存在的病态现象以及收敛速度缓慢的缺点[7]。

2. 本算法的收敛性是全局的，且当(X^{*i}, U^{*i})为问题(P_a)的精确极值解时，其收敛于(X^*, U^*)的速度至少是线性的。

3. 序列$\{\lambda^i\}\{\mu^i\}$、$\{c^i\}$可视为一种"协调变量"，因此本算法可看作一种协调算法而方便地推广到大系统最优控制问题中去。

参 考 文 献

〔1〕 Bertsekas, D. P., Convergence Rate of Penalty and Multiplier Methods, Proc. 1973 IEEE Conf. on Decision and Control, San diago, CA, (1973), 260-264.

〔2〕 Berkovitz, L. D., Optimal Control Theory, Springer, New York, (1974).

〔3〕 Bradley, S. P., Hax, A. C. and Magnanti, T. L., Applied Mathematical Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Massachusetts, (1977),

〔4〕 Ohno, K., A New Approach to Differential Dynamic programming for Discrete Time Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**23**, (1978), 37-47.

〔5〕 Berteskas, D. P., Necessary and Sufficient Conditions for a Penalty Method to be Exact, Math. Programming, **9**, (1975), 87-99.

〔6〕 Bryson, A. E. and Ho, Y. C., Applied Optimal Control, John Wiley & Sons Press, (1975).

〔7〕 Ritch, P. S., Discrete Optimal Control With Multiple Constraints-I, Automatica, **9**, 4, (1973)

〔8〕 Mehra, R. K. and Davis, R. E., A Generalized Gradient Method for Optimal Control Problems with Inequality Constraints and Singular Arcs, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-**17**, (1972), 69-79.

〔9〕 Hestenes, M. R., Multiplier and Gradient Methods, J. Opt. Theory Appl., **4**, (1969), 303-320.

AN ALGORITHM FOR SOLVING CONSTRAINED OPTIMAL CONTROL PROBLEMS

Wu Tiejun, Lu Yongzai

(Zhejiang University)

Abstract

An iterative algorithm for solving non-linear optimal control problems with complex constraints of equality and/or inequality is developed. The advantages of the proposed method over the general approaches are much more efficiency, adaptability and better convergency. Besides, the method can readily be applied to the optimal control of large scale systems and implemented by microcomputers.