第1期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.1
1987年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1987

非线性系统的几何方法(上)

几何方法与几何基础

程代展　　秦化淑

（中国科学院系统科学研究所）

摘　　要

本文介绍控制理论的一个新的分支——非线性系统的几何理论。第一部分包括：几何理论的特点和分析方法，几何基础以及非线性系统是如何用几何方法来描述的。第二部分介绍几何理论的现状：主要研究方向，进展情况以及尚待解决的问题。最后，根据目前的动态对今后的主要发展趋势作一些分析和预测。

一、几何方法概述

用微分流形的方法研究非线性系统的控制问题是近十余年来新发展起来的系统理论的一个分支。它起源于七十年代初期。Brockett，Sussmann 以及 Krener 等人作了许多开创性的和奠基性的工作。直到今天，Brockett 的文章[1]仍可看作几何方法的入门或导引。

六十年代，线性代数的方法成功地被应用到线性控制系统理论中。其基本原理是：对应于一个给定的线性系统，我们可以把状态空间分解为一些特定的子空间，例如：能控子空间，能观子空间，(A,B)—不变子空间等等。而线性系统的状态轨线，输出或干扰等，只属于某些子空间或由其生成的超平面。因此，讨论这些子空间的性质即可了解线性系统的性质。而这些子空间以及有关的反馈控制都可以用线性代数的方法算出。因此，几何概念加上线性代数的工具对实际系统的设计或工程问题的控制提供了行之有效的方法。

对于非线性系统，不管是运动轨线或输出等，一般地说，都不能用子空间来描述。它们往往只属于一些低维子流形。粗略地说，是 R^n 中的一些低维曲面。类似于线性系统的几何理论，我们可以通过对低维子流形的讨论来了解非线性系统的性质。这样，微分流形的方法就被有效地应用到非线性系统研究中去了。

直接讨论低维子流形往往是比较困难的。但借助于 Frobenius 定理，Chow 定理及其推广，低维子流形与它们的切向量场所形成的分布联系起来了。这些分布，对流形

本文于1986年5月23日收到。1986年7月9日收到修改稿。

上的每一点来说，是切向量空间的子空间。对于这些子空间，讨论起来有许多便利之处。因此，可以把对低维子流形的讨论转换为对向量场及分布性质的研究。从子流形到分布，这是非线性系统几何方法的讨论中比线性系统几何方法多出的一个环节，也是非线性系统的一种特征。

一个熟知的事实是：线性空间之间的线性变换不影响线性映射及子空间等的性质。因此，线性代数的方法在线性系统研究中得到卓有成效的应用。微分流形之间的变换是微分同坯。由于向量场之间的李代数结构对微分同坯是不变的，很自然，李代数成了研究向量场及分布的主要工具。

粗略地说，在线性与非线性系统的几何方法之间，我们可以给出如下的对应关系：状态空间$\longleftrightarrow$微分流形；向量$\longleftrightarrow$向量场；子空间$\longleftrightarrow$子流形，分布；线性变换$\longleftrightarrow$微分同坯；线性代数方法$\longleftrightarrow$李代数方法。这种对应不尽合理，但有助于初学者对上述微分几何概念的理解。

经过十余年的努力，非线性系统的几何理论已经得到很大的发展。它不但在理论上已初步形成了自己的完整体系，而且正越来越多地被应用于尖端工程技术之中。例如，谈自忠，Bejczy[2]等人将几何理论用于机器人的控制，Hunt，Su[3]等人将它用于直升飞机的控制等，都得到了满意的结果。

最近，意大利著名教授 A. Isidori 指出[4]：正如五十年代的拉普拉斯变换和复变函数理论对单输入一单输出线性系统的研究，或六十年代的线性代数对多变量线性系统的研究一样，近十余年来用微分几何方法研究非线性系统取得了显著的成绩。

本文的目的，是对非线性系统几何理论的现状，主要是国外的进展情况及研究方向，作一个综述性的介绍，以便国内读者掌握有关动向。为了叙述的方便和易于被对几何方法不甚熟悉的读者理解和掌握，我们在下节先对有关的几何概念及记号作一简单介绍。

二、几何基础

本节内容，包括微分几何理论中的一些基本概念和有关文献中常用的方法，公式等。笔者作了一些整理和简化。

2.1 流形，可微映射，C^∞ 函数

一个第二可数的 Hausdorff 空间，如果它的每一点都有一个开邻域U和U到R^n的一个开集的一个同坯映射φ，则称它为一个n维流形。而(U,φ)则称为流形上的一个局部坐标邻域。如果(U,φ)和(V,ϕ)为流形上的任意两个局部坐标邻域，并且$U\cap V\neq\phi$，那么

$$\phi\circ\varphi^{-1}:\ \varphi(U\cap V)\qquad\phi(U\cap V)\tag{2.1}$$

定义了R^n的两个开子集之间的一个同坯映射。如果所有这样的映射及其逆映射都是无穷次可微分的，则称之为n维C^∞微分流形。

两个微分流形M和N之间的一个映射，如果它在局部坐标下是一个无穷次可微分

的映射，则称之为可微映射。

如果 $T:M\to N$ 是一个可微映射，它可逆，而且它的逆映射T^{-1}也是可微映射，则称 T 为 M 与 N 之间的一个微分同坯映射。而 M 与 N 则称为微分同坯的微分流形。

从一个微分流形 M 到 R^1 的可微映射称为 M 上的一个 C^∞ 函数。M 上所有 C^∞ 函数的集合记作 $C^\infty(M)$。

如果 W 为微分流形 M 的一个子集，并且，对 W 中每一个点都有一个 M 的局部坐标邻域（U,φ），使得 $\varphi(W)$ 是$\varphi(U)$的（作为 R^n 空间的开集的）一个线性子空间，则称W为M的一个子流形。

在非线性系统的几何理论中，我们往往假定一个非线性系统定义在一个微分流形上。其原因主要是便于使用微分几何的工具。另外，这种一般化并不增加任何实质性的困难。因为 R^n 是一个特殊的微分流形，但 R^n 的子流形却可能十分复杂，并没有什么特殊性。当然，作为理论研究，考虑定义在李群或其他一些流形上的动态系统也是十分有意义的。

2．2　向量场和对偶向量场

一个向量场可以看作一种对应规律，它在流形的每一点的切空间上定义了一个向量。注意到导数是表示切方向的，因此，在局部坐标下可以把切空间的基底选作$\frac{\partial}{\partial x_1}$，$\frac{\partial}{\partial x_2}$，…，$\frac{\partial}{\partial x_n}$。于是，一个向量场 X 在这个局部坐标下可以表示为

$$X=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}.$$

如果系数 $a_i(x),i=1,2,\cdots,n$，为 C^∞ 函数，则称 X 为一个 C^∞ 向量场。M 上所有 C^∞ 向量场集合记作 $V(M)$。向量场之所以用$\frac{\partial}{\partial x_i}$作基底，是因为对一个 C^∞ 函数 $h(x)$，$\sum_{i=1}^{n} a_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)$ 正是 $h(x)$ 在向量场 X 方向上的方向导数。因此，向量场也可以看作$C^\infty(M)$上的一个算子。容易看出，如果 $X\in V(M)$；$h_1(x)$，$h_2(x)\in C^\infty(M)$，那么（作为算子的）向量场 X 对 $h_1(x)$ 和 $h_2(x)$ 的乘积的作用为

$$X(h_1(x)\cdot h_2(x))=h_1(x)\cdot X(h_2(x))+h_2(x)\cdot X(h_1(x)).\tag{2.2}$$

因此，有的文献也把向量场定义为 $C^\infty(M)$ 到 $C^\infty(M)$的满足等式（2.2）的算子。

在选定局部坐标或其他不会产生混淆的情况下，向量场也可以用一个列向量函数表示。

例如：　$X=(a_1(x),a_2(x),\cdots,\ a_n(x))^\tau$.

一个对偶向量场可以定义为$V(M)\to C^\infty(M)$的一个（以环 $C^\infty(M)$为系数的）线性映

射。如果在局部坐标下把对偶向量场的基底选作 dx_1, dx_2, …, dx_n, 那么，一个对偶向量场 ω 在局部坐标下可以表示为

$$\omega=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\ dx_i\ 。$$

如果系数 $b_i(x)$，$i=1,2,\cdots,n$， 为 C^∞ 函数，则称 ω 为 C^∞ 对偶向量场。C^∞ 对偶向量场也称微分一型。M 上所有微分一型的集合记作 $V^*(M)$。微分一型也可以简单地用行向量函数表示，如 $\omega=(b_1(x), b_2(x),\cdots,b_n(x))$。这样，微分一型对向量场的作用，则可以简单地用内积

$$\langle\omega,X\rangle=\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\ a_i(x) \tag{2.3}$$

来表示了。

如果 $h(x)\in C^\infty(M)$，依局部坐标取它（在普通微积分意义下）的微分

$$dh(x)=\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}dx_1+\frac{\partial h(x)}{\partial x_2}dx_2+\cdots+\frac{\partial h(x)}{\partial x_n}dx_n,$$

并把它当作微分一型。那么，对向量场 X 就有

$$X(h(x))=\langle dh(x),X\rangle。$$

这就是把微分一型的基底取作 $dx_1,dx_2,\cdots,dx_n$ 的道理。

由 C^∞ 函数 $h(x)$生成的微分一型 $dh(x)$ 称为正则微分一型（exact one－form）。

C^∞ 函数，向量场和微分一型可以看作几何理论中的三个基本元素。至于一般的张量场和微分 k 型，虽然也正逐渐引入到非线性系统理论中来，但它们对初学者或工程应用暂时并不重要，这里就不作介绍了。

2．3 微分同坯的导出映射

设 M 和 N 为两个微分同坯的微分流形，T：$M\to N$ 为其同坯映射。那么，我们可以把一个流形上的上述三元素“搬到”另一个流形上。称它们为微分同坯的三类导出映射，分别定义如下：

1） 设 $h\in C^\infty(N)$，定义映射 T^*：$C^\infty(N)\to C^\infty(M)$ 如下：

$$T^*(h)=h\circ T。\tag{2.4}$$

2） 设 $X\in V(M)$，定义映射 T_*：$V(M)\to V(N)$如下：对任一 $h\in C^\infty(N)$

$$T_*(X)(h)=X(T^*(h))。\tag{2.5}$$

在局部坐标下，它可以表示为

$$T_*(X)=J_T\cdot(X\circ T^{-1}),\tag{2.6}$$

这里 J_T 是 T 在局部坐标下的 Jacobian 矩阵。

3） 设 $\omega\in V^*(N)$，定义映射 T^*：$V^*(N)\to V^*(M)$如下：对任一$X\in V(M)$

$$\langle T^*(\omega),X\rangle=\langle\omega,T_*(X)\rangle。\tag{2.7}$$

在局部坐标下，它可以表示为

$$T^*(\omega)=(\omega\circ T)\cdot J_T\ . \tag{2.8}$$

值得注意的是，实际上，对 C^∞ 函数和微分一型，即使 M，N 不同坯，只要 T 是可微映射，导出映射 T^* 也可以成立。但这只是单向的。而当 T 为微分同坯时，则能双向成立。至于对向量场，则只有 T 同坯时 T_* 才有定义。

2．4　李导数

给定一个向量场 X，那么，根据微分方程解的存在定理，对任一给定点 $x_0\in M$，总存在 R^1（或 R^1 的包含 0 点的一个开子集）到 M 的一个映射 $\Phi_t^X(x_0)$，使得

$$\frac{d}{dt}\Phi_t^X(x_0)=X(\Phi_t^X(x_0))$$

$$\Phi_0^X(x_0)=x_0.$$

$\Phi_t^X(x_0)$ 称为向量场 X 通过 x_0 点的积分曲线。由于它对 t 构成一个群，文献上也称它为 X 的单参数群。

如果固定 X 和 t 而变动 x_0，那么 $\Phi_t^X(x)$ 就是 M 上的一个包含 x_0 的开子集到 M 的一个映射。可以证明，它是一个局部微分同坯，因此，导出映射 $(\Phi_t^X)_*$ 及 $(\Phi_t^X)^*$ 都局部有定义。

给定一个向量场 Z，我们可以讨论 C^∞ 函数，其他向量场及微分一型在 Z 方向上的"变化率"，这就是它们的李导数。

1)　设 $h\in C^\infty(M)$，李导数 L_Z：$C^\infty(M)\to C^\infty(M)$ 定义为

$$L_Z(h)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left(h(\Phi_t^Z(x))-h(x)\right). \tag{2.9}$$

如果在局部坐标下 $Z=(c_1(x),\ c_2(x),\ \cdots,\ c_n(x))^\tau$，那么

$$L_Z(h)=\sum_{i=1}^{n}c_i(x)\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}h(x)\ . \tag{2.10}$$

2)　设 $X=(a_1(x),a_2(x),\cdots,a_n(x))^\tau\in V(M)$，李导数 $ad_Z:V(M)\longrightarrow V(M)$ 定义为

$$ad_ZX=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left((\Phi_{-t}^Z)_*X(\Phi_t^Z(x))-X(x)\right). \tag{2.11}$$

在局部坐标下它可以表示为

$$ad_ZX=\frac{\partial X}{\partial x}\cdot Z-\frac{\partial Z}{\partial x}\cdot X, \tag{2.12}$$

这里 $\dfrac{\partial X}{\partial x}$ 及 $\dfrac{\partial Z}{\partial x}$ 分别为 X 和 Z 的 Jacobian 矩阵。

例如：

$$\frac{\partial X}{\partial x}=\begin{bmatrix}\frac{\partial a_1}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_1}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial a_1}{\partial x_n}\\ \cdots & & & \\ \frac{\partial a_n}{\partial x_1}, & \frac{\partial a_n}{\partial x_2}, & \cdots, & \frac{\partial a_n}{\partial x_n}\end{bmatrix}.$$

李导数 $ad_Z X$ 也常记作 $[Z,X]$，称为 Z 与 X 的李括号或李积。

3） 设 $\omega=(b_1(x),b_2(x),\cdots,b_n(x))\in V^*(M)$，李导数 $L_Z:V^*(M)\to V^*(M)$ 定义为

$$L_Z(\omega)=\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}((\Phi_t^Z)^*\omega(\Phi_t^Z(x))-\omega(x))\ 。\tag{2.13}$$

在局部坐标下，它可以表示为

$$L_Z(\omega)=\left(\frac{\partial\omega^\tau}{\partial x}\cdot Z\right)^\tau-\omega\cdot\frac{\partial Z}{\partial x}\ 。\tag{2.14}$$

我们还可以用递推的办法来定义高阶李导数，例如对向量场

$$ad_Z^k X=ad_Z(ad_Z^{k-1}X)\ ,\quad k>1$$

为方便计，并令

$$ad_Z^0 X=X\ .$$

三类李导数之间常用的公式有

$$L_Z\langle\omega,X\rangle=\langle L_Z\omega,X\rangle+\langle\omega,ad_Z X\rangle.\ (\text{Liebnitz})\tag{2.15}$$

$$[h_1(x)\cdot X,h_2(x)\cdot Z]=h_1(x)h_2(x)\cdot ad_X Z+h_1(x)\cdot L_X h_2(x)\cdot Z-h_2(x)\cdot L_Z h_1(x)\cdot X\ .\tag{2.16}$$

$$L_X(dh)=d(L_X h)\ 。\tag{2.17}$$

等等。

2．5 李代数

对于李括号，容易验证它满足

1） 对 R^1 线性，即如果 $r_1,r_2\in R^1$，那么

$$[r_1\cdot X_1+r_2\cdot X_2,Z]=r_1[X_1,Z]+r_2[X_2,Z],$$

2） 反对称性

$$[X,Z]=-[Z,X],$$

3） 满足 Jacobi 等式

$$[X,[Y,Z]]+[Y,[Z,X]]+[Z,[X,Y]]=0\ 。$$

这样，向量场集合 $V(M)$ 及其上的李括号运算构成了实数域 R^1 上的一个非交换代数，这个代数称为李代数。

给定一族向量场 $\{X_\lambda|\lambda\in\wedge\}$，上述李代数的包含这族向量场的最小子代数称为由

这族向量场生成的子李代数，记作

$$\{X_\lambda \mid \lambda\in\Lambda\}_{LA}.$$

2．6　分布与对偶分布

类似于向量场，分布也是一种规则，它在流形的每一点规定一个切空间的子空间。记一个分布为Δ，那么，对每一点$p\in M$，Δ_p就是M在p点的切空间$T_p(M)$的一个子空间。

一个分布Δ，如果它有定常维数，即

$$\dim(\Delta_p)=\text{const},\qquad p\in M$$

则称Δ非奇异。如果在一点x的一个邻域U上Δ有定常维数，则称Δ在x点非奇异。

如果$\{X_\lambda \mid \lambda\in\wedge\}$是一族向量场，那么它们对环$C^\infty(M)$所生成的模（即它们对$C^\infty$函数所作的组性组合）记作

$$S_p\{X_\lambda \mid \lambda\in\wedge\}.$$

它也称为向量场集合$\{X_\lambda \mid \lambda\in\wedge\}$所生成的分布。这样的分布称为$C^\infty$分布。

给定一个向量场X和一个分布Δ，如果对每一点$p\in M$均有$X_p\in\Delta_p$，则称向量场X属于分布Δ。

一个分布Δ，如果对任何两个属于它的向量场X，Y均有$[X,Y]\in\Delta$，则称Δ为一个对合分布。

李代数也可以看作一个分布，它显然是一个对合分布。值得注意的是，李代数作为分布的维数和它作为非交换代数的维数是两个概念，不可混淆。

如果M和N为两个微分流形，$F:M\to N$为一可微映射，Δ为M上的一个分布。那么，可以依如下的方法把$F_*(\Delta)$定义为$F(M)\subset N$上的一个分布：对每一点$p\in M$，设映射F的Jacobian矩阵在p点的值为$J_F(p)$，那么$J_F(p)$定义了线性切空间$T_p(M)$到$T_{F(p)}(N)$的一个线性映射。我们把Δ_p在这个映射下的象定义为$F_*(\Delta)$在$F(p)$点的值。如果$F(p)$的原象集不只一点，则取它们的线性包为$F_*(\Delta)$。注意：向量场间的导出映射$T_*(X)$要求T是同坯，否则$T_*(X)$不构成向量场，这与分布不同。

与分布类似，我们把dx_1，dx_2，…，dx_n在每一点$p\in M$张成的线性空间称为对偶切空间，而对偶分布则在每一点规定对偶切空间的一个子空间。对偶分布可由一族微分一型对环$C^\infty(M)$作线性组合而生成。例如

$$\Omega=S_p\{\omega_\lambda \mid \lambda\in\wedge\}.$$

三、非线性系统的几何描述

定义在R^n上的一般非线性系统可以用微分方程描述如下：

$$\begin{cases}\dot{x}=f(x,u), & (3.1.a)\\ y=h(x), & (3.1.b)\end{cases}$$

这里，状态$x\in R^n$；控制$u\in R^m$；输出$y\in R^r$。等式（3.1.a）称为状态方程，（3.1.b）

称为输出方程。

为了便于使用微分几何的工具，我们总假定 f 对 x 和 u 都是C^∞函数。同样，$h(x)$也是 C^∞ 的。这样，对每个给定的常值控制 u，$f(x,\cdot)$ 就可以看作 R^n 上的一个 C^∞ 向量场，而状态方程（3.1.a）相应的状态运动轨线则是这个向量场的一条积分曲线。因此，非线性系统就可以用向量场以及其他微分几何的工具来描述和研究了。

几何方法通常假定非线性系统是定义在微分流形上的。即，状态空间是一个 n 维流形 M，输出空间是一个 r 维流形 N，而 x 与 y 分别为 M 和 N 上的一个局部坐标。这样，方程（3.1）就是给定动态系统在相应的局部坐标下的一个表达式。

把一个非线性系统定义在微分流形上，主要有两点理由：其一，这样，使我们有可能讨论更一般的系统，如定义在球面，环面或定义在各种李群上的动态系统等。这在理论上有很大意义。其二，这种推广不但不会增加什么原则上的困难，而且有利于使用微分几何的工具。因为在几何理论中用到的 R^n 的子流形与一般 n 维流形的子流形，在复杂程度或其他性质上没有什么本质上的差别。

实际上，把状态空间或输出空间取为微分流形在应用上并不是本质的。真正重要的是考虑各种与控制有关的子流形及使用向量场，分布，对偶分布，李代数等几何工具。因此，尽管文献上把系统定义在一个微分流形上，不熟悉微分几何的读者也不妨直接把状态流形当作 R^n，把局部坐标看作 R^n 上的坐标等，而把上一节中给出的李导数，李代数等等在局部坐标下的计算公式当作它们的定义。这对几何方法的理解和它的工程应用都不会有什么大影响。

除了一般非线性系统外，几何方法讨论更多的是一种特殊情况，即仿射非线性系统。定义在一个 n 维流形 M 上的一个仿射非线性系统，它在任一局部坐标下可以表示为

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x) + \sum\limits_{i=1}^{m} g_i(x)\,u_i\,, & (3.2.a) \\ y_j = h_j(x),\quad j=1,2,\cdots,r, & (3.2.b) \end{cases}$$

这里 $f(x)$，$g_i(x)$，$i=1,2,\cdots,m$ 为 M 上的 C^∞ 向量场，$h_j(x)$，$j=1,2,\cdots,r$ 为 C^∞ 函数。

这类系统的主要特点是，它对控制 u 是线性的。因此，这类系统的动态性质可以完全由向量场 $f(x)$ 及 $g_i(x)$ 来描述。这为使用微分几何方法提供了十分有利的条件。当然，人们对这类系统感兴趣，还因为它在力学，物理学，生态学以及各类工程问题中大量存在。因此，研究它有很大的实际意义。

在线性系统的几何理论中，线性系统的性质是通过讨论与系统相关的各类子空间的性质来研究它的。同样，非线性系统几何理论的出发点，也是要通过探讨子流形来研究非线性系统的性质。但由于直接讨论子流形缺乏工具，因此，要用到上节介绍的几何方法，把子流形与和它们相对应的分布及对偶分布等找出来。这样，就可以用李导数，李代数等几何工具来研究它们了。“从子流形到分布”这个环节，是非线性系统比线性系

统在几何方法上多出的一个环节。通过这个环节，非线性系统所决定的各类分布或对偶分布，就可以代替子流形而与线性系统的各类子空间对应起来了。例如，线性系统理论中有（A,B）—不变子空间，非线性系统中则有能控不变或（f,g）—不变分布。这类对应几乎是一对一的。

那么，给定一个非线性系统，如何确定各类分布及对偶分布呢？这可以由非线性系统的几何描述看出。非线性系统的状态方程可以用状态流形上的向量场来描述，而输出方程则是状态流形到输出流形的一个映射。因此，与系统相关的分布可以用某些描述状态的向量场生成，而对偶分布则由某些输出映射所产生的微分一型生成等等。这些只是粗略的说明，但可以给出一个直观的概念：几何方法是如何用于描述和研究非线性系统的。

（待 续）

GEOMETRIC APPROACH TO NONLINEAR SYSTEMS

Part 1. Geometric Method and Geometric Preliminary

Part 2. Current Situation and Further Research

Cheng Daizhan, Qin Huashu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper surveys a new field in control theory – the geometric approach to nonlinear systems. In Part 1, we discuss the geometric method of system analysis, geometric background and the geometric expression of nonlinear systems. Part 2 describes the current situation of geometric theory, including the research problems, main results and open problems. Finally, based on the recent observation, we give some analysis and prognosis for further developmenr of the geometric theory of nonlinear systems.