第4卷 第1期
1987年3月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.4, No.1
March, 1987

一类时变离散大系统的稳定性

唐 功 友

（青岛化工学院）

摘 要

本文利用标量 Ляпунов 函数法研究了一类线性、非线性时变离散大系统的渐近稳定性及不稳定性的分解。同时得到了分解系数和非线性项界限的估计公式。

一、引 言 及 引 理

文〔1〕～〔4〕分别研究了几类线性、非线性定常及时变离散大系统的稳定性分解。本文利用刘永清[5]提出的Ляпунов函数分解法，即标量和的ЛЯПУНОВ函数法，研究了一类孤立子系统具有极限定常离散系统[6]的线性、非线性时变离散大系统的渐近稳定性及不稳定性的分解。同时得到了分解系数和非线性项界限的估计公式。

考虑用线性变系数差分方程组描述的线性时变离散系统

$$Y(k+1)=Q(k)Y(k), \tag{1}$$

其中 $Q(k)\in R^{l\times l}$是整数变量 k 的有界函数矩阵；$Y(k)\in R^{l}$是整数变量 k 的函数向量。

定义 如果系统（1）的系数矩阵 $Q(k)$满足

$$\lim_{k\to\infty} Q(k)=Q, \tag{2}$$

其中 $Q\in R^{l\times l}$ 是常数矩阵，则说线性时变离散系统（1）具有极限系统，并称线性定常离散系统

$$Y(k+1)=QY(k) \tag{3}$$

为系统（1）的极限系统。

引理 1[2] 如果线性定常离散系统（3）的特征方程之根 μ_i 都满足

$$|\mu_i|<1, \quad (i=1,2,\cdots,l), \tag{4}$$

则对于任意预先给定的正定对称矩阵 C，存在唯一满足矩阵方程

$$Q'RQ-R=-C \tag{5}$$

的对称矩阵 R，且矩阵 R 必然是正定的。

引理 2[7] 如果线性定常离散系统（3）的特征方程之根 μ_i 中至少有一个满足

$$|\mu|>1, \tag{6}$$

本文于1985年7月30日收到。1986年1月20日收到修改稿。

且在任意 i,j 的情况下，量

$$\mu_i\mu_j \neq 1, \tag{7}$$

则对于任意预先给定的正定对称矩阵 C，存在唯一满足矩阵方程（5）的对称矩阵 R，且矩阵 R 不是常正的。

引理 3[6] 如果线性时变离散系统（1）具有极限系统（3），且系统（3）的特征方程之根 μ_i 都满足（4），则线性时变离散系统（1）的零解是渐近稳定的。

本文中定理的证明要用到引理 3 的证明结果，于是我们仿照〔6〕，重新将引理3证明如下：

由引理假设，系统（3）的特征根 μ_i 满足引理 1 条件。根据引理 1，给定单位矩阵 I，存在唯一满足矩阵方程

$$Q'RQ - R = -I \tag{8}$$

的正定矩阵 R。由正定二次型

$$V(k) = Y'(k)RY(k) \tag{9}$$

沿时变离散系统（1）求差值得

$$\begin{aligned}\Delta V(k)|_{(1)} &= Y'(k)\{-I + [Q'(k)RQ(k) - Q'RQ]\}Y(k)\\ &= -\sum_{i=1}^{l} y_i^2(k) + \sum_{s=1}^{l}\sum_{\sigma=1}^{l} \alpha_{s\sigma}(k)y_s(k)y_\sigma(k),\end{aligned} \tag{10}$$

其中

$$\alpha_{s\sigma}(k) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}[q_{is}(k)q_{j\sigma}(k) - q_{is}q_{i\sigma}]r_{ij},\ (s,\sigma = 1,2,\cdots,l).$$

注意到当 k 足够大时，$|q_{is}(k)q_{i\sigma}(k) - q_{is}q_{i\sigma}|$ 可以任意小，因此 $\Delta V(k)|_{(1)}$ 是负定的。故系统（1）的零解是渐近稳定的。证毕。

引理 4[6] 如果线性时变离散系统（1）具有极限系统（3），且系统（3）的特征方程之根 μ_i 至少有一个满足（6），则线性时变离散系统（1）的零解是不稳定的。

二、线性时变离散大系统的稳定性

考虑 n 阶线性时变离散大系统

$$X_r(k+1) = \sum_{i=1}^{m} A_{ri}(k)X_i(k), \quad (r = 1,2,\cdots m) \tag{11}$$

及其孤立的线性时变离散子系统

$$X_r(k+1) = A_{rr}(k)X_r(k), \quad (r = 1,2,\cdots,m), \tag{12}$$

其中 $X_r(k) = [x_1^{(r)}(k), x_2^{(r)}(k),\cdots,x_{n_r}^{(r)}(k)]'$，$(r = 1,2,\cdots,m)$是整数变量 k 的 n_r 阶

函数向量；

$$A_{ri}(k)=\begin{bmatrix} a_{11}^{(ri)}(k) & a_{12}^{(ri)}(k)\cdots a_{1n_i}^{(ri)}(k) \\ a_{21}^{(ri)}(k) & a_{22}^{(ri)}(k)\cdots a_{2n_i}^{(ri)}(k) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ a_{n_r1}^{(ri)}(k) & a_{n_r2}^{(ri)}(k)\cdots a_{n_rn_i}^{(ri)}(k) \end{bmatrix},\ (r,i=1,2,\cdots,m)$$

是整数变量 k 的 $n_r\times n_i$ 有界函数矩阵，$\sum\limits_{r=1}^{m} n_r=n$.

在以下的讨论中，我们总是假定线性时变离散子系统（12）具有极限定常离散系统

$$X_r(k+1)=A_{rr}X_r(k),\ (r=1,2,\cdots,m), \tag{13}$$

其中

$$A_{rr}=\begin{bmatrix} a_{11}^{(rr)} & a_{12}^{(rr)} & \cdots & a_{1n_r}^{(rr)} \\ a_{21}^{(rr)} & a_{22}^{(rr)} & \cdots & a_{2n_r}^{(rr)} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n_r1}^{(rr)} & a_{n_r2}^{(rr)} & \cdots & a_{n_rn_r}^{(rr)} \end{bmatrix},\ (r=1,2,\cdots,m)$$

是 $n_r\times n_r$ 常数矩阵，即 $A_{rr}(k)$满足

$$\lim_{k\to\infty} A_{rr}(k)=A_{rr},\ (r=1,2,\cdots,m). \tag{14}$$

定理 1 如果线性时变离散大系统（11）的系数有界，它的线性时变离散子系统（12）具有极限系统（13），系统（13）的特征方程之根 $\mu_i^{(r)}$ 满足

$$|\mu_i^{(r)}|<1,\ (r=1,2,\cdots,m;\ i=1,2,\cdots,n_r), \tag{15}$$

即线性时变离散子系统（12）的零解是渐近稳定的. 存在$\Delta_1>0$，使当$E<\Delta_1$时，线性时变离散大系统（11）的零解也是渐近稳定的. 其中

$$\left\{\begin{aligned} & E=\max\left\{\varlimsup_{k\to\infty}|a_{sl}^{(ri)}(k)|;\ \begin{matrix} s=1,2,\cdots,n_r; & i,r=1,2,\cdots,m \\ l=1,2,\cdots,n_i; & r\neq i \end{matrix}\right\}, \\ & \Delta_1=\frac{1}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{m} n\varepsilon_i}}, \\ & \varepsilon_i=\sum_{s=1}^{n_i}\sum_{\sigma=1}^{n_i}|r_{s\sigma}^{(r)}|,\ (i=1,2,\cdots,m). \end{aligned}\right. \tag{16}$$

证 由定理假设，线性时变离散子系统（12）的极限系统（13）满足引理 1 的

件，根据引理 1，给定 n_r 阶单位矩阵 I_r，存在唯一满足矩阵方程

$$A'_{rr}R_rA_{rr}-R_r=-I_r,\quad (r=1,2,\cdots,m) \tag{17}$$

的正定矩阵 R_r。仿照引理 3 的证明过程，由正定二次型

$$V_r(k)=X'_r(k)R_rX_r(k),\quad (r=1,2,\cdots,m) \tag{18}$$

沿线性时变离散子系统（12）求差值得

$$\Delta V_r(k)\Big|_{(12)}=-\sum_{i=1}^{n_r}x_i^{(r)2}(k)+\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{\sigma=1}^{n_r}a_{s\sigma}^{(r)}(k)x_s^{(r)}(k)x_\sigma^{(r)}(k),\quad (r=1,2,\cdots,m), \tag{19}$$

其中 $a_{s\sigma}^{(r)}(k)=\sum_{i=1}^{n_r}\sum_{j=1}^{n_r}[a_{is}^{(rr)}(k)a_{j\sigma}^{(rr)}(k)-a_{is}^{(rr)}\,a_{j\sigma}^{(rr)}]\,r_{ij}^{(r)}$，$(s,\sigma=1,2,\cdots,n_r)$。

取 $V(k)=\sum_{r=1}^{m}V_r(k)$ 做为线性时变离散大系统（11）的 Ляпунов 函数，显然 $V(k)$ 是正定的，由 $V(k)$ 沿线性时变离散大系统（11）求差值得

$$\Delta V(k)\Big|_{(11)}=\sum_{r=1}^{m}\Delta V_r(k)\Big|_{(11)}. \tag{20}$$

先求出

$$\Delta V(k)|_{(11)}=\Delta V_r(k)|_{(12)}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{m}X'_i(k)[A'_{ri}(k)R_rA_{rj}(k)]X_j(k)$$

$$+2\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}X'_i(k)[A'_{rr}(k)R_rA_{rr}(k)]X_r(k)$$

$$=\Delta V_r(k)|_{(12)}+\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\sum_{\substack{j=1\\j\neq r}}^{m}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{\sigma=1}^{n_r}\sum_{l=1}^{n_i}\sum_{P=1}^{n_l}a_{sl}^{(ri)}(k)a_{\sigma P}^{(rl)}(k)r_{s\sigma}^{(r)}\,x_l^{(i)}(k)x_P^{(l)}(k)$$

$$+2\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\sum_{s=1}^{n_r}\sum_{\sigma=1}^{n_r}\sum_{l=1}^{n_i}\sum_{P=1}^{n_r}a_{sl}^{(ri)}(k)a_{\sigma P}^{(rr)}(k)\,r_{s\sigma}^{(r)}\,x_l^{(i)}(k)x_P^{(r)}(k).$$

我们的目的是要证明 $\Delta V(k)|_{(11)}$ 的定号性，因此只关心 $k\to\infty$ 时的情况，当 $k\to\infty$

时有

$$\Delta V_r(k)|_{(11)}\leq\Delta V_r(k)|_{(12)}+E^2\varepsilon_r[(n-n_r)\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\sum_{l=1}^{n_i}x_l^{(i)2}(k)$$

$$+n_r\sum_{\substack{i=1\\i\neq r}}^{m}\sum_{l=1}^{n_i}x_l^{(i)2}(k)+(n-n_r)\sum_{P=1}^{n_r}x_P^{(r)2}(k)]$$

$$=\Delta V_r(k)|_{(12)}+E^2\varepsilon_r[n\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_i}x_l^{(i)2}(k)-n_r\sum_{l=1}^{m}x_l^{(r)2}(k)].$$

将上式代入(20)可以得到当$k\to\infty$时的

$$\Delta V(k)|_{(11)}\leq\sum_{r=1}^{m}\{\Delta V_r(k)|_{(12)}+E^2\varepsilon_r[n\sum_{i=1}^{m}\sum_{l=1}^{n_i}x_l^{(i)2}(k)-n_r\sum_{l=1}^{n_r}x_l^{(r)2}(k)]\}$$

$$<\sum_{r=1}^{m}\{[-1+\Delta_1^2(\sum_{i=1}^{m}n\varepsilon_i-n_r\varepsilon_r)]\sum_{l=1}^{n_r}x_l^{(r)2}(k)\}$$

$$=\sum_{r=1}^{m}\left[-\frac{n_r\varepsilon_r}{n\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i}\sum_{l=1}^{n_r}x_l^{(r)2}(k)\right],$$

即$\Delta V(k)|_{(11)}$是负定的。证毕。

定理 2 如果线性时变离散大系统(11)的系数有界，它的线性时变离散子系统(12)具有极限系统(13)，系统(13)的特征方程之根$\mu_i^{(r)}$中至少有一个满足

$$|\mu|>1, \tag{21}$$

且在任意i,j的情况下，量

$$\mu_i^{(r)}\ \mu_j^{(r)}\neq1,\quad(r=1,2,\cdots,m), \tag{22}$$

即线性时变离散子系统(12)是部分稳定部分不稳定的。存在$\Delta_1>0$，使当$E<\Delta_1$时，则线性时变离散大系统(11)的零解是不稳定的。其中E、Δ_1及ε_i均由(16)决定。

证 由定理假设条件(21)、(22)及引理1、2知，满足(17)的矩阵$R_r(r=1,2,\cdots,m)$唯一存在，且R_r中至少有一个不是常正的。取$V(k)=\sum_{r=1}^{m}V_r(k)$(其中$V_r(k)$由(18)决定)做为线性时变离散大系统(11)的Ляпунов函数，显然$V(k)$不是

常正的。与定理1的证明过程同理，当$k\to\infty$时，可以得到

$$\Delta V(k)|_{(11)}<\sum_{r=1}^{m}\left[-\frac{n_r\varepsilon_r}{n\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i}\sum_{l=1}^{n_r}x_l^{(r)2}(k)\right],$$

即$\Delta V(k)|_{(11)}$是负定的。证毕。

三、非线性时变离散大系统的稳定性

考虑n阶非线性时变离散大系统

$$X_r(k+1)=\sum_{i=1}^{m}A_{ri}(k)X_i(k)+F_r[k,X_1(k),X_2(k),\cdots,X_m(k)],$$

$$(r=1,2,\cdots,m),\tag{23}$$

其中$F_r[k,X_1(k),X_2(k),\cdots,X_m(k)]\in R^{n_r}$，其元$f_i^{(r)}[k,x_1^{(1)}(k),\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),\cdots,x_1^{(m)}(k),\cdots,x_{n_m}^{(m)}(k)]$是$k,x_1^{(1)}(k),\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),\cdots\cdots,x_1^{(m)}(k),\cdots,x_{n_m}^{(m)}(k)$的函数；$A_{ri}(k)$和$X_r(k)$均由（11）决定；$\sum\limits_{r=1}^{m}n_r=n$。

设在域D：$|x_i^{(r)}(k)|\le H$（$H>0$；$r=1,2,\cdots,m$；$i=1,2,\cdots,n_r$；$\forall k=0,1,2\cdots$）上，下列不等式成立：

$$\left|f_i^{(r)}[k,x_1^{(1)}(k),\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),\cdots\cdots,x_1^{(m)}(k),\cdots,x_{n_m}^{(m)}(k)]\right|\le\eta\sum_{s=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{n_s}|x_r^{(s)}(k)|,$$

$$(r=1,2,\cdots,m;\ i=1,2,\cdots,n_r;\ \forall k=0,1,2,\cdots),\tag{24}$$

其中η是与k无关的正常数。并设$F_r[k,X_1(k),X_2(k),\cdots,X_m(k)]$使非线性时变离散大系统（23）满足解的存在唯一性条件。

定理 3　如果非线性时变离散大系统（23）的系数有界，它的线性时变离散子系统（12）具有极限系统（13），系统（13）的特征方程之根$\mu_i^{(r)}$满足（15），即线性时变离散子系统（12）的零解是渐近稳定的，并设非线性时变离散大系统（23）的非线性项满足条件（24）。存在$\Delta_2>0$，$\Delta_3>0$，使当$E<\Delta_2$，$\eta<\Delta_3$时，则非线性时变离散大系统（23）的零解也是渐近稳定的。其中E及ε_i由（10）决定；

$$\begin{cases} \Delta_2 = \dfrac{1-\varphi}{\sqrt{n\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i}}, \\ \Delta_3 = \sqrt{H^2 + \dfrac{\varphi}{n\sum\limits_{i=1}^{m}\varepsilon_i}} - H, \\ H = \max\left[\overline{\lim_{k\to\infty}}\left|a_{ij}^{(rl)}(k)\right|;\ \begin{matrix} i=1,2,\cdots,n_r \\ j=1,2,\cdots,n_l \end{matrix};\ r,l=1,2,\cdots,m\right], \\ 0<\varphi<1. \end{cases} \tag{25}$$

证 由定理假设，线性时变离散子系统（12）的极限系统（13）满足引理1的条件。根据引理1，给定n_r阶单位矩阵I_r，存在唯一满足（17）的正定矩阵$R_r(r=1,2,\cdots,m)$，取$V(k)=\sum\limits_{r=1}^{m}V_r(k)$（其中$V_r(k)$由（18）决定）做为非线性时变离散大系统（23）的Ляпунов函数。显然$V(k)$是正定的。由$V(k)$沿非线性时变离散大系统（23）求差值得

$$\Delta V(k)|_{(23)} = \sum_{r=1}^{m}\Delta V_r(k)|_{(23)}. \tag{26}$$

先求出

$$\Delta V_r(k)|_{(23)} = \Delta V_r(k)|_{(11)} + 2\sum_{i=1}^{m} X_i'(k)A_{ri}'(k)R_rF_r[k,X_1(k),\cdots,X_m(k)]$$

$$+F_r'[k,X_1(k),\cdots,X_m(k)]R_rF_r[k,X_1(k),\cdots,X_m(k)]$$

$$= \Delta V_r(k)|_{(11)} + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\sum_{l=1}^{n_r}\sum_{P=1}^{n_r} a_{Pj}^{(ri)}(k)r_{Pl}^{(r)}x_j^{(i)}(k)f_l^{(r)}[k,x_1^{(1)}(k),\cdots$$

$$\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),\cdots x_1^{(m)}(k),\cdots,x_{n_m}^{(m)}(k)] + \sum_{l=1}^{n_r}\sum_{P=1}^{n_r} r_{Pl}^{(r)} f_P^{(r)}[k,x_1^{(1)}(k),\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),$$

$$\cdots\cdots,x_1^{(m)}(k),\cdots x_{n_m}^{(m)}(k)f_l^{(r)}[k,x_1^{(1)}(k),\cdots,x_{n_1}^{(1)}(k),\cdots\cdots,x_1^{(m)}(k),\cdots,x_{n_m}^{(m)}(k)].$$

当$k\to\infty$时有

$$\Delta V_r(k)|_{(23)} \leq \Delta V_r(k)|_{(11)} + n\varepsilon_r(2H\eta+\eta^2)\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i} x_j^{(i)2}(k).$$

将上式代入（26），可以得到当 $k\to\infty$ 时的

$$\Delta V(k)|_{(23)} \leq \sum_{r=1}^{m}[\Delta V_r(k)|_{(11)} + n(2H\eta+\eta^2)\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\sum_{l=1}^{n_r} x_l^{(r)2}(k)]$$

$$< \sum_{r=1}^{m}\left\{[(n\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i - \varepsilon_r n_r)\Delta_2^2 + 2Hn\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\Delta_3 + n\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i\Delta_3^2 - 1]\sum_{l=1}^{n_r} x_l^{(r)2}(k)\right\}$$

$$= \sum_{r=1}^{m}\left[-\frac{(1-\varphi)^2\varepsilon_r n_r}{n\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i}\sum_{l=1}^{n_r} x_l^{(r)2}(k)\right],$$

即 $\Delta V(k)|_{(23)}$ 是负定的。证毕。

定理 4　如果非线性时变离散大系统（23）的系数有界，它的线性时变离散子系统（12）具有极限系统（13），系统（13）的特征方程之根 $\mu_i^{(r)}$ 中至少有一个满足(21)，且条件（22）成立，即线性时变离散子系统（12）是部分稳定部分不稳定的，并设非线性时变离散大系统（23）的非线性项满足条件（24）。存在 $\Delta_2>0$，$\Delta_3>0$，使当 $E<\Delta_2$，$\eta<\Delta_3$ 时，则非线性时变离散大系统（23）的零解是不稳定的。其中 E 及 ε_i 由（16）决定，Δ_2、Δ_3、H 及 φ 由（23）决定。

证　由定理假设条件及引理 1、2 知，满足（17）的矩阵 $R_r(r=1,2,\cdots,m)$ 唯一存在，且 R_r 中至少有一个不是常正的。取 $V(k)=\sum_{r=1}^{m}V_r(k)$（其中 $V_r(k)$ 由（18）决定）做为非线性时变离散大系统（23）的 Ляпунов 函数。显然 $V(k)$ 不是常正的。与定理 3 的证明过程同理，当 $k\to\infty$ 时，可以得到

$$\Delta V(k)|_{(23)} < \sum_{r=1}^{m}\left[-\frac{(1-\varphi)^2\varepsilon_r n_r}{n\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i}\sum_{l=1}^{n_r} x_l^{(r)2}(k)\right],$$

即 $\Delta V(k)|_{(23)}$ 是负定的。证毕。

注　本文中所用到的 Ляпунов 函数都是根据线性定常离散系统构造的，因此对此类系统的 Ляпнов 函数均可直接利用〔7〕和〔8〕中的方法方便地得到。

文中对参数的稳定域 Δ_1、Δ_2 及非线性项的界限 Δ_3 估计得较粗，对具体问题还

可以估计的更细一些.

参考文献

〔1〕 刘永清，大系统在稳定性理论中的分解问题（5），数学研究与评论，**2**，2,（1982），41—48.

〔2〕 王慕秋、刘永清、王联，分解理论在线性迭代系统中的应用，数学研究与评论，**2**，3,（1982），33—40.

〔3〕 刘永清、王慕秋、王联，非线性时变离散大系统的稳定性，控制理论与应用，**1**，1,（1984），46—59.

〔4〕 唐功友、刘永清，一类时变大系统的稳定性，华南工学院学报，**14**,3,（1986），16—27.

〔5〕 刘永清，李雅普诺夫函数的分解问题，自动化学报，**3**，3,（1965），178—182.

〔6〕 刘永清、郧齐斌、唐功友，时变离散系统的稳定性（1），山东化工学院学报，2,（1984），56—64.

〔7〕 唐功友，常系数线性差分方程组的李雅普诺夫函数公式，山东化工学院学报，1,（1983），40—58.

〔8〕 唐功友，矩阵方程 $A^TBA-B=C$ 的降阶解法，工程数学学报，**2**，1,（1985），177—179.

THE STABILITY OF A CLASS OF TIME-VARYING DISCRETE LARGE-SCALE SYSTEMS

Tang Gongyou

(Qingdao Chemical Engineering Institute)

Abstract

By the method of scalar Lyapunov function, this paper studies the asymptotic stability and unstability decompositions of a class of linear and nonlinear time-varying discrete large-scale systems. At the same time, the decomposition coefficients and the nonlinear terms are given respectively.