第4卷 第1期
1987年3月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.4, No.1
March, 1987

多变量系统近似解耦正则化补偿器的频域设计*

吴智铭　许晓鸣

（上海交通大学）

摘　要

Hung和MacFarlane在[1]中提出了正则化补偿器的设计方法，但由于未考虑解耦，使设计者难以对系统的瞬态过程进行定量的分析。本文提出的方法以开环传递函数阵的对角元素作为期望特性来设计补偿器，使补偿后的系统同时满足稳定性、瞬态要求、鲁棒性和解耦性。

一、引　言

近些年来，多变量系统频域法的研究已经取得了很大的进展。1982年，Hung和MacFarlane曾提出一种正则化补偿器的RFN设计方法[1]，其应用前景比较乐观。作为预备知识，先介绍两个定义和定理：

定义1.1（正则矩阵的定义）[2]：

若$Q\in\mathbf{C}^{m\times m}$满足$QQ^H=Q^HQ$，则$Q$是一个正则矩阵，其中$Q^H$是$Q$的共轭转置矩阵。

定义1.2（正则系统的定义）：

若描述系统的传递函数矩阵$G(s)\in\mathbf{R}(s)^{m\times m}$在系统的工作频率点集合$\mathbf{S}=\{s_1,\cdots,s_N\}$上均为正则矩阵，则系统称为（$\mathbf{S}$上的）正则系统。

定理1.1　（参见[2]）$Q\in\mathbf{C}^{m\times m}$是正则矩阵的充要条件是存在一个酉矩阵$W\in\mathbf{C}^{m\times m}$，使得$Q=W\Lambda W^H$，其中$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_m)$。

定理1.2　给定基准矩阵$Q\in\mathbf{C}^{m\times m}$，记参数扰动后的矩阵为$\widetilde{Q}=Q(I+\Delta)$，$\lambda_i$是$Q$的第$i$个特征值，$\lambda$是$\widetilde{Q}$的任何一个特征值，$Ms(Q)$是度量$Q$的非正则程度的指标，则

$$\min|\lambda-\lambda_i|\leq\|Q\|_2(\|\Delta\|+Ms(Q))。\qquad(1.1)$$

证明参见[10]。

本文于1985年1月27日收到，1986年7月15日收到修改稿。

*本文曾在第五届全国控制理论与应用学术讨论会上宣读（安徽、屯溪，1985年9月）。

从设计的观点来看，正则系统有以下优点：

(i) $G(s)$的主增益和主相位(principal gain and Phase)[3]分别等于$G(s)$特征增益函数[4]的幅值和相角，这样$G(s)$的特征增益函数同时反映了系统稳定性和矢量增益[5]的信息，更便于分析和设计。

(ii) 正则系统的特征轨迹对参数扰动具有良好的不敏感性[2]，由定理1.2又可知，这种性质对近似正则系统仍然成立。

二、正则系统的解耦

在一些工业过程控制场合，往往希望系统具有解耦特性，下面探讨正则矩阵的近似解耦条件。

在以往的设计方法中常将对角优势的系统视为近似解耦系统，这在某些场合(特别是输入输出数目较少时)是不严格的，因此有必要给出新的近似解耦定义，

定义 2.1 (α对角优势定义) 设$A\in \mathbf{C}^{m\times m}$，如果

$$|a_{ii}|>\alpha\sum_{j\neq i}^{m}|a_{ij}| \quad \left(\text{或 } |a_{jj}|>\alpha\sum_{i\neq j}^{m}|a_{ij}|\right),$$

则A的第i行(或j列)是α对角优势的。如果A的所有行(或列)是α对角优势的，则矩阵A是α行(或列)对角优势阵。当A既是α行又是α列对角优势阵，则称A为α全对角优势阵，$0<\alpha<+\infty$。

定义 2.2 (α近似解耦定义)

若$Q(s)\in \mathbf{R}(s)^{m\times m}$是单位阵反馈系统的开环传递函数阵，且$Q(s)$在工作频率集合$\mathbf{S}$上是α全对角优势阵，则称系统为α近似解耦，其中α称为$Q(s)$的解耦度。

显然，$\alpha=1$对应于一般的对角优势，$\alpha\to+\infty$对应于完全解耦，因此α近似解耦具有更一般的性质。

当$Q(s)$是正则系统，则$Q(s)$为α近似解耦的充分条件可由下面的定理给出。

定理 2.1 若正则矩阵$Q=V\Lambda V^H\in \mathbf{C}^{m\times m}$，其中$V$是酉矩阵，$\mathrm{rank}(Q)=r$，$\Lambda=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_r,\ 0,\cdots,0)$。假设

$$\det\begin{pmatrix}|v_{11}|^2 & \cdots & |v_{1r}|^2\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ |v_{r1}|^2 & \cdots & |v_{rr}|^2\end{pmatrix}\neq 0,\quad X=[x_{ij}]_{r\times r}=\begin{pmatrix}|v_{11}|^2 & \cdots & |v_{1r}|^2\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ |v_{r1}|^2 & \cdots & |v_{rr}|^2\end{pmatrix}^{-1}，\text{则当}$$

$$\max_{1\leq i\leq r}\left|\frac{q_{ii}-\tilde{q}}{\tilde{q}}\right|<\min_{1\leq i\leq r}\frac{1-\alpha\sum\limits_{j\neq i}^{m}\left|\sum\limits_{l=1}^{r}\sum\limits_{k=1}^{r}v_{ik}\bar{v}_{jk}x_{kl}\right|}{1+\alpha\sum\limits_{j\neq i}^{m}\sum\limits_{l=1}^{r}\left|\sum\limits_{k=1}^{r}v_{ik}\bar{v}_{jk}x_{kl}\right|},\tag{2.1}$$

Q的前r行前r列是α对角优势的，其中

$$\tilde{q}=\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}q_{ii}\neq 0。$$

证明参见〔10〕.

推论 2.1　若定理2.1的其它条件不变，但$\operatorname{rank}(Q)=r=m$，则当

$$\max_{1\leq i\leq m}\left|\frac{q_{ii}-\tilde{q}}{\tilde{q}}\right|<\frac{1}{1+\alpha\max\limits_{1\leq i\leq m}\sum\limits_{j\neq i}^{m}\sum\limits_{l=1}^{m}\left|\sum\limits_{k=1}^{m}v_{ik}\bar{v}_{ik}x_{kl}\right|}\tag{2.2}$$

成立时，Q是α全对角优势阵.

证明参见〔10〕.

三、近似解耦正则化系统的分析

（1）稳定性分析。

定理 3.1　设$Q(s)\in\mathbf{R}(s)^{m\times m}$是系统的开环传递函数阵，若$Q(s)$是正则矩阵，则单位闭环系统稳定的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m}\#E[q_{ii}(s),\ -1]=\ \#Z[\mathrm{olcp}(s),\ \mathbf{C}_+],\tag{3.1}$$

其中　$\mathbf{C}_+$是Nyquist路径所包围的区域；olcp(s)是开环特征多项式；$\#Z[\mathrm{olcp}(s),\mathbf{C}_+]$是olcp$(s)$在$\mathbf{C}_+$中的零点数；$\#E[q_{ii}(s),\ -1]$是当$s$沿Nyquist路径顺时针运动一周，$q_{ii}(s)$逆时针绕$(-1,0)$点的圈数；olcp$(s)$是闭环系统的特征多项式。

证明参见〔10〕.

由此可知，当补偿后的开环传递函数阵为正则时，稳定性可以直接从$Q(s)$的对角元来判断.

（2）瞬态分析

由于系统是α近似解耦的，可以认为（见〔8〕和〔9〕），$q_{ii}(s)$近似描述了$u_i(s)$和$y_i(s)$之间的传递特性，因此可以用成熟了的单变量方法来近似分析多变量系统的瞬态特性。

（3）鲁棒性（robustness）分析

若基准（nominal）开环传递函数阵为$Q(s)$，而实际的含有非结构化不确定的开环传递函数阵为$\tilde{Q}(s)$，不失一般性，假设不确定性表现在输出端，则有$\tilde{Q}(s)=[I+L(s)]Q(s)$，其中$\|L(s)\|_2\leq l_m(s)$。

定理 3.2　设$Q(s)\in\mathbf{R}(s)^{m\times m}$是正则系统，且$Q(s)[I+Q(s)]^{-1}$是稳定的，当$\tilde{Q}(s)=[I+L(s)]Q(s)$，$\|L(s)\|_2\leq l_m(s)$时，$\tilde{Q}(s)[I+\tilde{Q}(s)]^{-1}$仍保持稳定的充分必要条

件是

$$\begin{cases} \min\limits_{k}\left|\lambda_k+\dfrac{1}{1-l_m^2}\right|>\dfrac{l_m}{1-l_m^2}, & \text{当 } l_m(s)<1 \\ \min\limits_{k}\operatorname{Re}(\lambda_k)>-\dfrac{1}{2}, & \text{当 } l_m(s)=1 \\ \min\limits_{k}\left|\lambda_k-\dfrac{1}{l_m^2-1}\right|<\dfrac{l_m}{l_m^2-1}, & \text{当 } l_m(s)>1 \end{cases} \quad (3.$$

其中 λ_k 是 $Q(s)$ 的第 k 个特征值。

证明参见〔10〕。

文献〔7〕指出，对于一般实际系统，低频段 $l_m(s)\ll 1$，中频段 $l_m(s)\simeq 1$，高段 $l_m(s)\gg 1$。由定理 3.2 可以得到对 $\{\lambda_i(s),\ i=1,\cdots,m\}$ 的定性要求：

(a)在低频段，$\{\lambda_i(s), i=1,\cdots,m\}$ 应尽量远离临界点 $(-1,0)$。

(b)在中频段，$\{\lambda_i(s), i=1,\cdots,m\}$ 应保持在直线 $\operatorname{Re}(s)=-\frac{1}{2}$ 的右方。

(c)在高频段，$\{\lambda_i(s), i=1,\cdots,m\}$ 应收敛到原点 $(0,0)$。

由于任何 $q_{kk}(s)$ 都是 $\lambda_i(s)$，$i=1,\cdots,m$ 的加权平均，故为保证系统的鲁棒性 $\{q_{kk}(s),\ k=1,\cdots,m\}$ 的选取仍应基本满足上述三个定性要求。

四、近似解耦正则系统的设计

为了便于说明问题，我们把补偿器限定为前补偿，反馈阵限定为单位阵，对于其结构，只要作些变换，都能化成上述系统。由于单位阵反馈不改变系统的正则性，所只需保证 $Q(s)=G(s)K(s)$ 是正则矩阵即可，其中 $G(s)$ 是对象的传递函数阵，$K(s)$ 是偿器的传递函数阵。近似解耦正则化补偿器的设计，可按下列步骤进行。

步骤 1：选取期望的 $q_{ii}(s)$，$i=1,\cdots,r$ 并确定工作频率点集合 $W=\{\omega_1,\cdots,\omega_N\}$，
$Q(j\omega_p)=U(j\omega_p)\operatorname{diag}(q_{11}(j\omega_p),\cdots,q_{rr}(j\omega_p))U^H(j\omega_p)$，$p=1,\cdots,N$，
其中 $U(j\omega_p)$ 是 $G(j\omega_p)$ 的奇异值分解中的左结构阵。

步骤 2：应用〔1〕的 RFN 设计方法，确定理想的补偿器矩阵值 $\widetilde{K}(j\omega_p), p=1,\cdots,$

步骤 3：确定性能指标 J，用优化的方法拟合 $K(s)$，使 $G(s)K(s)$ 在 $j\omega_p, p=1,\cdots$ 处的值尽可能接近 $G(s)\widetilde{K}(s)=Q(s)$。

当 $G(s)$ 的奇异结构阵 $U(s)$ 的结构不满意时，可以用预乘实数阵 K_0 的方法来改这种结构，等效的 $G'(s)=G(s)K_0$。

作者们曾在 Honeywell DPS—8 计算机上应用上述方法进行了一系列仿真研究结果令人满意，从而验证了方法的有效性，参见〔10〕。

参 考 文 献

〔1〕 Hung, Y. S. and MacFarlane, A. G. J., Multivariable Feedback: A Quasi-Classical Approach, Lecture Notes in Control and Information Science, Vol. 12, Springer-Verlag, Berlin, (1982).

〔2〕 Wilkinson, J.K.,The Algebraic Eigenvalue Problem, Clarendon Press, Oxford, (1965).

〔3〕 Postlathwaite, I., Edmunds, J. M. and MacFarlane, A. G. J., Principal Gains and Principal Phases in the Analysis of Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automatic Control, AC—**26**, (1981), 32—46.

〔4〕 MacFarlane, A. G. J. and Postlathwaite, I., Characteristic Frequency and Characteristic Gain Functions, Int. J. of Control, **26**, (1977), 265—278.

〔5〕 MacFarlane, A. G. J. and Scott-Janes, D. F. A., Vector Gains, Int. J. of Control, **29**, (1979), 65—91.

〔6〕 Nwokah, O. D. I., Stability of Linear Multivariable Systems, Int. J. Control, **37**, (1983), 623—629.

〔7〕 Doyle, J. C. and Stein, G., Multivariable Feedback Design: Concepts for a Classical Modern Synthesis, IEEE Trans. Automatic Control, AC—**26**, (1981), 4—16.

〔8〕 Hawkins, D. J., Pseudo-diagonalization and the Inverse Nyquist Array Method, Proc. IEEE, **119**, (1972), 337—342.

〔9〕 Rosenbrock, H. H., Computer-aided Control Systems Design, Academic Press, London, (1974).

〔10〕 许晓鸣，近似解耦正则化补偿器的频域设计，上海交通大学硕士论文，(1984).

〔11〕 Wu, Z. M. and Xu, X. M., The Frequeny Pomain Design of Approximately Decoupling and Normalizing Compensators for Multivariable Systems, Proc. of 3rd IFAC/IFIP International Symposium CADCE' 85, Denmark, July31～Aug. 2, (1985), 226—230.

THE FREQUENCY DOMAIN DESIGN OF APPROXIMATELY DECOUPLING AND NORMALIZING COMPENSATORS FOR MIMO SYSTEMS

Wu Zhiming, Xu Xiaoming

(Shanghai Jiaotong University)

Abstract

In [1], Hung and MacFarlane presented a design method for normalising compensators. Since the compensated systems were not decoupled, it is hard to analyse the dynamic behaviour of outputs $y_i(t)$ seperately. The method given here illustrates how to choose the diagonal elements $q_{ii}(s)$' s of open-loop transfer function matrix $Q(s)$ for obtaining such a precompensator $K(s)$ that satisfies the requirements of stability, dynamic behaviour of outputs, robustness and decoupling. The method is suitable for computer-aided design, since all the design work, except choosing $q_{ii}(s)$'s by man-machine interaction, are carried out by computers.