

二节倒立摆的数字控制器设计

梁任秋 赵松 唐悦 赵永生

(清华大学)

摘 要

本文介绍了用数字计算机对具有六个状态变量的二节倒立摆进行控制时, 三种数字控制器和降维观测器的设计方法. 用单板机在实验室中成功地进行了控制表明, 这三种设计方法都是实用的.

一、前 言

原理也用于控制火箭稳定发射的倒立摆装置, 是一种深入学习与研究现代控制理论的有效实验设备. 我们所用的二节倒立摆, 是一套单输入多输出的六阶系统. 其中, 有三个状态变量需用观测器重构. 本文介绍对该系统进行线性调节时, 三种数字控制器的工程设计方法, 即: 连续系统极点配置法、连续系统二次型性能指标法和离散系统二次型性能标法. 用单板机在实验室中成功地进行了控制表明, 这三种设计方法在工程中都是实用的.

二、对象数学模型

如图1所示, 由上摆、下摆和在导轨上运动的小车组成的装置, 是一套不稳定系统, 若不加以控制, 两摆将会立即倒下. 为了使双摆不倒, 需由电位器 P_1 、 P_2 和 P_3 , 分别将小车位置 r , 下摆角位移 θ_1 , 以及上摆角位移与下摆角位移之差 ($\theta_2 - \theta_1$) 的三路信号送入单板机. 单板机进行必要的计算和判断后, 发出适当的控制信号 u 去控制力矩电机. 通过传动皮带, 电机将驱动小车在水平方向不断进行保持双摆不倒的运动.

本系统可用以下六个状态变量进行描述: x_1 表示小车位置 r (即 y_1), x_2 表示下摆偏离垂直线的角位移 θ_1 (即 y_2), x_3 表示上摆偏离垂直线的角位移 θ_2 与上述的 θ_1 之差 (即 y_3), x_4 表示小车水平运动速度 $\dot{r}$ (其重构状态为 $\hat{x}_4$), x_5 表示下摆的角速度 $\dot{\theta}_1$ (其重构状态为 $\hat{x}_5$), x_6 表示上摆角速度 $\dot{\theta}_2$ 与下摆角速度 $\dot{\theta}_1$ 之差 (其重构状态为 $\hat{x}_6$). 本装置为配有模拟控制器的定型产品, 有关参数见附录1. 用拉格朗日方程

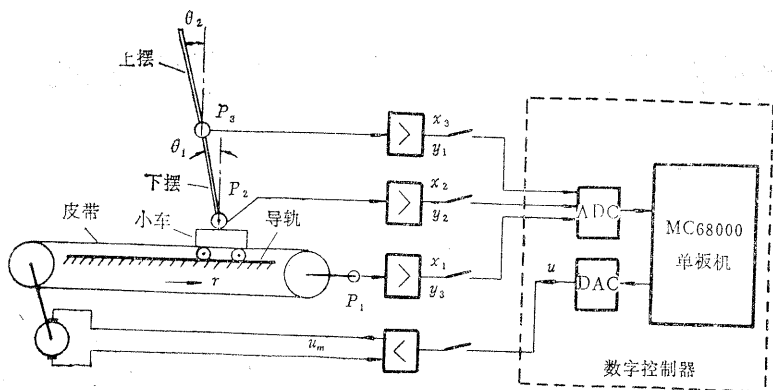


图 1 二节倒立摆数字控制系统原理框图

或动力学方程^[2]可建立此非线性系统的数学模型。适当地考虑到摩擦的影响, 在 $r = \theta_1 = \theta_2 = \dot{r} = \dot{\theta}_1 = \dot{\theta}_2 = 0$ 不稳定平衡点附近进行线性化, 得数学模型

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad (1a)$$

$$y = Cx, \quad (1b)$$

式中 $x = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6)^T$, $y = (y_1 y_2 y_3)^T$, 而 A 、 b 和 C 见附录 2。 A 的开环极点为 -17.212 , 8.2958 , -8.7064 , -3.7809 , 3.9402 , 0 。由于有两个极点在 S -平面右半部, 因此系统是不稳定的。

将本系统进行坐标变换, 即令 $\bar{x} = Px$, 代入式 (1a) 和 (1b), 其中 P 为变换阵, 可得其可控标准型为

$$\dot{\bar{x}} = \bar{A} \bar{x} + \bar{b} u, \quad (2a)$$

$$\bar{y} = \bar{C} \bar{x}, \quad (2b)$$

式中的 $\bar{A}$ 、 $\bar{b}$ 和 $\bar{C}$ 亦见附录 2。经计算表明, 本系统是可控和可观的。

三、数字控制器的三种设计方法

(1) 连续系统极点配置法

采样周期较短时, 可用“连续系统离散化”方法求得的离散系统来逼近连续系统。设计的目标是用状态反馈控制量

$$\bar{u} = -\bar{K} \bar{x} \quad (3)$$

来改变系统 (2) 的控制过程, 使整个闭环系统

$$\dot{\bar{x}} = (\bar{A} - \bar{b} \bar{K}) \bar{x} \quad (4)$$

的极点或特征方程

$$\det(sI - \bar{A} + \bar{b} \bar{K}) = 0 \quad (5)$$

的各个系数均为我们希望选定的值。为此，将式(3)代入式(2a)，得闭环系统

$$\begin{pmatrix} \dot{\bar{x}}_1 \\ \dot{\bar{x}}_2 \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_5 \\ \dot{\bar{x}}_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ (-a_1 - \bar{k}_1) & (-a_2 - \bar{k}_2) & (-a_3 - \bar{k}_3) & \dots & (-a_6 - \bar{k}_6) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \bar{x}_2 \\ \vdots \\ \bar{x}_5 \\ \bar{x}_6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} u. \quad (6)$$

此闭环系统的特征方程还可表示为

$$\begin{aligned} \det(sI - \bar{A} + \bar{b} \bar{K}) &= (a_1 + \bar{k}_1) + (a_2 + \bar{k}_2)s + \dots + (a_6 + \bar{k}_6)s^5 + s^6 \\ &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \dots + \alpha_6 s^5 + s^6 \\ &= (s - s_1)(s - s_2) \dots (s - s_6) = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

如果希望得到的闭环极点 s_i 已预先给出，由式(7)的系数对应关系，可求得 $\bar{K}$ 的各个元素

$$\bar{k}_i = \alpha_i - a_i, \quad i = 1, 2, \dots, 6, \quad (8)$$

再作 $K = KP^{-1}$ 坐标变换，便可求出对原系统(1)进行线性反馈控制的增益阵 K 。 s_i 可以这样选择：为使状态 x_1 在阶跃输入下响应快和超调少，取主导极点为 $-1 \pm j$ (阻尼系数 $\xi = 0.707$)，其余极点远离它 5 倍以上，例如为 $-6 \pm 6j$ ， $-10 \pm 10j$ 。经计算可得 $K = (-2.9975 \quad 24.979 \quad 48.495 \quad 1.9072 \quad 8.4535 \quad 6.9016)$ 。仿真结果表明，它能使系统稳定工作。

极点配置要求全状态反馈，因此要对状态 x_4 、 x_5 和 x_6 进行重构。为了缩短计算机运算时间，我们采用降维观测器。按照文献[3]的方法，可得本系统的降维观测器为

$$\dot{\hat{z}} = (A_{22} + L)\hat{z} + (A_{21} - (A_{22} + L)L)y + b_2 u = F\hat{z} + Gy + hu, \quad (9a)$$

$$\hat{x} = \hat{z} - Ly, \quad (9b)$$

式中 $\hat{x} = (\hat{x}_4 \hat{x}_5 \hat{x}_6)^T$ ， L 、 F 和 G 为 3×3 实数阵， h 为 3×1 实数阵。这里只有 L 未知，

对它一般可用极点配置法去选取。但因 A_{22} 右上角诸元素绝对值较小, 可近似看作下三角阵。若其主对角线元素都选为某一常数 $-\rho$ (即 $L = \rho I$), 则 F 的特征值: 等于 $(A_{22} + L)$ 阵主对角线的元素值。今选 $L = -7I$, 这时 F 阵的极点为 $-23 - 7.702j$, $-23 + 7.702j$ 。

用数字计算机实现此观测器时需将其离散化。当采样周期 T_s 较小时有

$$\dot{z} \approx (z_{k+1} - z_k)/T_s.$$

将式 (10) 代入式 (9), 得离散化的降维观测器为

$$z_{k+1} = (FT_s + I)z_k + GT_s y_k + hT_s u_k, \quad (11a)$$

$$\hat{x}_k = z_k - Ly_k. \quad (11b)$$

若选 $T_s = 5\text{ms}$, 并用上述 L 阵参数及附录 2 的参数, 由式 (11) 可求得具体的降维观测器为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} z_{1(k+1)} \\ z_{2(k+1)} \\ z_{3(k+1)} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0.8884 & 0.0001 & 0.0000 \\ 0.1866 & 0.9646 & 0.0008 \\ -0.2283 & 0.0022 & 0.9628 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \\ z_{3k} \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} -0.7812 & -0.0117 & 0.0060 \\ 1.3059 & -0.1019 & -0.0686 \\ -1.5980 & -0.1628 & 0.0602 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.0408 \\ -0.0985 \\ 0.1205 \end{bmatrix} u_k \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{x}_{1k} \\ \hat{x}_{2k} \\ \hat{x}_{3k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \\ z_{3k} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \end{bmatrix}. \quad (13)$$

考虑到式 (11b), 可得数字控制规律为

$$u_k = -Kx_k = -(K_{1-3} : K_{4-6}) \begin{bmatrix} x_{(1-3)k} \\ \dots\dots\dots \\ x_{(4-6)k} \end{bmatrix} = -K_{4-6}z_k - (K_{1-3} + K_{4-6}L)y_k, \quad (14)$$

式中 $K_{1-3} = (k_1 k_2 k_3)$, $K_{4-6} = (k_4 k_5 k_6)$, 将已求出的 K 及式 (12) 代入式 (13) 得具体数字控制规律为

$$u_k = -(1.9072 \ 8.4535 \ 6.9016) \begin{bmatrix} z_{1k} \\ z_{2k} \\ z_{3k} \end{bmatrix} - (16.348 \ 84.154 \ 96.806) \begin{bmatrix} y_{1k} \\ y_{2k} \\ y_{3k} \end{bmatrix} \quad (15)$$

为了能在单板机上作定点小数运算, 需将式 (14) 中各数均缩小若干倍 (输出控制放大若干倍), 并都化为十六进制数。

上述的设计基本是成功的, 仅在稳态时小车的摆动幅度较大。若将系统闭环极

1 期

为 $-1 \pm 0.5j$, $-5 \pm 5j$, $-20 \pm 20j$, 这时可求得反馈增益阵 $K = -(5.2041 \quad 66.700$

116.14 7.7658 21.464 16.246)。

用此 K 及式 (12) 观测器进行仿真表明, 其控制效果会更好。用单板机进行控制时, 小车摆动幅度大为减小。用小棒敲击上摆时具有一定的抗扰能力。把小车从平衡位置拉开 0.4 米再令其自动返回原位时, 过渡过程时间不到 3 秒, 状态 x_1 、 x_2 和 x_3 均无超调, 详见图 2 的实际记录曲线 (用飞利浦 FE250/4 型四线记录仪自动记录)。

(2) 连续系统二次型性能指标

标法

对于系统 (1), 在初始条件 $x(0) = x(0) = 0$ 和所有状态可测 (或可重构) 下, 要求从状态变量 x 中产生控制量 $u = -Kx$, 令系统过渡到最终状态 $x(\infty) = 0$, 并使二次型性能指标

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + r u^2) dt \quad (15)$$

极小。其中 Q 为 6×6 对称半正定常数加权阵, r 为大于零的加权系数。反馈增益阵 K 的计算, 可在已知的 A 、 b 、 Q 和 r 下, 用解连续系统的 Riccati 方程^[3] 的方法 (通过 CAD) 来进行。对 Q 和 r 的选择有较大的灵活性, 一般可按 Q 和 r 中各元素之大小, 与对应的控制量 u 和状态变量 x 最大值的平方的倒数成正比的关系进行初选, 然后再经仿真或实际调试予以修正。我们参考了文献[4]的取法, 取 $r = 0.1$, $Q = \text{diag}(1, 50, 250, 0, 0, 0)$ 。仿真表明, 控制效果是好的。通过 CAD, 求得 $K = -(3.1560 \quad 46.956 \quad 122.48 \quad 3.9740 \quad 19.423 \quad 16.381)$ 。系统闭环极点为 $-0.9378 \pm 0.6699j$, $-3.3324 \pm 2.3207j$, $-28.4032 \pm 24.034j$ 。再选取 $L = -10I$ 和 $T_s = 5\text{ms}$, 可得到另一个形式仍与式 (12) 相同的降维观测器。其极点为 -10.046 , -10.702 , -26.716 。用单板机控制表明, 此 K 和观测器的性能也是较好的。小车从 0.4 米远处自动返回原平衡位置时, 过渡过程时间不到 3 秒, x_1 、 x_2 、 x_3 和 u 的记录曲线见图 3。敲击上摆或将导轨倾斜 5° 时具有一定抗扰能力。

(3) 采样或离散系统二次型性能指标法

按文献[5]的方法, 先将系统 (1) 离散化, 得系统

$$x_{k+1} = \Phi(T_s)x_k + \Gamma(T_s)u_k = \Phi(T_s)x_k + \begin{pmatrix} \Gamma_1(T_s) \\ \dots\dots\dots \\ \Gamma_2(T_s) \end{pmatrix} u_k, \quad (16a)$$

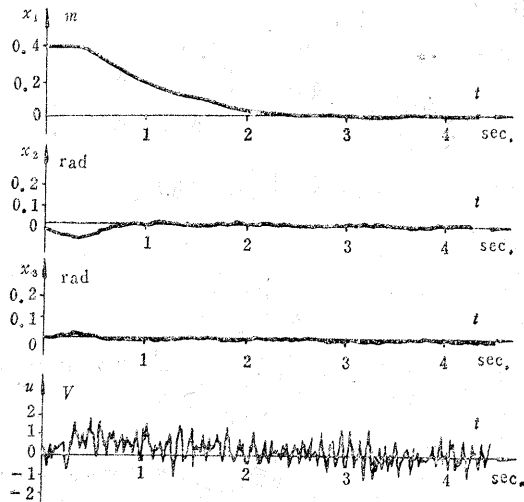


图 2 输入量与输出量的变变化线 (连续系统极点配置法)

$$y_k = Cx_k = (\mathbf{I}_{3 \times 3} : \mathbf{0}_{3 \times 3})x_k, \quad (16)$$

式中

$$\phi(T_s) = e^{\mathbf{A}T_s} = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{bmatrix} = \mathbf{I} + \mathbf{A}T_s + \frac{\mathbf{A}^2 T_s^2}{2!} + \dots, \quad (17)$$

$$\Gamma(T_s) = \int_0^{T_s} \phi(\tau) \mathbf{b} d\tau, \quad (18)$$

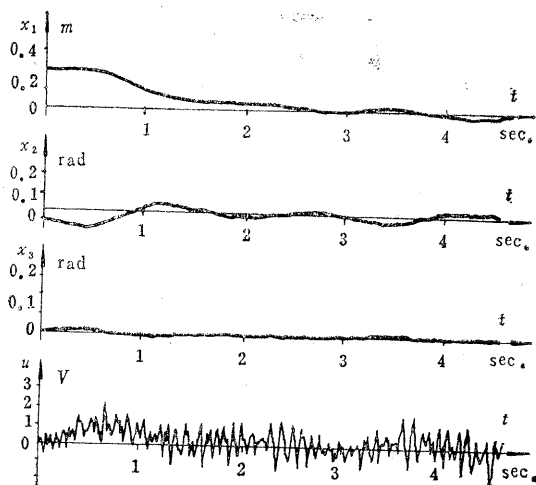


图 3 输入量与输出量的变化曲线(连续系统二次型最优指标法)

若选取 $r=0.1$, $\mathbf{Q}=\text{diag}(1, 50, 250, 0, 0, 0)$, $T_s=10\text{ms}$, 并用已知的 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{b}$, 算出 $\phi(T_s)$ 和 $\Gamma(T_s)$. 由

$$\det(z\mathbf{I} - \phi(T_s)) = 0 \quad (19)$$

求出 $\phi(T_s)$ 的极点为 $0.84851 \pm 0.03328j$, $0.97032 \pm 0.09767j$, $1.1052 \pm 0.05511j$. 两个极点在单位圆外, 系统是不稳定的.

将式(15)的指标化为以下离散形式

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{u}_k] \begin{bmatrix} \mathbf{Q}_{11} & \mathbf{Q}_{12} \\ \mathbf{Q}_{21} & \mathbf{Q}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_k \\ \mathbf{u}_k \end{bmatrix} \\ &= \sum_{k=0}^{N-1} [\mathbf{x}_k^T \mathbf{Q}' \mathbf{x}_k + \mathbf{u}_k'^T \mathbf{r}' \mathbf{u}_k'], \end{aligned} \quad (20)$$

式中

$$N = t/T_s, \quad (21a)$$

$$Q_{11} = \int_0^{T_s} \phi^T(\tau) Q \phi(\tau) d\tau, \quad (21b)$$

$$Q_{21} = \int_0^{T_s} \phi^T(\tau) Q \Gamma(\tau) d\tau, \quad (21c)$$

$$Q_{12} = Q_{21}^T, \quad (21d)$$

$$Q_{22} = \int_0^{T_s} [\Gamma^T(\tau) Q \Gamma(\tau) + r] d\tau, \quad (21e)$$

$$Q' = Q_{11} - Q_{12} Q_{22}^{-1} Q_{21}, \quad (21f)$$

$$r' = Q_{22}, \quad (21g)$$

$$u'_k = u_k + Q_{22}^{-1} Q_{21} x_k = K' x_k. \quad (21h)$$

对系统 (16) 进行数字控制的规律是

$$u_k = -K x_k = -(K' - Q_{22}^{-1} Q_{21}) x_k. \quad (22)$$

已知 $\phi(T_s)$ 和 $\Gamma(T_s)$, 用解采样或离散系统 Riccati 方程的 CAD 程序, 可在一定迭代次数下, 求得其反馈增益阵 $K = -(2.490 \quad 36.87 \quad 99.82 \quad 2.740 \quad 15.50 \quad 13.40)$.

离散系统的降维观测器为

$$\begin{aligned} z_{k+1} &= (\phi_{22} + L\phi_{12})z_k + [(\phi_{21} + L\phi_{11} - (\phi_{22} + L\phi_{12})L)y_k + (\Gamma_2 + L\Gamma_1)u_k \\ &= Fz_k + Gy_k + hu_k, \end{aligned} \quad (23a)$$

$$\hat{x}_k = z_k - Ly_k. \quad (23b)$$

若仍选取 $L = -10I$, 可求出形式与式 (12) 相同的观测器. 用它和求出的反馈增益阵进行控制, 系统很稳定. 突加位置给定时的仿真结果与实际控制结果基本相符. 令小车从 0.4 米远返回原点时 x_1 、 x_2 、 x_3 和 u 的记录曲线见图 4. 其过渡过程时间, 以及用小棒敲击上摆时系统恢复到平衡状态所需的过渡过程时间均不大于 4 秒.

四、单板机控制系统

图 1 系统中所用的单板机为 MC68000, 具有汇编和反汇编功能. 我们另配备 12 位的 ADC (ADC1210) 和 12 位的 DAC (DAC1210). 实现数字控制所需汇编语言程序约占内存 3KB. 采样周期可在 4ms 到 40ms 间任选.

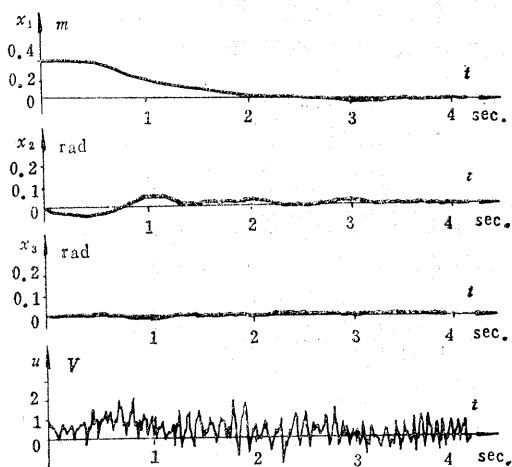


图 4 输入量与输出量的变化曲线 (采样或离散系统二次型最优指标法)

五、小 结

(1) 三种数字控制器的控制效果是良好的。除了敲击上摆时抗扰能力略为不及拟控制外, 均达到了我们已见到的由模拟控制器或小型计算机控制时所达到的主要指标。如敲击上摆或令小车从 0.4 米远返回平衡位置时, 无超调过渡过程时间均不秒。

(2) 三种设计方法所获得的控制效果基本相同, 设计的难易程度相差也不太大, 只要有所需的 CAD 程序, 均可在工程中选用。

(3) 试验还表明, 用 8 位的单板机、ADC 和 DAC 也能控制二节倒立摆稳定。

致谢 设计中, 高龙副教授、解学书副教授、孙增圻副教授、梁德全讲师和叶楠师曾给予热情指导及帮助, 作者深表感谢。

附录1 二 节 倒 立 摆 参 数

M_0 (小车及驱动系统等效质量)	1.3282kg
M_1 (下摆质量)	0.22kg
M_2 (上摆质量)	0.187kg
J_1 (下摆转动惯量)	0.004963kg·m ²
J_2 (上摆转动惯量)	0.004824kg·m ²
l_1 (下摆质心至轴心距离)	0.304m
l_2 (上摆质心至轴心距离)	0.226m
L_1 (下摆轴心至上摆轴心距离)	0.49m
F_0 (小车系统摩擦系数)	22.915N·s/m
F_1 (下摆摩擦阻力矩系数)	0.007056N·m·s
F_2 (上摆摩擦阻力矩系数)	0.002644N·m·s
K_M (力矩电机的机电常数)	0.9467N·m/A
U_M (驱动力矩电机电压)	约±24V
K_P (功率放大器电压增益)	-8
R_0 (功率放大器输出电阻)	1.252Ω
R_a (力矩电机电枢电阻)	8.55Ω
D (皮带轮直径)	0.13m
G_0 (作用到小车上的力与控制电压之比值: $G_0 = 2K_P K_M / D(R_a + R_0)$)	11.887N/V

(来自江苏溧阳电子电器设备厂产品出厂文件; 西安交通大学自动控制教研室编, DBL 二节倒立摆实验指导书, 1984, 8)

附录2 模型中各矩阵元素

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & -2.5735 & 0.16425 & \vdots & -16.667 & 0.01241 & -0.00570 \\ 0 & 29.949 & -15.192 & \vdots & 40.317 & -0.20486 & 0.17380 \\ 0 & -36.694 & 65.444 & \vdots & -49.395 & 0.46348 & 0.59144 \end{bmatrix}$$

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \hline 8.6462 \\ -20.914 \\ 25.624 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 & -a_4 & -a_5 & -a_6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -18521 & -1168.8 & 14954 & 82.864 & -17.46 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b} = [000001]^T \quad \bar{C} = \begin{bmatrix} 9607.9 & -121.25 & -766.55 & 6.4796 & 8.6464 & 0 \\ 0 & -0.0295 & 979.39 & -7.9168 & -20.915 & 0 \\ 0 & -0.01487 & -0.001944 & -4.4461 & 25.624 & 0 \end{bmatrix}$$

参 考 文 献

- [1] Schultz and Melsa, State Functions and Linear Control Systems, Mc Graü-Hill, (1969), Chapter 3.
- [2] Furuta, K., Okutani, T. and Sone H., Computer Control of A Double Inverted Pendulum, Comput. & Elect. Engng., 5, (1978), 67—84.
- [3] 佛特曼, T·E·, 海兹, K·L·, 线性系统引论, 机械工业出版社, (1980), 第12、13章.
- [4] 尹征琦、冯祖仁、陈辉堂, 采用模拟调节器的二级倒立摆的控制, 信息与制, 1, (1985), 6—10.
- [5] Paul Katz, Digital Control Using Microprocessors, Prentice-Hall, (1981), 268—277.

THE DESIGNS OF DIGITAL CONTROLLER OF A DOUBLE INVERTED PENDULUM

Liang Renqiu, Zhao Song, Tang Yue, Zhao Yongsheng

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

This paper is concerned with the computer control of an inverted double pendulum with six state variables. Three design approaches of the digital controller and the reduced order observer are presented. The designs are implemented successfully by a single board computer, and the laboratory experiments show that the designs are desirable.