

Schur 法解 Riccati 方程时的一种加速解法

叶庆凯

(北京大学)

摘 要

当前,在解代数 Riccati 方程的各种方法中, Schur 向量法是一种相当有效的算法. Schur 向量法的关键在于交换伪上三角形矩阵对角线上的对角块的位置. 以前,均使用 EXCHNG 程序来实现这一交换过程. 它用的是 QR 方法,因而占用了很大一部分计算时间. 本文提出用一种直接方法来实现这一交换,可节省一些计算时间.

一、引 言

设线性定常系统的状态方程为

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad (1)$$

其中 $A \in R^{n \times n}$, $B \in R^{n \times m}$, $x \in R^n$, $u \in R^m$, 一般有 $n \geq m$ 且 $\text{rank} B = m$.

考虑系统(1)在如下二次性能指标下的最优控制问题

$$J[u(\cdot)] = \int_{t_0}^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt, \quad (2)$$

其中 $Q \in R^{n \times n}$, $R \in R^{m \times m}$, 且 $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$. 显然,对于非负定的对称矩阵 Q , 存在 $C \in R^{r \times n}$, 使 $Q = C^T C$ 且 $\text{rank} C = \text{rank} Q = r \leq n$.

已经知道^[1], 当 (A, B) 能稳定, (A, C) 可检测时, 问题(1)和(2)存在唯一解, 它由状态反馈

$$u^*(t) = -Kx(t) \quad (3)$$

给出, 其中

$$K = R^{-1}B^T P, \quad (4)$$

而矩阵 P 是下述代数 Riccati 方程的唯一对称正定解:

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \quad (5)$$

迄今, 已有不少解代数 Riccati 方程的算法^[2, 8]. 对于某些特殊情况, 存在着一些很好的算法^[3, 4]. 对于一般情况, 除符号函数法^[5]外, Schur 向量法是一种很有前途的方法.

二、Schur 向量法简介

定理 1^[8] 令 $A \in R^{n \times n}$, 则存在一个可逆矩阵 U 使 $A' = U^{-1}AU$ 是伪上三角形的, 而且, 可以选择 U 使对角线上的 2×2 和 1×1 的对角块以任意指定的次序排列。

定义 令 $A \in R^{n \times n}$, 若存在可逆矩阵 U 使 $A' = U^{-1}AU$ 分解成形式 $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}$, 其中 $A_{11} \in R^{K \times K}$, $0 < K \leq n$, 则称矩阵 U 的头 K 个列向量为相应于 $\sigma(A_{11}) \subseteq \sigma(A)$ 的 Schur 向量, 这里 $\sigma(\cdot)$ 表示相应矩阵的谱。

对于方程 (5), 可以构成相应的 Hamilton 矩阵

$$H = \begin{pmatrix} A & -BR^{-1}B^T \\ -Q & -A^T \end{pmatrix}. \quad (6)$$

已经知道, 矩阵 H 没有纯虚的特征值, 且若 $\lambda \in \sigma(H)$, 则 $-\lambda \in \sigma(H)$ 且重数相同。

由定理 1, 可找到可逆矩阵 $U \in R^{2n \times 2n}$ 使

$$S = U^{-1}HU = \begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ 0 & S_{22} \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中 $S_{ij} \in R^{n \times n}$, 且 S_{11} 的特征值均具有负实部而 S_{22} 的特征值均具有正实部。

将矩阵 U 分解为

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}. \quad (8)$$

其中 $U_{ij} \in R^{n \times n}$, 则有下列定理成立。

定理 2^[8] U_{11} 是可逆的且方程 (5) 的解为

$$P = U_{21}U_{11}^{-1}. \quad (9)$$

这样, 用 Schur 向量法解代数 Riccati 方程 (5) 的具体步骤如下。

算法 1:

- 1) 组成 Hamilton 矩阵 H 。
- 2) 将矩阵 H 化成上 Hessenberg 形。
- 3) 将上 Hessenberg 形化为形如 (7) 的实 Schur 形。
- 4) 确定相应的变换矩阵 U , 并将它分解为

$$U = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{pmatrix}.$$

5) 解方程组

$$PU_{11} = U_{21}.$$

显然, 实现算法 1 的关键在于其中的第 3) 步。通常用下述方法来实现, 算法 2;

1) 作一次双步 QR 迭代。若得两个实根, 进行 2); 若得一对复根, 进行 3)。

2) 检查实根的符号。若全为负的, 进行 4)。若有正的, 则将它与右下方的对角块交换, 直至对应于右下方的对角块的特征值具有正实部为止, 然后进行 4)。

3) 检查复根的实部的符号。若为负的, 进行 4)。若为正的, 则将它与右下方的对角块交换, 直至对应于右下方的对角块的特征值具有正实部为止, 然后进行 4)。

4) 若已得 n 个具有正实部的特征值, 则已得到了形如 (7) 的实 Schur 形; 否则, 返回 1)。

容易看出, 这一过程一般说来并不要求出全部 $2n$ 个特征值, 而只要求出全部 n 个具有正实部的特征值就可以了。

这样, 整个问题的关键在于交换伪上三角形矩阵对角线上相继对角块的位置。为数值稳定, 要求变换矩阵是正交矩阵。

三、交换相继对角块的快速算法

在以前的文献中, 用 EXCHNG 程序^[7]来交换相继的对角块。它使用 QR 迭代方法, 因而占用了很大一部分计数时间。这里我们提出一种直接方法, 可节省一些计算时间。

可能出现下面四种情况, 现分别进行讨论。

(1) 第一种情况 (交换两个 1×1 块): 此时要求正交矩阵 $C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}$ 使

$$C \begin{pmatrix} a & a_{12} \\ 0 & b \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} b & \times \\ 0 & a \end{pmatrix}, \text{ 其中 } a \neq b.$$

由正交条件以及要求条件可得

$$c_{11}^2 + c_{12}^2 = 1, \quad c_{21}^2 + c_{22}^2 = 1, \quad c_{11}c_{21} + c_{12}c_{22} = 0, \quad (10)$$

$$c_{11}c_{21}a + c_{12}(c_{21}a_{12} + c_{22}b) = 0. \quad (11)$$

由此可得

$$c_{12}(c_{21}a_{12} + c_{22}(b-a)) = 0.$$

因而有 $c_{12} = 0$ (此时 $C = I$, 不满足要求) 或

$$c_{22} = Ac_{21}, \quad \text{其中 } A = \frac{a_{12}}{a-b}.$$

代入式 (10) 可解出变换矩阵为

$$C = \begin{pmatrix} -\frac{A}{\sqrt{1+A^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+A^2}} & \frac{A}{\sqrt{1+A^2}} \end{pmatrix}. \quad (12)$$

(2) 第二种情况 (交换 1×1 块与 2×2 块): 此时要求正交矩阵 $C = (c_{ij})$ 使

$$C \begin{pmatrix} a & d_1 & d_2 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \times \\ e_{21} & e_{22} & \times \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \text{ 其中 } b_{21} \neq 0.$$

由于正交变换不改变特征值, 变换前后的 2×2 对角块对应的特征值必定相同。

先进行一次旋转变换, 即令

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ d_1/S & 0 & b_{21}/S \\ -b_{21}/S & 0 & d_1/S \end{pmatrix}, \text{ 其中 } S = \sqrt{b_{21}^2 + d_1^2}. \quad (13)$$

由此可得

$$C' \begin{pmatrix} a & d_1 & d_2 \\ 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} C'^T = \begin{pmatrix} b_{11} & A & \times \\ S & B & \times \\ 0 & E & \times \end{pmatrix},$$

其中 $A = b_{12}b_{21}/S$, $B = (ad_1^2 + d_1d_2b_{21} + b_{21}^2b_{22})/S^2$, $E = (d_1b_{21}(b_{22} - a)$

$-b_{21}^2d_2)/S^2$ 。若 $E=0$, C' 即要求的变换矩阵。若 $E \neq 0$, 由于上述矩阵具有上 Hessenberg 形且具有特征值 a , 可作一次单步移位 a 的 QR 分解。即令

$$C'' = \begin{pmatrix} -K/\Delta_1 & S/\Delta_1 & 0 \\ S/\Delta_2 & K/\Delta_2 & L/\Delta_2 \\ S/\Delta_3 & K/\Delta_3 & N/\Delta_3 \end{pmatrix}, \quad (14)$$

其中 $K = -(b_{11} - a)$, $N = -(AS + K(B - a))/E$, $L = -(S^2 + K^2)/N$,

$\Delta_1 = \sqrt{S^2 + K^2}$, $\Delta_2 = \sqrt{\Delta_1^2 + L^2}$, $\Delta_3 = \sqrt{\Delta_1^2 + N^2}$ 。而要求的变换矩阵为

$$C = C''C'. \quad (15)$$

(3) 第三种情况 (交换 2×2 块与 1×1 块): 此时要求正交矩阵 $C = (c_{ij})$ 使

$$C \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & d_1 \\ b_{21} & b_{22} & d_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} a & \times & \times \\ 0 & e_{11} & e_{12} \\ 0 & e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \text{ 其中 } b_{21} \neq 0.$$

由于正交变换不改变特征值, 变换前后的 2×2 对角块对应的特征值必定相同。

先进行一次旋转变换, 即令

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ d_1/S & d_2/S & 0 \\ -d_2/S & d_1/S & 0 \end{pmatrix}, \text{ 其中 } S = \sqrt{d_1^2 + d_2^2}. \quad (16)$$

由此可得

$$C' \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & d_1 \\ b_{21} & b_{22} & d_2 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} C'^T = \begin{pmatrix} a & 0 & \times \\ S & A & \times \\ 0 & B & \times \end{pmatrix},$$

其中 $A = (d_1^2 b_{11} + d_2^2 b_{22} + d_1 d_2 (b_{12} + b_{21}))/S^2$,

$$B = (d_1^2 b_{21} - d_2^2 b_{12} + d_1 d_2 (b_{22} - b_{11}))/S^2.$$

上述矩阵具有上 Hessenberg 形且其复特征值是已知的, 可作一次双步移位的 QR 分解。即令

$$C'' = \begin{pmatrix} X/\Delta_1 & Y/\Delta_1 & Z/\Delta_1 \\ XY/\Delta_2 & -(X^2 + Z^2)/\Delta_2 & YZ/\Delta_2 \\ -Z/\Delta_3 & 0 & X/\Delta_3 \end{pmatrix}, \quad (17)$$

其中 $X = a^2 - a(b_{11} + b_{22}) + (b_{11}b_{22} - b_{12}b_{21})$,

$$Y = (a + A - (b_{11} + b_{22}))S,$$

$$Z = BS,$$

$$\Delta_1 = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

$$\Delta_2 = \sqrt{X^2 Y^2 + (X^2 + Z^2)^2 + Y^2 Z^2},$$

$$\Delta_3 = \sqrt{X^2 + Z^2}.$$

而要求的变换矩阵为

$$C = C''C'. \quad (18)$$

(4) 第四种情况 (交换两个 2×2 块): 此时要求正交矩阵 $C = (c_{ij})$ 使

$$C \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & d_{11} & d_{12} \\ a_{21} & a_{22} & d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} C^T = \begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & \times & \times \\ e_{21} & e_{22} & \times & \times \\ 0 & 0 & f_{11} & f_{12} \\ 0 & 0 & f_{21} & f_{22} \end{pmatrix},$$

其中 $a_{21} \neq 0$, $b_{21} \neq 0$, $f_{11} + f_{22} = a_{11} + a_{22}$, 由于正交变换不改变特征值, 变换前后的 2×2 对角块对应的特征值必定相同。

先进行一次旋转变换, 即令

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ d_{12}/L & d_{22}/L & b_{12}/L & 0 \\ -(b_{12}^2 B - d_{22} E)/M & -(b_{12}^2 A + d_{12} E)/M & b_{12} D/M & 0 \\ -b_{12} A/N & b_{12} B/N & E/N & 0 \end{pmatrix}, \quad (19)$$

其中 $A = a_{21}d_{12} + (a_{22} - b_{11})d_{22} + b_{12}d_{21}$,

$$B = (a_{11} - b_{11})d_{12} + a_{12}d_{22} + b_{12}d_{11},$$

$$D = d_{22}A + d_{12}B, \quad E = d_{12}A - d_{22}B,$$

$$L = \sqrt{d_{12}^2 + d_{22}^2 + b_{12}^2}, \quad N = \sqrt{b_{12}^2(A^2 + B^2) + E^2}, \quad M = LN.$$

由此可得

$$T = C' \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & d_{11} & d_{12} \\ a_{21} & a_{22} & d_{21} & d_{22} \\ 0 & 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & 0 & b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} C'^T = \begin{pmatrix} b_{22} & b_{12}b_{21}/L & b_{12}b_{21}D/M & \times \\ L & b_{11} + D/L^2 & U & \times \\ 0 & -N/L^2 & V & \times \\ 0 & 0 & W & \times \end{pmatrix} \quad (20)$$

$$\text{其中} \quad G = b_{12}^2 B - d_{22} E, \quad H = b_{12}^2 A + d_{12} E,$$

$$F = a_{11} G + a_{12} H, \quad J = a_{21} G + a_{22} H,$$

$$U = \frac{1}{LM} [-d_{12} F - d_{22} J + (d_{11} d_{12} + d_{21} d_{22} + b_{11} b_{12}) b_{12} D],$$

$$V = \frac{1}{M^2} [a_{11} G^2 + (a_{21} + a_{12}) GH + a_{22} H^2 - b_{12} (d_{11} G + d_{21} H) D + b_{11} b_{12}^2 D^2],$$

$$W = \frac{b_{12}}{MN} [AF - BJ + b_{12} D (d_{21} B - d_{11} A) + b_{11} DE].$$

矩阵 T 具有上 Hessenberg 形且它仍具有原矩阵的两对复特征值，它们是已知的。因可作一次对应于原矩阵的左上对角块的一对复特征值的双步移位 QR 分解。为此，首令

$$S = (s_{ij}) = T^2 - (a_{11} + a_{22})T + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})I, \quad (21)$$

由此可定出

$$s_{11} = (b_{22}^2 + b_{12}b_{21}) - (a_{11} + a_{22})b_{22} + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

$$s_{21} = \left[b_{22} + \left(b_{11} + \frac{D}{L^2} \right) - (a_{11} + a_{22}) \right] L,$$

$$s_{31} = -N/L,$$

$$s_{12} = \frac{b_{12}b_{21}}{L^2} \left(s_{21} - \frac{D}{L} \right),$$

$$s_{22} = b_{12}b_{21} + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} + \left(b_{11} + \frac{D}{L^2} \right)^2 - (a_{11} + a_{22}) \left(b_{11} + \frac{D}{L^2} \right) - \frac{NU}{L^2}$$

$$s_{32} = \frac{N}{L^2} \left[(a_{11} + a_{22}) - \left(b_{11} + \frac{D}{L^2} \right) - V \right],$$

$$s_{42} = -NW/L^2.$$

再对 S 进行 QR 分解。由于上述矩阵 S 有两个零特征值，这样的分解不是唯一的，

定起见, 可令 $q_{13} = 0$. 由此可得

$$Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & 0 & q_{14} \\ q_{21} & q_{22} & q_{23} & q_{24} \\ q_{31} & q_{32} & q_{33} & q_{34} \\ 0 & q_{42} & q_{43} & q_{44} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

其中

$$\Delta_1 = \sqrt{s_{11}^2 + s_{21}^2 + s_{31}^2},$$

$$q_{11} = s_{11}/\Delta_1, \quad q_{21} = s_{21}/\Delta_1, \quad q_{31} = s_{31}/\Delta_1,$$

$$A = q_{11}s_{12} + q_{21}s_{22} + q_{31}s_{32},$$

$$\Delta_2 = \sqrt{s_{12}^2 + s_{22}^2 + s_{32}^2 - A^2},$$

$$q_{12} = (s_{12} - q_{11}A)/\Delta_2, \quad q_{22} = (s_{22} - q_{21}A)/\Delta_2,$$

$$q_{32} = (s_{32} - q_{31}A)/\Delta_2, \quad q_{42} = s_{42}/\Delta_2,$$

$$B = q_{31}q_{42}, \quad C = -q_{21}q_{42}, \quad D = q_{21}q_{32} - q_{22}q_{31},$$

$$\Delta_3 = \sqrt{B^2 + C^2 + D^2},$$

$$q_{23} = B/\Delta_3, \quad q_{33} = C/\Delta_3, \quad q_{43} = D/\Delta_3,$$

$$q_{14} = \sqrt{1 - q_{11}^2 - q_{12}^2}, \quad q_{24} = \sqrt{1 - q_{21}^2 - q_{22}^2 - q_{23}^2},$$

$$q_{34} = \sqrt{1 - q_{31}^2 - q_{32}^2 - q_{33}^2}, \quad q_{44} = \sqrt{1 - q_{42}^2 - q_{43}^2}.$$

而要求的变换矩阵为

$$C = Q^T C'. \quad (23)$$

四、举 例

(1) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -5 \\ 0 & 6 & -7 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 C , 使 CAC^T 仍为伪上三角形, 但对角块的位置互换.

由式 (13), (14) 可得

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0.316227766 & 0 & 0.9486832981 \\ -0.9486832981 & 0 & 0.316227766 \end{pmatrix},$$

$$C'' = \begin{pmatrix} -0.6201736729 & 0.7844645406 & 0 \\ 0.6521382545 & 0.5155605584 & 0.5557994312 \\ 0.4360049454 & 0.3446921747 & -0.8313164213 \end{pmatrix},$$

因而

$$C = \begin{pmatrix} 0.2480694692 & -0.6201736729 & 0.7442084075 \\ -0.3642430738 & 0.6521382545 & 0.6648629033 \\ 0.8976572406 & 0.4360049454 & 0.0641183743 \end{pmatrix}.$$

校核:

$$CAC^T = \begin{pmatrix} -5.569230769 & 3.855783101 & 3.379984855 \\ -7.198224633 & -5.430769231 & -0.620173673 \\ -8.97 \times 10^{-12} & -5.69 \times 10^{-12} & 1 \end{pmatrix}.$$

(2) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

求正交矩阵 C , 使 CAC^T 仍为伪三角形, 但对角块的位置互换.

由式 (16), (17) 可得

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0.4472135955 & 0.894427191 & 0 \\ -0.894427191 & 0.4472135955 & 0 \end{pmatrix},$$

$$C'' = \begin{pmatrix} 0.5547001962 & -0.3721042038 & 0.7442084075 \\ -0.222374795 & -0.9281909618 & -0.2983470949 \\ -0.8017837257 & 0 & 0.5976143047 \end{pmatrix},$$

因而

$$C = \begin{pmatrix} -0.8320502943 & -1 \times 10^{-13} & 0.5547001962 \\ -0.1482498633 & -0.9636241117 & -0.222374795 \\ -0.5345224838 & 0.2672612419 & -0.8017837257 \end{pmatrix}.$$

校核:

$$CAC^T = \begin{pmatrix} -0.9999999999 & -1.56895635 & 3.335621925 \\ -4 \times 10^{-12} & 6.285714286 & 5.745109175 \\ -3 \times 10^{-13} & -2.575393768 & -0.2857142857 \end{pmatrix}.$$

(3) 令

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

求正交矩阵 C , 使 CAC^T 仍为伪上三角形, 但对角块的位置互换.

由式 (19) 得

$$C' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0.7844645406 & 0.1961161351 & -0.5883484054 & 0 \\ 0.010134152 & -0.9526102904 & -0.3040245608 & 0 \\ 0.6200908672 & -0.2325340752 & 0.7492764645 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此可得

$$S = \begin{pmatrix} 18 & 14.12036173 & \times & \times \\ -49.42126605 & 29.88461538 & \times & \times \\ -22.7714396 & 13.73739767 & \times & \times \\ 0 & -13.36187945 & \times & \times \end{pmatrix}.$$

对 S 进行 QR 分解, 得

$$Q = \begin{pmatrix} 0.3140543536 & 0.8273184054 & 0 & 0.4657403989 \\ -0.8622757646 & 0.249004594 & 0.418475693 & 0.1391233707 \\ -0.3973038746 & 0.1135461373 & -0.9082253439 & 0.0662089919 \\ 0 & -0.4905591127 & 0.0021952308 & 0.8714051514 \end{pmatrix}.$$

因而变换矩阵为

$$C = Q^T C' = \begin{pmatrix} -0.6804510994 & 0.209369569 & 0.6281087071 & 0.3140543536 \\ -0.1077052573 & 0.0547403094 & -0.5485866679 & 0.8273184054 \\ 0.3204364912 & 0.9467441782 & 0.0315581393 & 0 \\ 0.6501586991 & -0.2384184202 & 0.550941198 & 0.4657403989 \end{pmatrix}.$$

校核:

$$CAC^T = \begin{pmatrix} -3.383561644 & -1.869684439 & 2.484477135 & -4.511888371 \\ 2.650281014 & -1.616438356 & 0.6828051639 & 2.187148004 \\ -4.58 \times 10^{-11} & 4 \times 10^{-10} & 6.476849369 & 4.581556012 \\ -2.514 \times 10^{-11} & -2 \times 10^{-10} & -2.752696275 & 0.5231506307 \end{pmatrix}.$$

参 考 文 献

- [1] Wonham, W. M., Linear Multivariable Control: A Geometric Approach, Springer-Verlag, (1974).

- [2] Jamshidi, M., An Overview on the Solution of the Algebraic Matrix Riccati Equation and Related Problems, The University of New Mexico, Albuquerque, N. M. 87131.
- [3] 叶庆凯、王肇明, 代数 Riccati 方程的一种快速解法——单输入情况, 控制理论与应用, **1**, 3, (1984), 78—89.
- [4] 徐秋生、何焕熹、韩京清, 利用多项式矩阵求解 Riccati 方程, 上海交通大学科技情报室, (1981)。
- [5] Balzer, L.A., Accelerated Convergence of the Matrix Sign Function Method of Solving Lyapunov, Riccati and Other Matrix Equations, Int. J. Control, **32**, 6, (1980), 1057—1078.
- [6] Laub, A. J., A Schur Method for Solving Algebraic Riccati Equations IEEE Trans. on Auto. Control, AC-**24**, (1979), 913—921.
- [7] Stewart, G. W., HQR3 and EXCHNG; Fortran Subroutines for Calculating and Ordering the Eigenvalues of a Real Upper Hessenberg Matrix, ACM Trans. Math. Software, **2**, (1976), 275—280.
- [8] 叶庆凯、王肇明, 优化与最优控制中的计算方法, 第八章. 科学出版社, 北京, (1986)。

AN ACCELERATED METHOD FOR SOLVING RICCATI EQUATIONS BY SCHUR METHOD

Ye Qingkai

(Peking University)

Abstract

There are many kinds of methods to solve algebraic matrix Riccati equation. Of these methods, the Schur method is quite efficient one. The key of schur method is to exchange the diagonal blocks in the upper pseudo-triangular matrix. In literature, usually use Programme EXCHNG to implement this requirement. It uses QR iteration method, so that spends a lot of computing time. In this paper, a kind of direct method for exchanging two diagonal blocks is given and it can save some computing time.