第2期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.2
1987年 6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1987

线性随机微分方程与其ARMA形式的采样模型

朱维彰

(西安工业学院)

摘　要

本文基于自协方差函数讨论了ARMA(n, n-1)与线性随机微分方程(LSDE)的关系，证明了ARMA(n, n-1)是LSDE的采样模型的三种不同形式的充要条件(适用于不同情况)。这些充要条件是一组关于ARMA(n, n-1)与LSDE参数变换的方程。当n=1, 2, 3, 4, 5时，这组方程的实际解法及实例计算也被给出。

引　言

设n维线性随机微分方程

$$\begin{cases} dX = AXdt + BdZ(t), \\ Y = CX, \end{cases} \tag{0.1}$$

其中$\{Z(t)\}$为维纳过程，$E[Z(t)-Z(t')]^2 = \sigma_z^2|t-t'|$.

$$A \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \cdots\cdots & & -\alpha_n \\ 1 & 0 & & -\alpha_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & -\alpha_1 \end{pmatrix}, \quad B \triangleq \begin{pmatrix} \beta_n \\ \beta_{n-1} \\ \vdots \\ \beta_1 \end{pmatrix},$$

$$C \triangleq [0 \cdots 0 \ 1], \qquad \beta_n \triangleq 1.$$

记(0.1)为CAM(n)。一般形式的A、B、C在一定条件下可化为(0.1)形式(见附录1)。

若形式地认为连续白噪声存在导数，则可形式地把(0.1)表示为

$$\alpha(D)Y(t) = \beta(D)\tilde{a}(t), \tag{0.2}$$

其中D为微分算子，$\{\tilde{a}(t)\}$为连续白噪声，

本文于1984年12月1日收到。1986年2月24日收到修改稿。

$$\alpha(D)\triangleq\alpha_0D^n+\alpha_1D^{n-1}+\cdots+\alpha_n,\ \alpha_0\triangleq1,$$
$$\beta(D)\triangleq\beta_1D^{n-1}+\beta_2D^{n-2}+\cdots+\beta_n.$$

如所周知，随机差分方程

$$\Phi(Z)Y_k=Z\Theta(Z)a_k \tag{0.3}$$

称为ARMA$(n,n-1)$。其中Z为前移算子，$\{a_k\}$满足$Ea_k=0$，$Ea_ka_s=\sigma_a^2\delta_{k,s}$，

$$\Phi(Z)\triangleq\phi_0Z^n+\phi_1Z^{n-1}+\cdots+\phi_{n-1}Z+\phi_n,\ \phi_0\triangleq1$$
$$\Theta(Z)\triangleq\theta_0Z^{n-1}+\theta_1Z^{n-2}+\cdots+\theta_{n-1},\ \theta_0\triangleq1$$

本文将在下列条件下讨论：

条件 1 设$\alpha(D)$的根μ_i，$i=1,\cdots,n$互异，有负实部。

条件 2 $\beta(\mu_i)\neq0$，$\beta(-\mu_i)\neq0$，$i=1,\cdots,n$

条件 3 (0.1)的初始时间在$-\infty$。故由条件1，（0.1）的解为平稳过程。

符号说明 $[a_{i,j}]_{i,j}$表示第i行第j列元素为$a_{i,j}$的矩阵。$[b_i]_i$表示第i行对角元素为b_i的对角矩阵。A^T及A^{-T}分别表示矩阵A、A^{-1}的转置。$V(x)$表示由x_1，x_2，$\cdots$，x_n构成的范德蒙矩阵

$$V(x)\triangleq\begin{pmatrix}1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1}\\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \vdots\\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}.$$

（一）

1. CAM(n)解的协方差函数$r_c(s)$

对于整数k、常数$\Delta>0$，由（0.1）可解得

$$\begin{cases}X(k\Delta)=e^{A\Delta}X[(k-1)\Delta]+W(k),\\ Y(k\Delta)=CX(k\Delta),\end{cases} \tag{1.1}$$

$$W(k)=\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta}e^{A(k\Delta-t)}BdZ(t).$$

显然，$\{W(k)\}$为零均值不相关过程，其方差

$$R_W=\sigma_z^2\int_{(k-1)\Delta}^{k\Delta}e^{A(k\Delta-t)}BB^Te^{A^T(k\Delta-t)}dt.$$

记$M\triangleq V(\mu)$，则$e^{At}=M^{-1}[e^{\mu_it}]_iM$，

经积分可得

$$R_W=\sigma_z^2M^{-1}[\beta(\mu_i)\beta(\mu_j)(\mu_i+\mu_j)^{-1}(e^{(\mu_i+\mu_j)\Delta}-1)]_{i,j}M^{-T}. \tag{1.2}$$

定理 1.1

$$r_c(\tau\Delta)=\sigma_z^2\sum_{i,j=1}^{n}-\frac{u_iu_j\beta(\mu_i)\beta(\mu_j)}{\mu_i+\mu_j}e^{|\tau|\Delta\mu_i},$$

其中
$$u_i\triangleq\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(\mu_i-\mu_j)^{-1}.$$

证　令 $R_x(\tau)\triangleq E\{X[(k+\tau)\Delta]X^T(k\Delta)\}$，$\tau\geq 0$.

由（1.1）可得

$$R_x(0)=e^{A\Delta}R_x^T(1)+R_W, \tag{1.3}$$

$$R_x(\tau)=e^{A\Delta}R_x(\tau-1),\quad \tau\geq 1. \tag{1.4}$$

将（1.4）代入（1.3）可解得

$$MR_x(0)M^T=\sigma_Z^2[-\beta(\mu_i)\beta(\mu_j)(\mu_i+\mu_j)^{-1}]_{i,j}, \tag{1.5}$$

而 $r_c(\tau\Delta)=CR_x(\tau)C^T=Ce^{\tau A\Delta}R_x(0)C^T$. (1.6)

将（1.5）代入（1.6），并注意到 u_i 为 M^{-1} 第 n 行第 i 列元素（见附录2），即可证.由于 $r_c(\tau\Delta)=r_c(-\tau\Delta)$，当 $\tau<0$ 时，也类似可证.

根据 $\beta(D)/\alpha(D)$ 的部分分式展开式，有

$$\sum_{j=1}^{n}-u_j\beta(\mu_j)(\mu_i+\mu_j)^{-1}=\beta(-\mu_i)/\alpha(-\mu_i),$$

由此易证

推论1.1

$$r_c(\tau\Delta)=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i\beta(\mu_i)\beta(-\mu_i)}{\alpha(-\mu_i)}e^{|\tau|\Delta\mu_i}\sigma_z^2.$$

2. ARMA$(n,n\text{-}1)$的协方差函数 $r(\tau)$

设 $\Phi(z)$ 的根 p_i，$i=1,\cdots,n$，互异，根据 $\Theta(z)/\Phi(z)$ 的部分分式展开式，易证

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\Theta(p_i)=1, \tag{1.7}$$

$$\sum_{i=1}^{n}v_i\Theta(p_i)(p_j^{-1}-p_i)^{-1}=\Theta(p_j^{-1})/\Phi(p_j^{-1}), \tag{1.8}$$

其中 $v_i\triangleq\prod_{j=1,j\neq i}^{n}(p_i-p_j)^{-1}$.

令 $q_{i,k-n} \triangleq Y_{k-i} - a_{k-i} + \sum_{j=1}^{n-i} (\phi_j Y_{k-i-j} - \theta_j a_{k-i-j})$，可得ARMA$(n,n-1)$的状态空间示形式

$$\begin{cases} Q_{k+1} = HQ_k + Ga_k, \\ Y_k = FQ_k + a_k, \end{cases} \tag{1.9}$$

其中 $Q_k \triangleq [q_{1,k}\ q_{2,k} \cdots q_{n,k}]^T$，$F \triangleq [0 \cdots 0 1]$，

$$H \triangleq \begin{pmatrix} 0 & \cdots & & -\phi_n \\ 1 & \mathbf{0} & & -\phi_{n-1} \\ & \ddots & & \vdots \\ \mathbf{0} & & 1 & -\phi_1 \end{pmatrix}, \qquad G \triangleq [-\phi_n, \theta_{n-1} - \phi_{n-1}, \cdots, \theta_1 - \phi_1]^T.$$

定理1.2 如果 p_i 互异，并且在单位圆内，则

$$r(\tau) = \sigma_a^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{v_i v_j \Theta(p_i)\Theta(p_j)}{(1 - p_i p_j)} p_j^{|\tau|}.$$

证 令 $R_q(\tau) \triangleq EQ_k Q_{k+\tau}^T$，$\tau \geq 0$，由(1.9)可得

$$R_q(0) = HR_q(1) + \sigma_a^2 GG^T, \tag{1.10}$$

$$R_q(\tau) = R_q(0)(H^T)^\tau, \tag{1.11}$$

$$H = V(p)^{-1}[p_i]_i V(p). \tag{1.12}$$

由(1.10)、(1.12)及 $\tau = 1$ 时的(1.11)可解得

$$V(p)R_q(0)V(p)^T = \sigma_a^2 [p_i p_j \Theta(p_i)\Theta(p_j)/(1 - p_i p_j)]_{i,j}. \tag{1.13}$$

当 $\tau \geq 1$ 时，

$$r(\tau) = E\{[FQ_k + a_k][Q_{k+\tau}^T F^T + a_{k+\tau}]\}$$

$$= FR_q(0)(H^T)^\tau F^T + \sigma_a^2 G^T (H^T)^{\tau-1} F^T.$$

将(1.13)代入上式，并注意到 v_j 为 $V(p)^{-1}$ 的第 n 行第 j 列元素（见附录2），可得

$$r(\tau) = \sigma_a^2 \sum_{j=1}^{n} p_j^\tau \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{v_i v_j \Theta(p_i)\Theta(p_j) p_i p_j}{1 - p_i p_j} \right.$$

$$\left. + v_j \Theta(p_j) \sum_{i=1}^{n} v_i \Theta(p_i) \right].$$

上式方括号中第二项利用了(1.7)，整理上式即可证。对 $\tau = 0$ 也类似可证。由于 $r(\tau) = r(-\tau)$，故结论对 $\tau < 0$ 也成立。

由(1.8)易证

推论1.2

$$r(\tau)=\sum_{i=1}^{n}\frac{v_i\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})}{p_i\Phi(p_i^{-1})}p_i^{|\tau|}.$$

（二）

ARMA（n, n－1）是 CAM(n) 的采样模型的条件

本文的实际意义可归结为，通过数学模型，用一个随机序列反映某个已知随机过程的特征或从一个已知的随机序列得到某个随机过程的特征．因此作下面定义是适宜的．

定义　若 CAM(n)、ARMA$(n,\ n-1)$的自协方差函数 $r_c(s)$、$r(\tau)$对于给定的Δ及 $\tau=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$满足 $r_c(\tau\Delta)=r(\tau)$，则称该 ARMA$(n,\ n-1)$为 CAM(n)的采样模型，记为 SAM$(n,\ \Delta)$。Δ 称为采样间隔．

引理2.1　若 ARMA$(n,\ n-1)$是 SAM$(n,\ \Delta)$，则

$$\Phi(Z)=(Z-e^{\Delta\mu_1})(Z-e^{\Delta\mu_2})\cdots(Z-e^{\Delta\mu_n}).$$

证　$\because\ \sum_{l=0}^{n}r(\tau+n-l)\phi_l=0,\ \ \tau=0,1,2,\cdots.$

将推论1.1的结果代入上式，取 $\tau=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$，考虑到条件2，即可解得

$$\sum_{l=0}^{n}\phi_l(e^{\mu_i\Delta})^{n-l}=0,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

定理2.1　ARMA$(n,\ n-1)$是 SAM$(n,\ \Delta)$的充要条件为

$$\begin{cases} p_i=e^{\Delta\mu_i}, & (2.1)\\ \sigma_z^2\dfrac{u_i\beta(\mu_i)\beta(-\mu_i)}{\alpha(-\mu_i)}=\sigma_a^2\dfrac{v_i\Theta(p_i)\Theta(p_i^{-1})}{p_i\Phi(p_i^{-1})}. & (2.2)\end{cases}$$

证　必要性：设 ARMA$(n,\ n-1)$是 SAM$(n,\ \Delta)$．由引理 2.1，可证（2.1）成立。由推论1.1、1.2及 $r(\tau)=r_c(\tau\Delta)$，取 $\tau=0,1,\cdots,n-1$，即可解得（2.2）．

充分性：显然．

自然也可用定理1.1、1.2来改写（2.2）的形式．

定理2.2　ARMA$(n,n-1)$是 SAM(n,Δ)的充要条件为

$$\begin{cases} p_i=e^{\Delta\mu_i}, & (2.3)\\ f_h=\sum_{j=1}^{n}Z_j\alpha(-\mu_j)\sum_{l=0}^{h-1}\alpha_l^{(2)}\mu_j^{2(h-l-1)}\prod_{s=1,s\neq j}^{n}(\mu_s+\mu_j)^{-1}, & \\ \qquad h=1,\ \cdots,\ n, & (2.4)\end{cases}$$

其中 $f_h \triangleq \sum_{l=1}^{\min(n-h,h-1)} (-1)^{n-h+l} 2\beta_{h+l}^* \beta_{h-l}^* + (-1)^{n-h} \beta_h^{*2}$.

$$\beta_n^* \triangleq \sigma_z / \sigma_a, \qquad \beta_i^* \triangleq \beta_i \beta_n^*$$

$$\alpha_0^{(2)} \triangleq 1, \qquad \alpha_i^{(2)}, \qquad i=1, \cdots, n \text{ 满足}$$

$$\alpha_0^{(2)} \mu^n + \alpha_1^{(2)} \mu^{n-1} + \cdots + \alpha_n^{(2)} = (\mu-\mu_1^2)(\mu-\mu_2^2)\cdots(\mu-\mu_n^2),$$

$$Z_j \triangleq v_j \Theta(p_j) \Theta(p_j^{-1}) / (\Phi(p_j^{-1}) p_j).$$

证 易证

$$\beta(\mu_i)\beta(-\mu_i)\sigma_z^2 / \sigma_a^2 = \sum_{h=1}^{n} f_h \mu_i^{2(n-h)}.$$

对$i=1, 2, \cdots, n$，由定理2.1可得关于f_h的n个方程，利用附录2的结果解之，即可证.

引理2.2 如果$p_i = e^{\Delta \mu_i}$，则

$$\sum_{l,s=0}^{n} \phi_l \phi_s r_c[(q+l-s)\Delta]$$

$$= \sigma_z^2 \sum_{i,j=1}^{n} \frac{u_i u_j \beta(\mu_i)\beta(\mu_j)}{\mu_i+\mu_j} (p_i p_j - 1) \sum_{h=q}^{n-1} J_i(h) J_j(h-q),$$

其中 $J_i(h) \triangleq \sum_{l=0}^{h} \phi_l p_i^{h-l}$, $\quad q=0, 1, \cdots, n-1.$

证 由（1.1）可解得，当$l=0, 1, \cdots, n$时，

$$X[(k-l)\Delta] = \sum_{s=0}^{n-l-1} (e^{A\Delta})^s W(k-l-s) + (e^{A\Delta})^{n-l} X[(k-n)\Delta].$$

注意到$(e^{A\Delta})^n + \phi_1 (e^{A\Delta})^{n-1} + \cdots + \phi_n I = 0$，则可得

$$\sum_{l=0}^{n} \phi_l Y[(k-l)\Delta] = \sum_{h=0}^{n-1} CM^{-1}[J_i(h)]_i MW(k-h). \tag{2.6}$$

利用（2.6）及$\{W(k)\}$的不相关性可得

$$\sum_{l,s=0}^{n} \phi_l \phi_s r_c[(q+l-s)\Delta]$$

$$= \sum_{h=q}^{n-1} CM^{-1}[J_i(h)]_i M R_W M^T [J_j(h-q)]_j M^{-T} C^T,$$

$$q=0,1,\cdots,n-1.$$

将（1.2）代入上式，即可证.

定理2.3 ARMA$(n, n-1)$是SAM(n, Δ)的充要条件为

$$\begin{cases} p_i = e^{\Delta\mu_i} \\ \sum\limits_{h=q}^{n-1} \theta_h^* \theta_{h-q}^* = \sum\limits_{i,j=1}^{n} \dfrac{u_i u_j \beta(\mu_i)\beta(\mu_j)}{\mu_i+\mu_j}(p_i p_j - 1) \end{cases} \tag{2.7}$$

$$\cdot \sum_{h=q}^{n-1} J_i(h) J_j(h-q), \quad q=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1, \tag{2.8}$$

其中　$\theta_0^* = \sigma_a/\sigma_z$,　　$\theta_i^* = \theta_i \theta_0^*$,　　$i=1,\ \cdots,\ n$.

证　必要性：由ARMA模型性质及$r(\tau)=r_c(\tau\Delta)$得

$$\sigma_a^2 \sum_{h=q}^{n-1} \theta_h \theta_{h-q} = \sum_{l,s=0}^{n} \phi_l \phi_s r_c(q+l-s).$$

由引理2.1，得(2.7)，故引理2.2的条件满足，用之，即可证(2.8).

充分性：设(2.7)、(2.8)成立，引理2.2的条件满足，所以可得

$$\sigma_a^2 \sum_{h=q}^{n-1} \theta_h \theta_{h-q} = \sum_{l,s=0}^{h} \phi_l \phi_s r_c[(q+l-s)\Delta].$$

由上式见，$\{Y(k\Delta)\}$满足以ϕ_i、θ_i、σ_a^2为参数的ARMA模型.当参数给定后，ARMA$(n,\ n-1)$的协方差函数是唯一的，故$r_c(\tau\Delta)=r(\tau)$.

(2.4)、(2.8)中σ_a^2、σ_z^2没有以特殊参数形式出现.在第三节将可看到,可以在σ_z^2未知时，由α_i、β_i解出ϕ_i、θ_i. 反之亦然。

(三)

n = 1,2,3,4,5时，方程组(2.3)、(2.4),(2.7)、(2.8)的解法

1.　由于$p_i = e^{\Delta\mu_i}$，$i=1,\ \cdots,\ n$，所以，若已知μ_i则易得p_i.反之，若已知p_i，并含有共轭复数时，则μ_i可能出现多值.但由于

$$\Delta\,\mathrm{Im}\mu_i = \arg p_i + 2k\pi$$
$$k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots,\ -\pi \le \arg p_i \le \pi.$$

可见，当Δ充分小时，多值性问题将不存在.

2.　方程组(2.4)的解法($n=1,\ \cdots,\ 5$)

以l_h表示(2.4)右边的表达式.

对$n=2,\ 3,\ 4,\ 5$，显然有

$$\beta_1 = \pm\sqrt{(-1)^{n-1} l_1/l_n}, \quad \sigma_z^2 = l_n \sigma_a^2.$$

其它解如下所示：

$n=1$：$\sigma_z^2 = 2\alpha_1(1-\phi_1^2)^{-1}\sigma_a^2$,

$n=3$：$2\beta_1-l_2/l_3\geq 0$，$\beta_2=\pm\sqrt{2\beta_1-l_2/l_3}$，

$n=4$：$\beta_2^4-2l_3l_4^{-1}\beta_2^2+8l_1l_2^{-1}\beta_2+(l_2^2-4l_1l_3)l_4^{-2}=0$（取实根），

$$\beta_3=(\beta_2^2-l_2l_4^{-1})/(2\beta_1),$$

$n=5$：$\beta_3^4-2(l_3l_5^{-1}+6\beta_1)\beta_3^2+8(l_2+l_4\beta_1)l_5^{-1}\beta_3+4(l_1-l_3\beta_1)l_5^{-1}$

$+(l_3^2-4l_2l_4)l_5^{-2}=0$（取实根，并要求 $2\beta_3-l_4l_5^{-1}\geq 0$），

$$\beta_4=\pm\sqrt{2\beta_3-l_4l_5^{-1}},\quad \beta_2=(\beta_3^2+2\beta_1-l_3l_5^{-1})/(2\beta_4).$$

例 1 已知 $n=3$，$\sigma_a^2=0.09$，$\Delta=1$，$\theta_1=-0.5,\theta_2=0.06$，$\phi_1=-1.9$，$\phi_2=1.1525$，$\phi_3=-0.1625$。

解得$\alpha_1=1.8170$，$\alpha_2=0.4601$，$\alpha_3=0.2026$，$\sigma_z^2=0.1429$，共有四组 β_i 值，

β_i \ №	(1)	(2)	(3)	(4)
β_1	0.5539	0.5539	−0.5539	−0.5539
β_2	1.5128	−1.5128	0.2701	−0.2701

$$r_c(0)=1.1608,\quad r_c(1)=1.0739,\quad r_c(2)=0.8824。$$

3. 方程组（2.8）的解法（$n=1,\ \cdots,\ 5$）

以 m_q 表示（2.8）右边的表达式，易得

$$(\theta_0^*+\theta_1^*+\cdots+\theta_{n-1}^*)=\pm\sqrt{m_0+2m_1+\cdots+2m_{n-1}}\triangleq\pm T,$$

$$(\theta_0^*-\theta_1^*+\cdots+(-1)^{n-1}\theta_{n-1}^*)=\pm\sqrt{m_0-2m_1+\cdots+(-1)^{n-1}2m_{n-1}}\triangleq\pm L.$$

显见，$\pm\theta_i^*$均是（2.8）的解，但取$-\theta_i^*$或θ_i^*与最后结果无关，故仅取 T 与 $\pm L$ 两种情况。

下面各式凡涉及解代数方程的仅取实根。

$n=1$：$\quad\sigma_a^2=\sigma_z^2(1-\phi_1^2)/(2\alpha_1)$，

$n=2$：$\quad\theta_1=(m_0\pm\sqrt{m_0^2-2m_1})/(2m_1)$，

$$\sigma_a^2=\sigma_z^2(m_0\mp\sqrt{m_0^2-2m_1})/2,$$

$n=3$：$\quad 2\theta_0^{*2}-(T\pm L)\theta_0^*+2m_2=0$，$\quad\theta_2^*=m_2/\theta_0^*$，$\quad\theta_1^*=(T\mp L)/2$，

$n=4$:　$2\theta_0^{*4}-(T\pm L)\theta_0^{*3}+2m_2\theta_0^{*2}-(T\mp L)m_3\theta_0^*+2m_3^2=0$,

$\theta_2^*=(T\pm L)/2-\theta_0^*$,　$\theta_3^*=m_3/\theta_0^*$,　$\theta_1^*=(T\mp L)/2-\theta_3^*$,

$n=5$: 令$a\triangleq(T+L)/2$, $b\triangleq(T-L)/2$及$a\triangleq(T-L)/2$, $b\triangleq(T+L)/2$ 分别解

$\theta_0^{*8}-a\theta_0^{*7}+m_2\theta_0^{*6}+(am_4-bm_3)\theta_0^{*5}+(b^2m_4+m_3^2-2m_4^2-2m_2m_4)\theta_0^{*4}$

$+(am_4^2-bm_3m_4)\theta_0^{*3}+m_4^2m_2\theta_0^{*2}-am_4^3\theta_0^*+m_4^4=0$,

$\theta_4^*=m_4/\theta_0^*$,　$\theta_2^*=a-\theta_0^*-\theta_4^*$,　$\theta_3^*=(m_3\theta_0^*-bm_4)/(\theta_0^{*2}-m_4)$,

$\theta_1^*=b-\theta_3^*$.

例 2　已知 $n=4$, $\sigma_z^2=4$,　$\Delta=0.4$

$\alpha_1=9$, $\alpha_2=29.25$, $\alpha_3=30$, $\alpha_4=25$, $\beta_1=4$, $\beta_2=3.5$, $\beta_3=-4$.

解得　$\phi_1=-1.7895$, $\phi_2=1.1354$, $\phi_3=-0.2500$, $\phi_4=0.0273$, 共有四组σ_a^2、θ_i:

№ \ σ_a,θ_i	σ_a^2	θ_1	θ_2	θ_3
(1)	4.6194	−1.8914	1.2060	−0.2329
(2)	2.0671	−2.6551	2.2978	−0.5204
(3)	0.5656	−4.4025	5.0707	−1.9019
(4)	0.2483	−5.1827	8.1618	−4.3319

$r(0)=4.77$, $r(1)=-0.34$, $r(2)=-0.44$, $r(3)=0.265$.

附录1　当(0.1)的A、B、C为一般形式时，若矩阵$[C^T, A^TC^T, \cdots, (A^T)^{n-1}C^T]$满秩，$A^{-1}$存在，而且$CA^{-1}B\neq 0$，则总存在一个非奇异变换$\widetilde{X}=LX$，使其化为(0.1)的特殊形式.变换后的输出满足

$$\widetilde{Y}(t)=-(\alpha_nCA^{-1}B)^{-1}Y(t),$$

其中　$L=-(\alpha_nCA^{-1}B)^{-1}[l_1^T\ l_2^T\cdots l_n^T]^T$,

$l_n=C$, $l_i=l_{i+1}A+\alpha_{n-1}C$, $i=n-1, \cdots, 1$,

$|sI-A|=s^n+\alpha_1s^{n-1}+\cdots+\alpha_n$.

附录2　设 λ_i, $i=1, 2, \cdots, n$ 是多项式$x^n+d_1x^{n-1}+\cdots+d_n=0$ 的互异根，令

$$[u_{i,j}]_{i,j}\triangleq V(\lambda)^{-1},$$

则 $u_{i,j}=\sum_{l=0}^{n-i} d_l \lambda_j^{n-l-i} u_{n,j},\ u_{n,j}=\prod_{i=1, i\neq j}^{n} (\lambda_j-\lambda_i)^{-1}$.

参 考 文 献

〔1〕 Wu, S. M., Journal of Engineering for Industry, TRANS. ASME, Series B. Dynamic Data System: a New Modeling Approach, **99**, 3, (1977), 708－714.

〔2〕 Pandit, S. M., Subramanian. T. L. and Wu, S. M., Journal of Engineering for Industry, TRANS, ASME, Series B, Modeling Machine Tool Chatter by Time Series, **97**, 1, (Feb. 1975), 211－217.

〔3〕 Wu, S. M., Pandit, S. M., Time Series and System Analysis with Applications, John Wiley and Sons, N. Y., (1983).

STOCHASTIC DIFFERENTIAL EQUATION AND ITS SAMPLED MODEL IN THE FORM OF ARMA

Zu Weizhang

(Xian Institute of Technology)

Abstract

It is investigated on the basis of the autocovariance function that ARMA(n, n－1) is a sampled model of a linear stochastic differential equation (LSDE). The sufficient and necessary conditions for that in three forms applying to different cases, which are the expressions of the parameter transform between ARMA (n, n－1) and LSDE, are proven. The practial solutions and some examples with n＝1, 2, 3, 4, 5 are given.