第4卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.3
1987年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1987

广义系统的干扰解耦状态观测器*

王朝珠　　戴立意

（中国科学院系统科学研究所，北京）

摘　　要

本文讨论了广义系统的干扰解耦状态观测器的结构形式、存在条件和设计方法．同时说明了在干扰解耦状态观测器类中考虑问题时，广义系统存在干扰解耦状态观测器和广义系统存在带有干扰估计的状态观测器是等价的．

一、引　　言

在〔1〕中我们曾经讨论了广义系统状态观测器的结构形式，并指出了广义系统不存在全阶的正常状态观测器．在〔2〕中，我们通过引进广义系统能正常化概念，具体给出了二种降阶的正常状态观测器的存在条件和设计方法．然而，当广义系统存在未知外干扰时，人们总是希望系统状态的渐近估计不受未知外干扰的影响．我们称这样的状态观测器为广义系统的干扰解耦状态观测器．本文主要讨论广义系统干扰解耦状态观测器的结构形式、存在条件及设计方法．

考虑带外干扰的广义系统：

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax + Bu + Mf, \\ y &= Cx + Ff, \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $x \in \mathbf{R}^n$ 是状态，$u \in \mathbf{R}^r$ 是控制输入，$y \in \mathbf{R}^m$ 是量测输出，$f \in \mathbf{R}^q$是外干扰输入．E, A, B, M, C, F 是适当维数的常阵，且 $\operatorname{rank} E = l < n$．外干扰 f 满足如下方程：

$$\dot{f} = A_2 f, \tag{2}$$

其中 $\sigma(A_2) \subset \overline{\mathbf{C}}^+$，$\overline{\mathbf{C}}^+$表示右半闭复平面（稳定的外干扰对系统（1）的状态的渐近估计没有任何影响）．

定义 1　对给定的广义系统（1），如果存在如下动态系统：

$$\begin{aligned} E_C\dot{x}_C &= A_C x_C + B_C u + Gy, \\ w &= F_C x_C + Lu + Hy, \end{aligned} \tag{3}$$

其中 $x_C \in \mathbf{R}^{n_C}$, $w \in \mathbf{R}^n$, E_C, A_C, B_C, G, F_C, L, H 都是适当维数的常数阵，使得对任意的$x(t_0)$, $x_C(t_0)$和满足（2）的任意 $f(t)$，都有 $\lim\limits_{t\to\infty}(x-w)=0$，则

（i）当 $\operatorname{rank} E_C < n_C$ 时，称（3）为系统（1）的广义干扰解耦状态观测器；如果

*国家自然科学基金会资助项目．

本文于1985年6月21日收到．1986年1月8日收到修改稿．

$L=0$，$H=0$，$F_C=I_{n_C}$，则称（3）为系统（1）的基本广义干扰解耦状态观测器。

（ii）当 $\operatorname{rank} E_C=n_C$时，称（3）为系统（1）的正常干扰解耦状态观测器。

（iii）当 $n_C=n$ 时，称（3）为系统(1)的全阶干扰解耦状态观测器；当 $n_C<n(n_C>n)$时，称（3）为系统（1）的降（增）阶干扰解耦状态观测器。

二、干扰解耦状态观测器的结构

首先我们给出如下定理：

定理 1 设系统（1）是R-能控的，且（E，A，B）是能正常化的[2]，如果

$$\begin{aligned} E_C\dot{x}_C &= A_Cx_C+B_Cu+Gy, \\ w &= x_C \end{aligned} \tag{4}$$

是系统（1）的基本广义干扰解耦状态观测器，则一定存在$T\in \mathbf{R}^{n\times n}$，使得

（i）$E_C=TE$，　$B_C=TB$，　$A_C=TA-GC$。

（ii）$\sigma(E_C,\ A_C)\subset \mathbf{C}^-$。

（iii）$GF=TM$。

证　由定义知对任意的$x(t_0)$，$x_C(t_0)$，$f(t_0)$都有：

$$\lim_{t\to\infty}(x(t)-w(t))=\lim_{t\to\infty}(x(t)-x_C(t))=0.$$

显然，当 $f(t_0)=0$时(此时 $f(t)\equiv 0$)，（4）必是如下广义系统：

$$\begin{aligned} E\dot{x} &= Ax+Bu \\ y &= Cx \end{aligned}$$

的广义状态观测器。由于（E，A，B）是R-能控、能正常化的，根据[1]知必存在$T\in R^{n\times n}$，使（i）、（ii）成立。

记 $e(t)\triangleq x(t)-w(t)=x(t)-x_C(t)$，直接计算可知，

$$E_C\dot{e}=A_Ce+(TM-GF)f,$$

由于$\sigma(E_C,\ A_C)\subset \mathbf{C}^-$，且对任何$f(t)$都有 $\lim_{t\to\infty} e(t)=0$，可知（iii）成立。

定理 1 给出了基本广义干扰解耦状态观测器的结构，从 $E_C=TE$ 知道带外干扰的广义系统不存在全阶正常干扰解耦状态观测器。下面分别讨论一类特别的($T=I_m$)广义（或正常）干扰解耦状态观测器的存在条件和设计方法。

定理 2 系统（1）存在形如

$$\begin{aligned} E\dot{x}_C &= Ax_C+Bu+G(y-Cx_C), \\ w &= x_C \end{aligned} \tag{5}$$

的广义干扰解耦状态观测器的充要条件是存在 $G\in \mathbf{R}^{n\times m}$，使得

（1）$\sigma(E,\ A-GC)\subset \mathbf{C}^-$，（2）$M=GF$。

证　充分性显然，必要性可仿照定理（1）的证明过程给出。

定理 2 表明系统（1）存在形如（5）的广义干扰解耦状态观测器的条件与 $f(t)$ 所满足的方程无关。我们称（5）是系统（1）对任意外干扰 $f(t)$（$f(t)$ 不一定满足方程(2)）的广义干扰解耦状态观测器。另外从定理2的条件知道系统（1）存在着对任意外干扰解耦的状态观测器的必要条件是系统（1）是能检测的[2]。

如果 $\operatorname{rank} F=q$，$q\le m$，不失一般性，设 $F=\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$，记 $C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$，则有如下推论：

推论 1　系统（1）存在着对任意外干扰的干扰解耦状态观测器（5）的充要条件是

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A & -M \\ C & F \end{bmatrix}=q+n, \qquad \forall s\in\overline{\mathbf{C}}^{+},\ s\text{ 有限。}$$

证　只要注意到 $F=\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$，则有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A & -M \\ C & F \end{bmatrix}=n+q \Longleftrightarrow \operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A+MC_1 \\ C_2 \end{bmatrix}=n,\quad \forall s\in\overline{\mathbf{C}}^{+}, s\text{ 有限。} \tag{6}$$

必要性：从定理 2 知必存在 G 使

$$\sigma(E,\ A-GC)\subset\mathbf{C}^{-},\quad M=GF。$$

记 $G=[G_1,G_2]$，且注意到 $F=\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix}$，则有

$$\sigma(E,A-G_1C_1-G_2C_2)=\sigma(E,A-MC_1-G_2C_2)\subset\mathbf{C}^{-}。$$

因此有

$$\operatorname{rank}(Es-A+MC_1+G_2C_2)=n,\quad \forall s\in\overline{\mathbf{C}}^{+},\ s\text{ 有限。}$$

从而知

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A+MC_1+G_2C_2 \\ C_2 \end{bmatrix}=\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A+MC_1 \\ C_2 \end{bmatrix}=n,\quad \forall s\in\overline{\mathbf{C}}^{+}, s\text{ 有限。}$$

由（6）可知结论成立。

充分性：（6）式表明

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A+MC_1 \\ C_2 \end{bmatrix}=n, \forall s\in\overline{\mathbf{C}}^{+},\ s\text{ 有限。}$$

从而 $(E,\ A-MC_1,\ C_2)$ 是能检测的[2]。因此必存在 $G\in R^{n\times(m-q)}$，使

$$\sigma(E,\ A-MC_1-G_2C_2)\subset\mathbf{C}^{-},$$

只要取 $G=[M,G_2]$，便知定理 2 中的（1），（2）成立。即系统（1）必存在对任意外干扰的广义干扰解耦观测器。

如果定义满足下式的所有复数的全体为系统（1）的干扰传输零点集合

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A & -M \\ C & F \end{bmatrix} < n+\min(m,q),$$

若，$q\leq m$，$F=\begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$时，由（6）知系统（1）的干扰传输零点由下式确定：

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} Es-A+MC_1 \\ C_2 \end{bmatrix} < n.$$

由推论1的证明过程知道，系统（1）存在对任意外干扰的广义干扰解耦状态观测器（5）的充要条件是系统（1）的干扰传输零点必须是稳定的（位于左半开复平面内）。这就是推论1的物理含意。

我们知道，一般地说，广义干扰解耦状态观测器在具体物理实验时不仅需要量测输出$\boldsymbol{y}$和控制u，而且还要用到它们的相应导数项，因此广义干扰解耦状态观测器的实现是很困难的[2]。为了克服这个困难，下面我们讨论正常干扰解耦状态观测器。

定理 3 给定系统（1），如果存在$G\in\mathbf{R}^{n\times m}$，使

（a）$\sigma(E,A-GC)\subset\mathbf{C}^-$，$\deg(\det(sE-(A-GC)))=\operatorname{rank}E=l$。

（b）$M=GF$。

则系统（1）一定存在形如

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= A_Cx_C+B_Cu+G_Cy, \\ w_C &= F_Cx_C+Lu+Hy \end{aligned} \tag{7}$$

的降阶正常干扰解耦状态观测器，其中$x_C\in\mathbf{R}^l$。

证 根据定理3的条件，由定理2知系统（1）存在对任意干扰的广义干扰解耦状态观测器。

$$\begin{aligned} E\dot{x}_C &= Ax_C+Bu+G(y-Cx_C), \\ w &= x_C. \end{aligned} \tag{8}$$

条件（a）表明（8）不存在脉冲响应项[2,5]，因此存在满秩矩阵Q，P，使（8）受限制等价于[6]

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= A_{C_1}x_1+B_1u+G_1y, \\ 0 &= x_2+B_2u+G_2y, \\ w &= P\begin{bmatrix} I_e \\ 0 \end{bmatrix}x_1+P\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-e} \end{bmatrix}x_2, \end{aligned}$$

其中

$$QEP=\begin{bmatrix} I_l & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},\quad Q(A-GC)P=\begin{bmatrix} A_{C_1} & 0 \\ 0 & I_{n-l} \end{bmatrix},$$

$$QB=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\qquad QG=\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \end{bmatrix}.$$

显然，只要取 $x_C=x_1$，$A_C=A_1$，$B_C=B_1$，$G_C=G_1$，$F_C=P\begin{bmatrix} I_l \\ 0 \end{bmatrix}$，$L=-P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}B_2$，$H=-P\begin{bmatrix} 0 \\ I \end{bmatrix}G_2$，（8）就恰是（7）。

当 $F=0$ 而 $M\neq 0$ 时，从定理 2 知道，系统（1）不存在形如（5）的对任意干扰的广义干扰解耦状态观测器。从而前面给出的设计方法不成立。但在这种情况下却可以为系统（1）构造另外一种降阶正常干扰解耦状态观测器。

在〔2〕中曾经指出，若系统（1）是能检测的，且（E^T，A^T，C^T）是能正常化的[2]。如果 $\operatorname{rank}C=m$，一定可以找到满秩矩阵 Q，P，使系统（1）受限制等价于

$$\begin{aligned} E_{11}\dot{x}_1 &= A_{11}x_1+A_{12}x_2+B_1u+M_1f, \\ \dot{x}_2 &= A_{21}x_1+A_{22}x_2+B_2u+M_2f-E_{21}\dot{x}_1, \\ y &= x_1, \end{aligned} \tag{9}$$

其中 $QEP=\begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ E_{21} & I_{n-m} \end{bmatrix}$，$QAP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$，$QB\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$，$QM=\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}$。

如果记

$$\begin{aligned} v &= A_{21}y-E_{21}\dot{y}+B_2u, \\ \tilde{y} &= E_1\dot{y}-A_{11}y-B_1u, \end{aligned}$$

则系统（9）变成如下正常系统

$$\begin{aligned} \dot{x}_2 &= A_{22}x_2+v+M_2f, \\ \tilde{y} &= A_{12}x_2+M_1f. \end{aligned} \tag{10}$$

由〔3〕的推论 2 知道系统(10)存在对任意外干扰解耦的状态观测器的充要条件是存在 $\tilde{G}$，使

$$\sigma(A_{22}-\tilde{G}A_{12})\subset\mathbf{C}^-，且 M_2=\tilde{G}M_1. \tag{11}$$

如果（11）成立，则

$$\begin{aligned} \dot{x}_C &= (A_{22}-\tilde{G}A_{12})x_C+(B_2-\tilde{G}B_1)u+[(A_{21}-\tilde{G}A_{11})-(A_{22}-\tilde{G}A_{12}) \\ &\quad \times(E_{21}-\tilde{G}E_{11})]y, \\ w_2 &= x_C-(E_{21}-\tilde{G}E_{11})y \end{aligned} \tag{12}$$

是系统（10）的干扰解耦状态观测器。记

$$\begin{aligned} &A_C=A_{22}-\tilde{G}A_{12},\quad B_C=B_2-\tilde{G}B_1, \\ &G=A_{21}-\tilde{G}A_{11}-(A_{22}-\tilde{G}A_{12})(E_{21}-\tilde{G}E_{11}), \\ &F_C=P\begin{bmatrix} 0 \\ I_{n-m} \end{bmatrix},\qquad H=P\begin{bmatrix} I_m \\ -E_{21}+\tilde{G}E_{11} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

显然，

$$\dot{x}_C = A_C x_C + B_C u + Gy,$$
$$w = F_C x_C + Hy$$

是系统（1）的降阶正常干扰解耦状态观测器。

综上所述可得如下定理：

定理 4 设系统（1）是能检测的，(E^T, A^T, C^T)是能正常化的，且$F=0$，rank $C=m$，必存在满秩矩阵Q，P，使

$$QEP=\begin{bmatrix} E_{11} & 0 \\ E_{21} & I \end{bmatrix},\quad QAP=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix},$$

$$QB=\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix},\qquad QM=\begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \end{bmatrix}.$$

如果存在$\widetilde{G}$，使

$$\sigma(A_{22}-\widetilde{G}A_{12})\subset \mathbf{C}^- \text{且} M_2=\widetilde{G}M_1,$$

则系统（1）一定存在形如（7）的正常干扰解耦状态观测器，其中$x_C\in \mathbf{R}^{n-m}$。

三、广义系统的带有干扰估计的观测器

前面我们讨论了各种干扰解耦状态观测器的结构及存在条件。虽然它们都给出了与外干扰无关的状态估计，但是却没有给出关于外干扰的任何信息。在工程设计中有时需要了解外干扰的情况，为此必须设计能把状态和外干扰同时估计出来的观测器，我们把这种观测器称为带有干扰估计的状态观测器。

如果记

$$\overline{E}=\begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & I_q \end{bmatrix},\ \overline{A}=\begin{bmatrix} A & M \\ 0 & A_2 \end{bmatrix},\ \overline{B}=\begin{bmatrix} B \\ 0 \end{bmatrix},\ \overline{C}=[C,\ F],\ z=\begin{bmatrix} x \\ f \end{bmatrix},$$

由（1）和（2）可得如下复合系统：

$$\begin{aligned}\overline{E}\dot{z}&=\overline{A}z+\overline{B}u,\\ y&=\overline{C}z.\end{aligned}\tag{13}$$

〔2〕中指出，如果$(\overline{E}, \overline{A}, \overline{C})$是能检测的，则系统（13）一定存在着广义状态观测器

$$\begin{aligned}\overline{E}\dot{z}_C&=\overline{A}z_C+\overline{B}u+\overline{G}(y-\overline{C}z_C),\\ w&=z_C,\end{aligned}\tag{14}$$

其中$z_C\in \mathbf{R}^{n+q}$。而当$(\overline{E}, \overline{A}, \overline{C})$是能检测的，且$(\overline{E}^T, \overline{A}^T, \overline{C}^T)$是能消去脉冲响应项的，则系统（13）一定存在着如下形式的正常状态观测器：

$$\dot{z}_C = A_C z_C + B_C u + Gy,$$
$$w = F_C z_C + Lu + Hy. \qquad (15)$$

只要取 $x = [I_n \quad 0]w$，直接可得如下定理：

定理 5 给定系统（1）：

（i）如果（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）是能检测的，则系统（1）必存在广义干扰解耦状态观测器；

（ii）如果（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）是能检测的，且（$\bar{E}^T$，$\bar{A}^T$，$\bar{C}^T$）是能消去脉冲响应项的[2]，则系统（1）必存在着正常干扰解耦状态观测器。

值得注意的是定理 5 所说的广义（或正常）干扰解耦状态观测器都是增维的状态观测器。

若 $F = \begin{bmatrix} I_q \\ 0 \end{bmatrix}$，则

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A-M & \\ 0 & sL-A_2 \\ C & F \end{bmatrix} = \operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A+MC_1 \\ C_2 \\ -(sI_q-A_2)C_1 \end{bmatrix} + q. \qquad (16)$$

从推论 1 和关系式（16）易知，如果系统（1）存在着形如（5）的对任意干扰的广义干扰解耦状态观测器，则有

$$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} sE-A+MC_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = n, \qquad \forall s \in \overline{\mathbf{C}^+},\ s\text{有限}.$$

因此（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）是能检测的，则广义系统（13）一定存在着广义状态观测器，其干扰能从量测通过系统（13）的广义状态观测器而获得。反之，若（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）能检测，从定理 5 知道系统（1）一定存在着广义干扰解耦状态观测器。

类似地从定理 3 知道，如果存在 G，使定理 3 的条件（a），（b）满足，则（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）是能检测的；只要取

$$\bar{G} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M & G_2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

有

$$\deg \det(s\bar{E} - \bar{A} + \bar{G}\bar{C}) = \operatorname{rank} E + q,$$

即（$\bar{E}^T$，$\bar{A}^T$，$\bar{C}^T$）是能消去脉冲响应项的[2]，因而系统（13）一定存在着正常状态观测器，其外干扰能从输出通过这个正常状态观测器而获得。反之，如果（$\bar{E}$，$\bar{A}$，$\bar{C}$）是能检测的，且（$\bar{E}^T$，$\bar{A}^T$，$\bar{C}^T$）是能消去脉冲响应项的。由定理 5 知系统（1）一定存在着正常干扰解耦状态观测器。如果在形如(3)(或（5）)的广义（或正常）干扰解耦观测器类中考虑问题时（而不计较观测器的阶数和具体结构），在上述意义下，系统（1）存在广义(或正常)干扰解耦状态观测器（5）（或（7））和其存在带干扰估计的状态观

测器（14）（或（15））是等价的。这种等价性表明，如果能从系统（1）中消去干扰的作用，则一定能通过量测输出获得外干扰；反之亦然。这与人们的直观概念是相吻合的。

参考文献

〔1〕 王朝珠、戴立意，广义系统的正常状态观测器，系统科学与数学，**6**,4,（1986），307—313。

〔2〕 王朝珠、戴立意，广义系统的状态观测器，第五届全国控制理论及其应用学术交流会论文集，上册，（1985），31—35。

〔3〕 Wang Chaozhu, Wang Enping, State Observer Decoupling Disturbance in Frequency Domain, Acta Mathematica Scientia, (1982),245-259.

〔4〕 Yip, E. L. and R. F. Sincovec, Solvability, Controllability and Observability of Continuous Descriptor Systems, IEEE trans. Aut. Control, AC-**26**, 3, (1981), 702-706.

〔5〕 Campbell, S. L., Singular Systeme of Differential Equations II, New York, Pitman, (1982).

〔6〕 甘特马赫尔，矩阵论，柯马译，高等教育出版社，北京，（1955）。

STATE OBSERVER DECOUPLING DISTURBANCE FOR SINGULAR SYSTEMS

Wang Chaozhu, Dai Liyi
(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

Concerning the state observer decoupling disturbance for singular systems, we study its existence conditions, its structure and the design methods. We also establish the equivalence of the two kinds of state observer decoupling disturbance we have given in some sense.