

INA 法在捷联陀螺力平衡回路中的应用

以光衢 梁增科 邓兆炯

(北京航空学院)

摘 要

本文基于 INA (Inverse Nyquist Array) 理论, 利用准对角化的方法, 设计了二自由度捷联陀螺力平衡回路前置动态补偿阵, 在试验室装调了控制器, 试验获得满意的结果。

令线性多变量系统中, $R(s)$, $E(s)$ 分别为 m 维输入和误差向量; $Y(s)$ 为 l 维输出向量; $F(s)$ 为 $m \times l$ 维反馈传递函数阵; $G(s)$ 为 $l \times r$ 维对象传递函数阵; $K(s)$ 为 $r \times m$ 维前(输入)补偿传递函数阵; $L(s)$ 为 $m \times l$ 后补偿传递函数阵。

$$\text{令} \quad Q(s) = L(s)G(s)K(s), \quad (1)$$

$$\text{逆阵为} \quad Q^{-1}(s) \triangleq \hat{Q}(s) = \hat{K}(s)\hat{G}(s)\hat{L}(s), \text{ 其元为 } \hat{q}_{ij}(s), \quad (2)$$

系统闭环传递函数阵为

$$H(s) = [I_m + Q(s)F(s)]^{-1}Q(s), \quad (3)$$

$$\text{其逆阵为} \quad H^{-1}(s) = \hat{H}(s) = F(s) + \hat{Q}(s). \quad (4)$$

在一般情况下, 对象的传递函数阵 $\hat{G}(s)$ 不是对角或对角优势的。设

$$\hat{K}(s) = \hat{K}_c(s)\hat{K}_p(s), \quad (5)$$

式中 选择 $\hat{K}_c(s)$ 为对角阵, 其作用是实现串联校正, 改善动态特性; $\hat{K}_p(s)$ 、 $L(s)$ 的作用都是使得 $\hat{Q}(s)$ 成为对角或对角优势阵。

可见, INA 方法的关键在于设计补偿阵, 使得系统开环传递函数阵

$$\hat{Q}(s) = \hat{K}_c(s)\hat{K}_p(s)\hat{G}(s)\hat{L}(s) \quad (6)$$

成为对角或对角优势的。

本文讨论 $m = l = r$, 即输入变量与输出变量个数相等的情况, 且 $F(s) = I_m$ 。

一、动力调谐陀螺动力学模型

[4] 讨论了在一定条件下得到力平衡回路的线性模型, 得图1, 图中 $\dot{\Phi}_x$, $\dot{\Phi}_y$ 分别为基座角速度; 控制对象捷联陀螺有

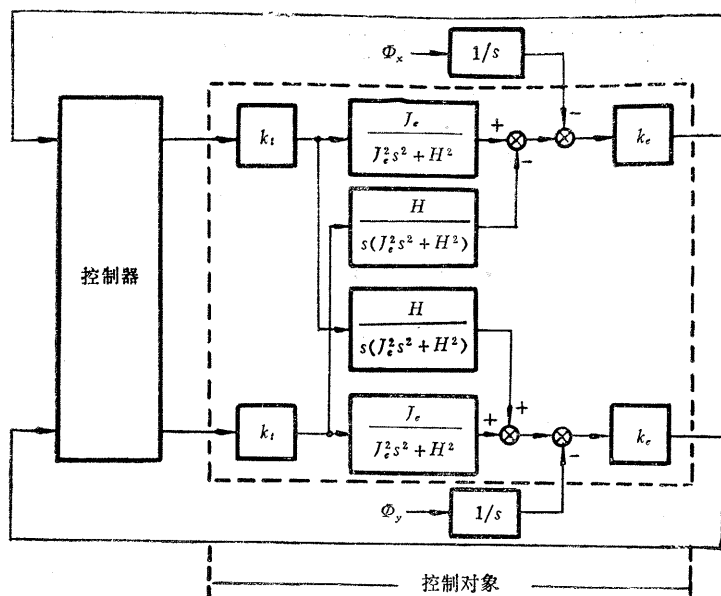


图 1 动力调谐陀螺力平衡系统

$$\begin{bmatrix} \beta(s) \\ \alpha(s) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Phi_x(s) \\ \Phi_y(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{J_e}{J_e^2 s^2 + H^2} & -\frac{H}{s(J_e^2 s^2 + H^2)} \\ \frac{H}{s(J_e^2 s^2 + H^2)} & \frac{J_e}{J_e^2 s^2 + H^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_{x0} \\ M_{y0} \end{bmatrix}. \quad (7)$$

在捷联式惯性导航中, 对二自由度陀螺希望引入一些补偿器, 以使耦合的陀螺变成解耦的系统. $G(s)$ 为

$$G(s) = \begin{bmatrix} \frac{J_e}{J_e^2 s^2 + H^2} & -\frac{H}{s(J_e^2 s^2 + H^2)} \\ \frac{H}{s(J_e^2 s^2 + H^2)} & \frac{J_e}{J_e^2 s^2 + H^2} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

$$\hat{G}(s) = \begin{bmatrix} J_e s^2 & Hs \\ -Hs & J_e s^2 \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} J_e s & H \\ -H & J_e s \end{bmatrix} \triangleq s \hat{G}_1(s). \quad (9)$$

用常值预补偿阵绘制的 Ger 带表明本系统不能做到对角优势, 因而也就不能实现解耦。

二、补偿阵的确定

我们利用动态前置补偿阵进行对角化. 动态补偿阵最简单的形式是取 PD 调节器形式, 即

$$\hat{K}_p(s) = \hat{K}^{(0)} + \hat{K}^{(1)}s. \quad (10)$$

令 $s = j\omega$,

$$\hat{K}_p(j\omega) = \hat{K}^{(0)} + \hat{K}^{(1)}j\omega = [\hat{K}^{(0)} \omega \hat{K}^{(1)}] \begin{bmatrix} I_m \\ jI_m \end{bmatrix}, \quad (11)$$

$$\hat{K} \triangleq [\hat{K}^{(0)} \quad \omega \hat{K}^{(1)}], \quad (12)$$

$\hat{K}$ 为由 $\hat{K}_i$ ($i = 1, 2, \dots, m$) 行向量组成的系数矩阵.

由 (9) 式

$$M_1(\omega) = M_1 = \operatorname{Re} \hat{G}_1(j\omega) = \begin{bmatrix} 0 & H \\ -H & 0 \end{bmatrix}, \quad (13)$$

$$M_2(\omega) = M_2 = \operatorname{Im} \hat{G}_1(j\omega) = \begin{bmatrix} J_e\omega & 0 \\ 0 & J_e\omega \end{bmatrix}, \quad (14)$$

$$W \triangleq \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{bmatrix}. \quad (15)$$

利用附录求动态补偿阵, 注意到

$$E_f^T W^T (W W^T)^{-1} W E_f = I_2 \quad (16)$$

因此得

$$\mu_{1\max} = 1, \quad \mu_{2\max} = 1.$$

且求得特征向量为

$$\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ 和 } \alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对 $\alpha = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, 求得

$$\hat{K}_1 = [J_e\omega/\Delta^{1/2}, 0, 0, H/\Delta^{1/2}], \quad (17)$$

$$\hat{K}_2 = [0, J_e\omega/\Delta^{1/2}, -H/\Delta^{1/2}, 0]. \quad (18)$$

对 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, 求得

$$\hat{K}_1 = [0, H/\Delta^{1/2}, -J_e\omega/\Delta^{1/2}, 0], \quad (19)$$

$$\hat{K}_2 = [-H/\Delta^{1/2}, 0, 0, -J_e\omega/\Delta^{1/2}], \quad (20)$$

式中 $\frac{1}{\Delta^{1/2}} = \frac{1}{J_e^2 \omega^2 - H^2}$, 在 s 域里 $\frac{1}{\Delta^{1/2}} = -\frac{1}{J_e^2 s^2 + H^2}$.

讨论 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ 所得的 (19)、(20) 式, 得

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{K}_1 \\ \hat{K}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & H/\Delta^{1/2} & -J_e \omega / \Delta^{1/2} & 0 \\ -H/\Delta^{1/2} & 0 & 0 & -J_e \omega / \Delta^{1/2} \end{bmatrix}, \quad (21)$$

因此得

$$\hat{K}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 & H/\Delta^{1/2} \\ -H/\Delta^{1/2} & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{K}^{(1)} = \begin{bmatrix} -J_e / \Delta^{1/2} & 0 \\ 0 & -J_e / \Delta^{1/2} \end{bmatrix}.$$

于是可以求得

$$\hat{K}_p(s) = \hat{K}^{(0)} + \hat{K}^{(1)} s = \frac{1}{J_e^2 s^2 + H^2} \begin{bmatrix} J_e s & -H \\ H & J_e s \end{bmatrix}. \quad (22)$$

进而

$$\hat{K}_p(s) \hat{G}_1(s) = \frac{1}{J_e^2 s^2 + H^2} \begin{bmatrix} J_e s & -H \\ H & J_e s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} J_e s & H \\ -H & J_e s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

于是

$$\hat{K}_p(s) \hat{G}(s) = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix}, \quad G(s) K_p(s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{s} & 0 \\ 0 & \frac{1}{s} \end{bmatrix}.$$

可见, 在动态前置补偿阵为 (22) 式时, 控制对象的捷联陀螺的 $G(s)$ 完全实现了对角化, 这是一个理想的结果.

三、 $K_c(s)$ 的选择

为使力平衡回路满足动态要求, 速率输入时回路输出无静差, 注意到 $G(s)K_p(s)$ 的表达式, $K_c(s)$ 的对角阵形式选为

$$K_c(s) = \text{diag} \left\{ K_c \frac{\tau s + 1}{s(Ts + 1)}, K_c \frac{\tau s + 1}{s(Ts + 1)} \right\}. \quad (23)$$

从而

$$\hat{Q}(s) = \hat{K}_c(s) \hat{K}_p(s) \hat{G}(s) = \begin{bmatrix} \frac{s^2(Ts+1)}{k_c(\tau s+1)} & 0 \\ 0 & \frac{s^2(Ts+1)}{k_c(\tau s+1)} \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\hat{H}(s) = I_2 + \hat{Q}(s) = \begin{bmatrix} 1 + \frac{s^2(Ts+1)}{k_c(\tau s+1)} & 0 \\ 0 & 1 + \frac{s^2(Ts+1)}{k_c(\tau s+1)} \end{bmatrix}. \quad (25)$$

已知陀螺对象参数, 力平衡回路要求如下:

$H = 238$ 克厘米秒, $J_e = 0.18$ 克厘米秒², 传感器系数 $k_e = 0.2$ mV/角秒, 力矩器系数 $k_t = 0.1^\circ/\text{秒}/\text{mA}$. 要求跟踪误差 ≤ 1 角分; 最大动态误差 < 20 角分, 过渡过程时间 $t_s \leq 20$ ms, 单位阶跃超调量 $\sigma\% \leq 20\%$.

选择 k_c , T , τ 不同参数组合, 进行仿真比较, 最后选择得 $\tau = 0.0031$, $T = 0.0147$, $k_0 = 45000$ (k_0 是包括 k_e 、 k_t 的控制器总增益).

四、控制器的实现和试验

图 2 为控制器的原理框图, 交流传输增益 100, 动态补偿增益 k_c , 图中虚线框图用图 3 实现. 需要说明, 图 3 中积分器的 $2M$ 电阻是为了避免其饱和而设置的, 因时间常数大, 它对回路动态性能的影响可略去.

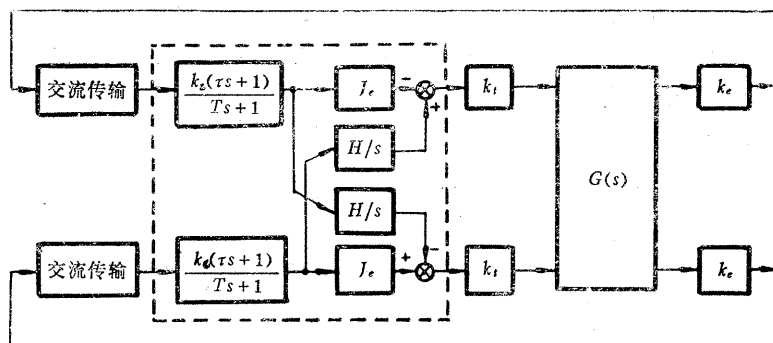


图 2 力平衡系统控制器框图

在实验室进行速率输入和阶跃输入的试验, 试验结果分别示于图 4a 和图 5. 用单轴速率台以 $10^\circ/\text{秒}$ 的速率作陀螺输入 (对应 α 角), 同时记录二轴的传感器输出, 结果表明, y 轴的跟踪特性很好, 而对另一 x 轴几乎没有影响. 为了比较还做了零输入的

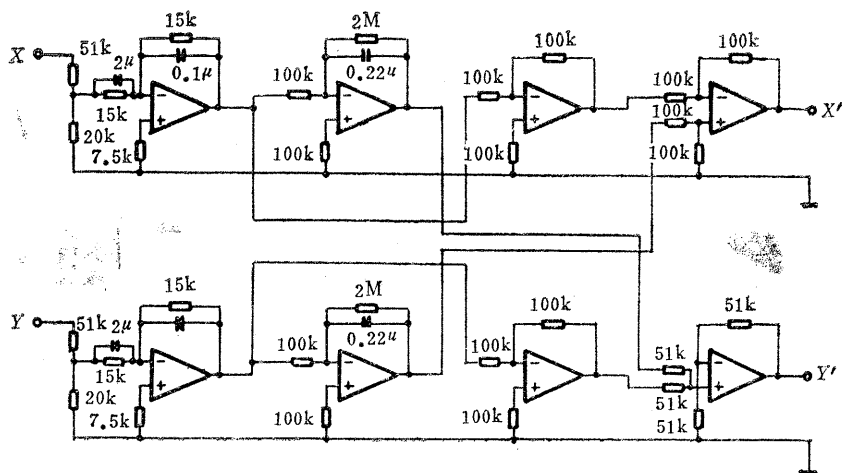


图 3 控制线路原理图

输出特性 (图 4b)。阶跃试验是在试验前先断开线路, 转动基座 α_0 , 然后接通, 同时记录二轴的输出。上述试验表明力平衡回路的动态特性和解耦特性都是满意的。

五、结 论

INA 方法不仅对过程控制的应用是成功的, 而且也适用于象捷联陀螺力平衡回路这样的动力系统; 我们的设计和试验获得良好的结果, 与理论分析一致; 计算机的辅助设计和图显终端给设计工作带来莫大的方便。

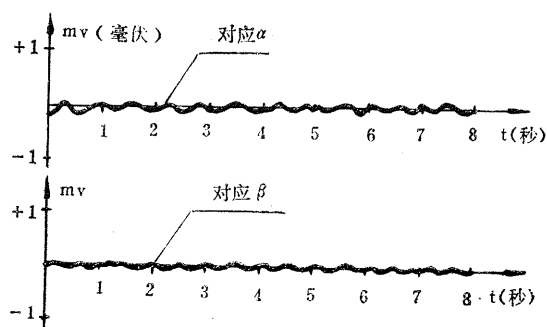


图 4a 速率跟踪

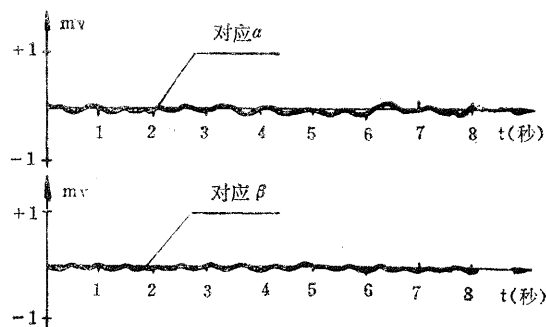


图 4b 输入为零的输出 (α 通道电路噪声较 β 通道大) 注: 变换系数: 1/10 (角分/mV)

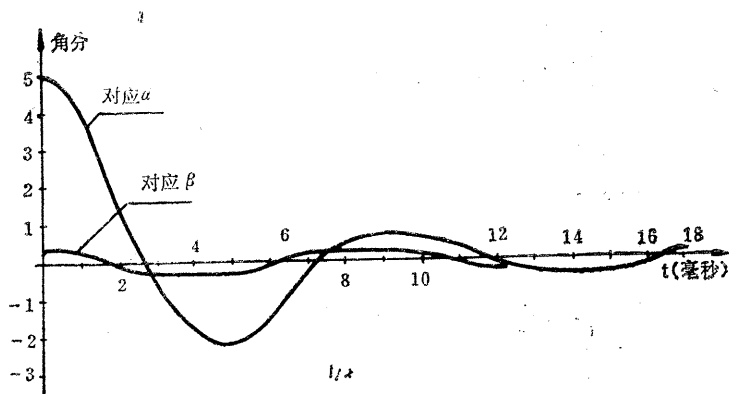


图 5 阶跃响应曲线 注: 变换系数: 1/10 (角分/mV)

附录 准对角化方法

设补偿阵 $K(s)$, 且

$$\hat{K}(s) \triangleq \hat{K}^{(0)} + K^{(1)}s. \quad (A-1)$$

令 $s = j\omega$

$$\hat{K}(j\omega) = [\hat{K}^{(0)} \omega \hat{K}^{(1)}] \begin{bmatrix} I_m \\ jI_m \end{bmatrix}, \quad (A-2)$$

$$\hat{K} \triangleq [\hat{K}^{(0)} \omega \hat{K}^{(1)}]. \quad (A-3)$$

并用 $K_j (j=1, 2, \dots, m)$ 表示 $\hat{K}$ 的行向量.

设对象传递函数逆阵为 $\hat{G}(s)$, 且

$$M_1(\omega) = M_1 = \operatorname{Re} \hat{G}(j\omega). \quad (A-4)$$

$$M_2(\omega) = M_2 = \operatorname{Im} \hat{G}(j\omega), \quad (A-5)$$

$$\sum_{i=1}^m |\hat{q}_{ji}|^2 = \sum_{i=1}^m \hat{q}_{ji}(j\omega) \hat{q}_{ji}^*(j\omega) \quad (j=1, 2, \dots, m)$$

$$= \hat{K}_j(j\omega) \hat{G}(j\omega) \hat{G}^*(j\omega) \hat{K}_j^*(j\omega)$$

$$= [\hat{K}_j^{(0)} \omega \hat{K}_j^{(1)}] \begin{bmatrix} I_m \\ jI_m \end{bmatrix} \hat{G}(j\omega) \hat{G}^*(j\omega) \begin{bmatrix} I_m - jI_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K_j^{(0)T} \\ \omega K_j^{(1)T} \end{bmatrix}$$

$$= \hat{K}_j \begin{bmatrix} I_m \\ jI_m \end{bmatrix} [M_1 \quad M_2] \begin{bmatrix} I_m \\ jI_m \end{bmatrix} [I_m - jI_m] \begin{bmatrix} M_1^T \\ M_2^T \end{bmatrix} [I_m - jI_m] \hat{K}_j^T$$

$$= \hat{K}_j \begin{bmatrix} M_1 M_1^T + M_2 M_2^T & M_2 M_1^T - M_1 M_2^T \\ -M_2 M_1^T + M_1 M_2^T & M_1 M_1^T + M_2 M_2^T \end{bmatrix} \hat{K}_j^T. \quad (\text{A-6})$$

$$\text{令 } W \triangleq \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2 & M_1 \end{bmatrix} \quad (\text{A-7})$$

所以 (A-6) 式可写为

$$\sum_{i=1}^m |\hat{q}_{ji}|^2 = \hat{K}_j W W^T \hat{K}_j^T. \quad (\text{A-8})$$

因 $\hat{G}(j\omega)$ 满秩, 故 $\hat{G}(j\omega) \hat{G}^*(j\omega)$ 正定, $W W^T$ 亦正定.

$$\text{取 } E_j \triangleq \begin{bmatrix} e_j & 0 \\ 0 & e_j \end{bmatrix}, \quad e_j = [0, \dots, 1, 0, \dots, 0]^T,$$

$$\text{取约束条件 } |\hat{q}_{ji}|^2 = \hat{K}_j W E_j E_j^T W^T \hat{K}_j^T \triangleq \hat{K}_j B \hat{K}_j^T = 1. \quad (\text{A-9})$$

在普遍情况下, 我们没有理由期望非对角线上元素为零, 因此取其为极小, 而求得准对角化条件. 现在考虑指标函数

$$J_j = \sum_{i=1}^m |\hat{q}_{ji}|^2 = \sum_{i=1}^m |\hat{q}_{ji}|^2 - |q_{ji}|^2 \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (\text{A-10})$$

将 (A-8)、(A-9) 代入上式, 得

$$J_j = \hat{K}_j W (I_{2m} - E_j E_j^T) W^T \hat{K}_j^T \triangleq \hat{K}_j A \hat{K}_j^T. \quad (\text{A-11})$$

$$\text{取 } J'_j = \hat{K}_j A \hat{K}_j^T + \lambda (1 - \hat{K}_j B \hat{K}_j^T), \quad (\text{A-12})$$

$$\text{令 } 0 = \frac{\partial J'_j}{\partial \hat{K}_j} = 2A \hat{K}_j^T - 2\lambda B \hat{K}_j^T,$$

$$\text{得 } A \hat{K}_j^T = \lambda B \hat{K}_j^T. \quad (\text{A-13})$$

注意 $J_j = \lambda$, (A-13) 是广义特征向量问题:

$$A \hat{K}_j^T = \lambda_{\min} B \hat{K}_j^T. \quad (\text{A-14})$$

(A-14) 左右同时加入 $B \hat{K}_j^T$, 并将 A, B 代入, 得

$$\mu_{\max} \hat{K}_j^T = (W W^T)^{-1} W E_j E_j^T W^T \hat{K}_j^T, \quad (\text{A-15})$$

式中

$$\mu_{\max} = \frac{1}{1 + \lambda_{\min}}, \text{ 是 } (W W^T)^{-1} W E_j E_j^T W^T \text{ 的最大特征值.}$$

令

$$\alpha_{2 \times 1} \triangleq E_j^T W^T \hat{K}_j^T, \text{ 得}$$

$$\mu_{\max} \alpha = E_j^T W^T (W W^T)^{-1} W E_j \alpha \quad (\text{A-16})$$

以及

$$\hat{K}_j^T = \frac{1}{\mu_{\max}} (W W^T)^{-1} W E_j \alpha, \quad (\text{A-17})$$

$$\alpha^T \alpha = 1. \quad (\text{A-18})$$

(A-16) (A-17)、(A-18) 构成求动态补偿阵的线性方程组。

参 考 文 献

- [1] Rosenbrock, H. H., 计算机辅助控制系统设计, 周文忠译, 科学出版社, 北京, (1983)。
- [2] Johnson, M. A., Diagonal Dominance and the Method of Pseudodiagonalisation, Proc. IEE, **126**, 10, (1979), 1011—1017.
- [3] 白方周、李嗣福, 控制系统 CAD 与近代频域法, 全国第二次系统仿真学术会议宣读论文, (1981, 庐山)。
- [4] 以光衢, 挠性调谐陀螺仪力平衡回路线性模型, 惯性导航与仪表, 2, (1982), 26—31。

THE APPLICATION OF INA METHOD TO THE REBALANCE LOOP OF STRAPDOWN GYRO

Yi Guangqui et al.

(Bijing Institute of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

From the view point of control theory, the two-degree freedom rebalance loop of strapdown gyro is a two-input and two-output system, and in Strapdown Inertial Navigation it is required to decouple the system for assurance of measuring accuracy. For applying the INA theory, this paper adopts the dynamic precompensation matrix to perform diagonal dominance and pseudodiagonalisation. Then the amount of the calculation of eigenvalue and eigenvector can be greatly reduced. This paper briefly describes the design of the controller made on the basis of theoretical analysis and the setting and the test of the device. In this paper is shown the concordance of experiment results of the system with the theoretical analysis, and the outcomes given are satisfactory.