第4卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol. 4, No. 3
1987年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1987

采用输出比例—微分反馈配置极点的新方法

张福恩
（哈尔滨工业大学）

摘　　要

本文研究了线性常参数多变量系统引进输出比例－微分反馈（简称PD补偿器）任意配置闭路系统极点的问题。证明了可任意配置闭路极点数 $\eta \leqslant \min\{\max\{2m+(p-1)[2m/p], 2p+(m-1)[2p/m]\}, n\}$（$m=\mathrm{rank}C$, $p=\mathrm{rank}B$, n 为系统阶次，$[2m/p]$ 表示 $2m/p$ 的整数部分）.最后举例说明了这种方法的应用.

一、引　　言

在线性常参数多变量系统理论中，利用输出比例反馈，输出反馈动态补偿器，输出比例—微分反馈和PI补偿器等任意配置闭路极点问题是近年来非常活跃的研究领域。

本文的目的是研究在闭路系统极点任意配置条件下，设计输出比例—微分反馈补偿的问题。这一问题文〔1,2,3〕已经作了讨论，证明了可任意配置的闭路极点数 $\eta \leq \min\{\max\{2m+p-1, 2p+m-1\}, n\}$。本文则给出了一种新的设计方法，利用这种方法除可增加可配极点数外，还具有计算简单，参数选取直观、灵活，通常还可以得到简单的 K、Q 矩阵等优点。

二、征特方程 $p\times p$ 维矩阵行列式表示式

已知能控能观的线性常参数多变量系统为

$$\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}, \quad \mathbf{y} = C\mathbf{x}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{x}$ 为 n 维状态向量，$\mathbf{u}$ 为 p 维控制向量，$\mathbf{y}$ 为 m 维输出向量；A、B、C 分别为相应维数的实常数矩阵。

对系统（1）引进输出比例—微分反馈

$$\mathbf{u} = -(K\mathbf{y} + Q\dot{\mathbf{y}}), \tag{2}$$

则得闭路系统特征方程为

$$|sI - A + B(K+Qs)C| = 0. \tag{3}$$

为了导出闭路系统特征方程（3）的 $p\times p$ 维矩阵行列式表示式，首先给出如下的预

本文于1984年8月21日收到。 1986年11月25日收到修改稿。

备结果。

设
$$G(s)=(sI-A)^{-1}B=N(s)T(s)^{-1},\tag{4}$$
其中 $T(s)$ 和 $N(s)$ 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的右分解，并且 $T(s)$ 和 $N(s)$ 分别为 $p\times p$ 维和 $n\times p$ 维多项式矩阵。

引理 1　若系统（1）能控，则 $[sI-A]$ 和 B 矩阵为 $G(s)$ 矩阵的左既约分解。

引理 2　假定矩阵 $[sI-A]$ 和 B，$T(s)$ 和 $N(s)$ 分别为 $G(s)$ 矩阵的左和右既约分解，则矩阵 $[sI-A]$ 和 $T(s)$，除 1 以外的不变因子完全一致。

由引理 2 可知，$|sI-A|$ 和 $|T(s)|$ 只差一个常数因子。

引理 3　若 P 和 Q 分别为 $n\times m$ 和 $m\times n$ 维矩阵，则有
$$|I_n+PQ|=|I_m+QP|。\tag{5}$$
上述三个引理的证明见文献[4]。

定理　若系统（1）能控，矩阵 $T(s)$ 和 $N(s)$ 为 $G(s)$ 矩阵的右既约分解，则对特征方程（3）有
$$|T(s)+(K+Qs)CN(s)|=0。\tag{6}$$
证　利用上述三个引理可以直接证明此定理。从略。

方程（6）就是具有 PD 补偿器的闭路系统特征方程的 $p\times p$ 维矩阵行列式表示式。

三、设 计 方 法

下面依据方程（6）讨论 PD 补偿器的设计问题。

1）首先假定 $p\leq m$。从矩阵 $T(s)+(K+Qs)CN(s)$ 中任取出一行 $T_i(s)+(K_i+Q_is)CN(s)$，其元素为多项式，多项式系数为 K_i，Q_i 行向量计 $2m$ 个元素的线性函数。由于 $T_i(s)+(K_i+Q_is)CN(s)$ 为 p 维多项式行向量，因此对这一行配置一个极点需要 p 个元素，配置两个极点需 $2p$ 个元素，以此类推，所以对这一行最多可任意配置 $[2m/p]$ 个极点。这里的 $[2m/p]$ 表示 $2m/p$ 的整数部份，显然 $2m/p\geq 2$。不失一般性，考虑 $T(s)+(K+Qs)CN(s)$ 矩阵的前 $p-1$ 行，则可任意配置闭路极点数 $\eta_1\leq(p-1)[2m/p]$ 个。同时确定 K_i 和 $Q_i(i=1,2,\cdots,p-1)$。

2）将已配定的 η_1 阶多项式从 $|T(s)+(K+Qs)CN(s)|$ 中提出来，则得余下部份特征多项式为
$$\phi_1(s)=\begin{vmatrix} M(s)\\ T_p(s)+(K_p+Q_ps)CN(s)\end{vmatrix},\tag{7}$$
其中 $M(s)$ 为 $(p-1)\times p$ 维已知多项式矩阵；$T_p(s)$、K_p 和 Q_p 分别为 $T(s)$、K、Q 矩阵的第 p 行向量。

将（7）式按其矩阵最后一行元素展开得
$$\phi_1(s)=[T_p(s)+(K_p+Q_ps)CN(s)]\Delta,\tag{8}$$
Δ 为 p 维多项式列向量，其元素为（7）式矩阵最后一行元素的代数余子式。（8）式展开为 $n-\eta_1$ 阶多项式，其系数为 K_p、Q_p 行向量计 $2m$ 个元素的线性函数。当 $n-\eta_1\geq 2m$

时，这 $2m$ 个元素最多组成 $2m$ 个独立系数，因此，在这种情况下，对（8）式最多可任意配置 $2m$ 个闭路极点；当 $n-\eta_1<2m$ 时，则 $2m$ 个元素最多组成 $n-\eta_1$ 个独立系数，所以对（8）式最多可任意配置 $n-\eta_1$ 个极点。综合这两种情况对（8）可任意配置闭路极点数为 $\eta_2\le\min\{2m,\ n-\eta_1\}$。上述两步总共可任意配置闭路极点数 $\eta_B\le\min\{2m+(p-1)[2m/p],\ n\}$。

当 $m<p$ 时，可得闭路系统特征方程 $m\times m$ 维多项式矩阵行列式表示式为

$$|T_c(s)+(K^\tau+Q^\tau s)B^\tau N_c(s)|=0, \tag{9}$$

其中 $T_c(s)$ 和 $N_c(s)$ 为 $[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$ 矩阵的右既约分解式，且分别为 $m\times m$ 和 $n\times m$ 维多项式矩阵。

根据方程（9），按照上述同样的做法，在此种情况下，可任意配置闭路极点数为 $\eta_c\le\min\{2p+(m-1)[2p/m],n\}$。

综上所述，利用输出比例－微分反馈补偿器可任意配置闭路极点数为 $\eta\le\min\{\max\{2m+(p-1)[2m/p],\ 2p+(m-1)[2p/m],n\}$。

关于矩阵 $[sI-A]^{-1}B$ 和 $[sI-A^\tau]^{-1}C^\tau$ 的右既约分解矩阵的简单算法见文献[5]。

四、例　题

已知能控能观系统参数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0\\1&0&0&0&0&0\\0&1&0&0&0&0\\0&0&1&0&0&0\\0&0&0&1&0&0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\\1&0\\0&0\\0&0\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{bmatrix}0&0&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}. \tag{10}$$

设计PD补偿器，使其闭路系统极点为 $-1,-2,-2,-3,-4,-5$。

1）利用文[5]的算法计算 $[sI-A]^{-1}B$ 的右既约分解矩阵得

$$T(s)=\begin{bmatrix}s^3&0\\-s^4&s^3\end{bmatrix},\qquad N(s)=\begin{bmatrix}s^2&-s^3&s&0&1&0\\0&s^2&0&s&0&1\end{bmatrix}^\tau. \tag{11}$$

设

$$Qs+K=\begin{bmatrix}q_{11}s+k_{11}&q_{12}s+k_{12}\\q_{21}s+k_{21}&q_{22}s+k_{22}\end{bmatrix}, \tag{12}$$

则得闭路系统特征多项式为

$$\phi(s)=\begin{vmatrix}s^3+q_{11}s+k_{11}&q_{12}s+k_{12}\\-s^4+q_{21}s+k_{21}&s^3+q_{22}s+k_{22}\end{vmatrix}. \tag{13}$$

2）对（13）式第二行配置极点－1，－2，即令

$$\left.\begin{aligned} s^4-q_{21}s-k_{21}&=(s^2+3s+2)(s^2+as+b),\\ s^3+q_{22}s+k_{22}&=(s^2+3s+2)(s+c).\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

解方程（14）得

$[a \quad b \quad q_{21} \quad k_{21}]=[-3 \quad 7 \quad -15 \quad 30]$，$[c \quad q_{22} \quad k_{22}]=[-3 \quad -7 \quad -6]$.

3）将已配定的多项式(s^2+3s+2)从（13）式中提出来，尔后得余下部份特征多项式为

$$\phi_1(s)=\begin{vmatrix} s^2+q_{11}s+k_{11} & q_{12}s+k_{12} \\ -(s^2-3s+7) & s-3 \end{vmatrix}. \tag{15}$$

已知

$$(s+2)(s+3)(s+4)(s+5)=s^4+14s^3+71s^2+154s+120, \tag{16}$$

将（15）式展开，然后令其和（16）式 s 同次幂系数相等得

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \\ -3 & 7 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -3 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q_{11} \\ q_{12} \\ k_{11} \\ k_{12} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 17 \\ 71 \\ 154 \\ 120 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

解方程（17），最后得

$$K=\begin{bmatrix} 401 & 189 \\ 30 & -6 \end{bmatrix}, \qquad Q=\begin{bmatrix} -67 & 17 \\ -15 & -7 \end{bmatrix}. \tag{18}$$

上面给出的设计方法属于一般情况，通常还可以根据闭路系统特征方程（6）和（9）式的具体形式，采用灵活的计算方法。

参 考 文 献

〔1〕 Seraji, M., Pole Placement in Multiveriable System Using Proportional-devivative Output Feedback, Int. J. Control, **31**, 1, (1980), 195—207.

〔2〕 Rajagopalan, T., Pole Assignment with Output Feedback, Autometic, **20**, 1, (1984), 127—128.

〔3〕 Seraji, M and Tarokh, M., Design of Proportional-plus-derivative Output Feedback for Pole Assignment, Proc. IEE, (1977), 124—729.

〔4〕 (日)须田信英等著，自动控制中的矩阵理论，科学出版社，北京，(1979).

〔5〕 张福恩，状态反馈极点配置的新方法，自动化学报，**12**，2，(1986)，162—167.

A NEW METHOD OF POLE ASSIGNMENT USING PROPORTIONAL-DERIVATIVE OUTPUT FEEDBACK

Zhang Fuen
(Harbin Institute of Technology)

Abstract

In this paper the problem of pole assignment in linear time-invariable multivariable system $\dot{\mathbf{x}} = A\mathbf{x} + B\mathbf{u}$, $\mathbf{y} = C\mathbf{x}$ using proportional-derivative output feedback $\mathbf{u} = -(K\mathbf{y} + Q\dot{\mathbf{y}})$ is studied. It is proven that a number $\min\{\max\{2m + (p-1)[2m/p], 2p + (m-1)[2p/m]\}, n\}$ of the closed loop system poles are arbitrarily assignable (n is order of the system, $p = \text{rank } B$, $m = \text{rank } C$). Finally, the method is illustrated by the numerical example.