第4卷 第4期　　控制理论与应用　　Vol.4, No.4
1987年12月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Dec., 1987

关于一类双线性系统能达性及最优控制问题*

赵 怡　刘明扬

（中山大学，广州）

摘 要

本文在某些空间结构下讨论了如下的双线性控制系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+A(t)x(t)=u(t)B(t)x(t)+f(t), \\ x(0)=x_0. \qquad t\in(0,T) \end{cases}$$

在关于算子 A(t)及B(t) 的某些假设下，给出了系统的分布解及轨道集合的性质. 通过引入共轭系统及应用半群理论给出了系统的某些逼近能达性及局部能达性的结果，并应用上结果讨论述了某些类型的最优控制问题.

一、引　言

〔1〕中讨论了形如$\dot{x}+Ax+ux=f$的双线性系统在分布控制：$u\in L^\infty((0,T)\times\Omega)$时二次型指标的最优控制问题. 〔2〕讨论了形如$\dot{x}=Ax+uBx$的双线性系统的 mild 解在控制$u\in Z(T)$时的能控性问题，其中$Z(T)$是连续及稠地含在$L^1(0,T;R)$中的$B$空间.

本文考虑由下面抽象方程所描述的双线性系统

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+A(t)x(t)=u(t)B(t)x(t)+f(t), \\ x(0)=x_0. \qquad t\in(0,T) \end{cases} \tag{1.1}$$

记$[0,T]=I$，我们将在下面的假设下，讨论系统（1.1）的分布解的性质，并进一步讨论能达性及最优控制的存在性问题.

(A_1) V、H是Hilbert 空间，V在H中稠，且形成一自反结构，其对偶空间为V^*，$V\hookrightarrow H\hookrightarrow V^*$.

(A_2) $x\in L^2_{[I,V]}\triangleq Y$，$Y^*=L^2_{[I,V^*]}$，$f\in Y^*$，$x_0\in H$.

(A_3) $\{A(t),\ t\in I\}$是一簇线性算子，$A(t)\in L_{(V,V^*)}$，$\forall t\in I$，且对于每对φ，$\phi\in V$，$t\to\langle A(t)\varphi,\ \phi\rangle$在$I$上是可测的，并存在不依赖于$t$及$\phi$的常数$\alpha>0$，使得

---

* 此项研究得到中山大学高等学术研究中心基金会和中国科学院科学基金会资助.

本文于1984年12月8日收到. 1987年7月22日收到修改稿.

$$\langle A(t)\phi,\phi\rangle\geq\alpha\|\phi\|_V^2 \qquad \forall\phi\in V,\ t\in I \tag{1.2}$$

和存在不依赖于t，ϕ，φ的常数$c>0$，使得

$$\langle A(t)\phi,\ \varphi\rangle\leq c\|\phi\|_V\ \|\varphi\|_V,\ \forall\phi,\ \varphi\in V,\ t\in I \tag{1.3}$$

(A_4) $B(t)\in L(H)$，$\forall t\in I$，$B\in L^\infty(I,\ L(H))$，$\underset{t\in I}{\text{ess sup}}\ \|B(t)\|_{L(H)}=b$　(1.4)

(A_5) 控制$u\in U=L^\infty(I)$，$U_{ad}\subset U$为有界弱*闭集：$\|u\|_U\leq M\ \ \forall u\in U_{ad}$。　(1.5)

二、系统（1.1）分布解的适定性及轨道性质

先引入空间X

$$X=\{x: x\in Y,\ \dot{x}\in Y^*\}$$

其中$\dot{x}$表示对t的广义导数。在X中定义范数如下：

$$\|x\|_X=\{\|x\|_Y^2+\|\dot{x}\|_{Y^*}^2\}^{\frac{1}{2}}.$$

于是X为Hilbert空间，且[1]

$$X\hookrightarrow C^0(I,\ H). \tag{2.1}$$

定理2.1 设V是可分的，则在假设$(A_1)\sim(A_3)$及(A_4)下，对每个$x_0\in H$、$f\in Y^*$及每个$u\in U$系统（1.1）有唯一的分布解$x\in X$，且映象$\{x_0,\ f\}\to x: H\times Y^*\to Y$、$\{x_0,\ f\}\to x: H\times Y^*\to X$及$\{x_0,\ f\}\to x(T): H\times Y^*\to H$皆是连续线性的。

证　对每个给定的$u\in U$，令$\widetilde{A}(t)=A(t)-u(t)B(t)$，由假设条件可验证$t\to\widetilde{A}(t)$是可测的，且

$$\langle\widetilde{A}(t)\phi,\phi\rangle\geq\alpha\|\phi\|_V^2-b\|u\|_U\|\phi\|_H^2,\ \ \forall\phi\in V$$

即

$$\langle\widetilde{A}(t)\phi,\phi\rangle+\lambda\|\phi\|_H^2\geq\alpha\|\phi\|_V^2,\ \ \lambda=b\|u\|_U,\ \ \forall\phi\in V,$$

同时有

$$\langle\widetilde{A}(t)\phi,\ \varphi\rangle\leq(c+\lambda)\|\phi\|_V\|\varphi\|_V,\ \ \forall\phi,\ \varphi\in V.$$

因此，由[1]的第三章知道定理的结论成立。

注2.1 在定理2.1的条件及(A_5)成立时，由[1]中结果及Gronwall不等式可推得

$$\|x\|_Y\leq\left[\frac{1}{\alpha}\|x_0\|_H^2+\frac{1}{\alpha^2}\|f\|_{Y^*}^2+\left(\|x_0\|_H^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{Y^*}^2\right)bTe^{2bMT}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq r(\|x_0\|_H+\|f\|_{Y^*}), \tag{2.2}$$

$$\|\dot{x}\|_{Y^*}\leq r_1(\|x_0\|_H+\|f\|_{Y^*}),\ \ r_1=[1+(c+M\widetilde{b})r], \tag{2.3}$$

$$\|x(\theta)\|_H\leq\left(\|x_0\|_H^2+\frac{1}{\alpha}\|f\|_{Y^*}^2\right)^{\frac{1}{2}}e^{bMT}\leq r_2(\|x_0\|_H+\|f\|_{Y^*}),\ \ \theta\in I, \tag{2.4}$$

其中，x是（1.1）对应于$u\in U_{ad}$的分布解，r，r_1，r_2为正常数。

现设$x(t,\ u,\ x_0)$表示系统（1.1）对应于初值x_0及控制$u\in U_{ad}$的解，并记轨道集

$$S=\{x(\cdot,u,x_0):u\in U_{ad}\}$$

记集合 $$Z=\{\dot{x}(\cdot,u,x_0):u\in U_{ad}\}=\{\dot{x}(\cdot,u,x_0):x\in S\}.$$

(2.1)～(2.4)立即可得如下引理：

引理2.1 如果注2.1的假设成立，则S是$Y\cap L^\infty_{(I,H)}$中的有界集，Z是Y^*中的有界集，S是X中的有界集，因而是$C^0_{(I,H)}$中的有界集。

注2.2 因Y是自反B空间，而S是Y中有界集，因而S是Y中条件弱紧集。

定理2.2 在注2.1的假设下，S是Y中的弱紧集。

证　由注2.2知道，只需证明S是Y中的弱闭集。

设 $$\{x_n(\cdot,u_n,x_0)\}\subset S,$$

$$x_n\xrightarrow{\text{弱}}x \quad \text{在}Y \quad \text{当}n\to\infty. \tag{2.5}$$

现证明$x\in S$。由S的定义知道，x_n满足

$$\begin{cases}\dfrac{dx_n}{dt}+A(t)x_n=u_n(t)B(t)x_n+f(t),\\ x_n(0,u_n,x_0)=x_0,\end{cases} \tag{2.6}$$

其中，$\{u_n\}\subset U_{ad}$，由(A_5)知U_{ad}是U中弱*紧集，因此有子列，仍记为$\{u_n\}$，及$u\in U_{ad}$，有

$$u_n\xrightarrow{\text{弱*}}u \quad \text{当}n\to\infty. \tag{2.7}$$

u_n所对应的x_n当然仍然满足(2.5)及(2.6)。

取$\phi\in C^1(I)$，$\phi(T)=0$，令$\phi_i(t)V_i\in C^1(I,V)\subset Y$，这里$\{V_i\}$是$V$的完备基组。用$\phi_i$作用(2.6)形成$\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^*V}$并由$0\to T$积分，利用分部积分可得

$$-\int_0^T\left\langle x_n(t),\frac{d\phi_i}{dt}\right\rangle_{VV^*}dt+\int_0^T\langle x_n(t),A^*(t)\phi_i(t)\rangle_{VV^*}dt$$
$$=\langle x_0,\phi_i(0)\rangle_H+\int_0^T\langle u_n(t)B(t)x_n(t)+f(t),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt, \tag{2.8}$$

其中，$A^*(t)\in L(V,V^*)$。而

$$\int_0^T\langle u_n(t)B(t)x_n(t),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt=\int_0^T u_n(t)\langle B(t)x(t),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt$$
$$+\int_0^T u_n(t)\langle B(t)(x_n(t)-x(t)),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt. \tag{2.9}$$

由(2.5)知道，(2.9)式右边第二项

$$\left|\int_0^T u_n(t)\langle B(t)(x_n(t)-x(t)),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}\,dt\right|$$
$$\leq M\int_0^T\left|\langle x_n(t)-x(t),B^*(t)\phi_i(t)\rangle_{VV^*}\right|dt\to 0 \quad \text{当}n\to\infty \quad \forall_i, \tag{2.10}$$

其中，$B^*(t)\in L(V,V^*)$。另外，注意到

$\langle Bx,\phi_i\rangle\in L^2(I)\subset L^1(I)$，由（2.7）便可推得（2.9）右边的第一项

$$\int_0^T u_n(t)\langle B(t)x(t),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt$$

$$\to\int_0^T u(t)\langle B(t)x(t),\phi_i(t)\rangle_{V^*V}dt \quad 当n\to\infty \quad \forall i. \tag{2.11}$$

因此，由（2.5）、（2.8）、（2.10）及（2.11）可得

$$-\int_0^T\left\langle x(t),\frac{d\phi_i}{dt}\right\rangle dt+\int_0^T\langle x(t),A^*(t)\phi_i(t)\rangle dt$$

$$=\langle x_0,\phi_i(0)\rangle_H+\int_0^T\langle u(t)B(t)x(t)+f(t),\phi_i(t)\rangle dt \quad \forall i. \tag{2.12}$$

特别取$\phi\in C_0^\infty(I)$，根据对t广义导数的定义并注意到$\Psi_i(0)=0$，由（2.12）有

$$\int_0^T\left\langle\frac{dx}{dt}+A(t)x-u(t)B(t)x-f(t),\phi_i\right\rangle dt=0 \qquad \forall i.$$

因此，在分布意义下有

$$\frac{dx}{dt}+A(t)x=u(t)B(t)x+f(t). \tag{2.13}$$

因$x\in Y$，所以有$Ax\in Y^*$，$(uBx+f)\in Y^*$，因此$\frac{dx}{dt}\in Y^*$，故$x\in X$，且由（2.13）及（2.12）易证$x(t)|_{t=0}=x_0$。注意到$u\in U_{ad}$及S的定义知$x\in S$，证毕。

定理2.3 在注2.1的假设下，S是$C^0_{(I,H)}$中的列紧集。

证 首先，由(2.1)知$S\subset C^0_{(I,H)}$。现设$\{x_n\}\subset S$，由定理2.2及其证明知道，必有$\{x_n\}$中的子列，仍记为$\{x_n\}$，及$x\in S$，使得

$$x_n\xrightarrow{弱}x \qquad 在Y \qquad 当n\to\infty \tag{2.14}$$

以及分别对应于x_n，x的控制u_n、$u\in U_{ad}$，有

$$u_n\xrightarrow{弱^*}u \qquad 在U \qquad 当n\to\infty \tag{2.15}$$

x_n及x皆满足（1.1），故可推得

$$\begin{aligned}0=&\langle\dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)+A(t)(x_n(t)-x(t))-u_n(t)B(t)x_n(t)\\&+u(t)B(t)x(t),\ x_n(t)-x(t)\rangle_{V^*V}\\=&\langle\dot{x}_n(t)-\dot{x}(t)+A(t)(x_n(t)-x(t))-u_n(t)B(t)(x_n(t)-x(t))\\&-(u_n(t)-u(t))B(t)x(t),\ x_n(t)-x(t)\rangle_{V^*V}.\end{aligned} \tag{2.16}$$

对上式由$0\to\theta\in I$积分，并注意到x_n，$x\in S\subset C^0_{(I,H)}$及$B\in L^\infty_{(I,H)}$可推得

$$\|x_n(\theta)-x(\theta)\|_H^2\le 2Mb\int_0^\theta\|x_n(t)-x(t)\|_H^2dt$$

$$+2\int_0^\theta(u_n(t)-u(t))\langle B(t)x(t),\ x_n(t)-x(t)\rangle_H dt,\ \ \theta\in I. \tag{2.17}$$

如果（2.17）最右边一项小于等于0，则有$\|x_n(\theta)-x(\theta)\|_H^2\le 2Mb\int_0^\theta\|x_n(t)-x(t)\|_H^2dt$，由Gronwall不等式即得结论。否则，由于$B(\cdot)x(\cdot)\in L^2_{(I,H)}$，由（2.14）可推知$\langle B(\cdot)x(\cdot),\ x_n(\cdot)-x(\cdot)\rangle_H$在$L^1(I)$中强收敛，故由（2.15）可知（2.17）最右边一项当$n\to\infty$时趋于0，因而由Gronwall不等式便可推得结论。

注2.3　由定理2.3知道，在定理2.1的条件下，$u\to x(t,u,x_0):U_{ad}(\subset U)\to C^0_{(I,H)}$（在$U$的弱*拓朴下）是连续的。

三、关于能达性的讨论

对每个$t\in I$，定义集合

$$K(t,x_0)=\{y:y=x(t)\quad x\in S,\ x(0)=x_0\}.$$

由定理2.3可得如下定理：

定理3.1　在定理2.3的假设下，对任一$t\in I$及$x_0\in H$，$K(t,x_0)$是H的紧子集，因而当H是无穷维空间时，系统（1.1）不是局部能达的，甚至不是局部逼近能达的。

而且，由注2.3及〔2〕中的结果可得到

定理3.2　在定理2.1的假设下，对任一给定的$T>0$，集合

$$S(x_0)=\bigcup_{\substack{0\le t\le T\\ u\in L^\infty(0,T)}}x(t,u,x_0)$$

包含在H中可数个紧子集的并之中，因而有稠余集。

由定理3.1及定理3.2，我们只能在定理2.1及$U_{ad}=U$的假定下，讨论系统（1.1）的逼近能达性，局部逼近能达性及“逐点能达性”。

定义3.1　在定理2.1的假设下，1）系统（1.1）称为是逼近能达的是指：对任一给定的$\phi\in Q$其中Q是H中的一个稠集，存在$T>0$，使得当$\langle\phi,y\rangle=0$，$\forall y\in K(T,x_0)$时、必有$\phi\equiv0$；2）系统（1.1）称为关于H中的子集Q_1是局部逼近能达的是指：对任一给定的$\phi\in Q_1=\{y:\|y\|\le M,\ M$是一个给定的常数$\}$，存在$T>0$，使得当$\langle\phi,y\rangle=0$，$\forall y\in K(T,x_0)$时，必有$\phi\equiv0$；

为简单起见，假定$A(t)=A$，不依赖于t及$f\equiv0$，则（1.1）写为

$$\begin{cases}\dot{x}(t)+Ax(t)=u(t)B(t)x,\\ x(0)=x_0,\end{cases}\tag{3.1}$$

其中$x_0\ne0$（因为在$x_0=0$时，有$x(t,u,x_0)\equiv0$，这是不足道的情况），我们需要如下的假设：

(A_7) 算子$(-A^*)$具有定义域$D(-A^*)\subset V$，它在H上生成C_0半群$T^*(t)$。

可见，$D(-A^*)$在H中稠，而且由于H是Hilbert空间，故$(-A)$在H上生成C_0半群$T(t)$。

定理3.3 在定理2.1及(A_7)的假定下，系统(3.1)是逼近能达的充分条件是：对任一给定的$\phi\in D(-A^*)$，存在$T>0$及$u\in L^\infty(0,T)$使得

$$u(t)B(t)\left[T(t)x_0+\left(\int_0^t T(t-\tau)T^*(T-s)\,ds\right)\phi\right]$$
$$=T^*(T-t)\phi \quad \forall t\in(0,T), \tag{3.2}$$

其中，T及u依赖于ϕ。

证 由定义3.1知道，这只需证明当

$$\langle \phi,y\rangle=0 \qquad \forall y\in K(T,x_0) \tag{3.3}$$

时，必有$\phi\equiv0$。为此，我们引入一个“共轭系统”如下：

$$\begin{cases} -\dot{\xi}(t)+A^*\xi(t)=0, \\ \xi(t)=\phi\in D(-A^*). \end{cases} \tag{3.4}$$

由(A_7)，有$\xi(t)=T^*(T-t)\phi$，它是(3.4)的强解，因而也是(3.4)的分布解，假定$x(t,u,x_0)$是(3.1)的解，由(3.4)及(3.1)我们得

$$0=\int_0^T\langle -\dot{\xi}(t)+A^*\xi(t),x(t,u,x_0)\rangle_H dt$$
$$=\int_0^T\langle\xi(t),\ u(t)B(t)x(t,u,x_0)\rangle dt$$
$$+\langle\phi,T(T)x_0\rangle-\langle\phi,x(T,u,x_0)\rangle,\quad \forall u\in L^\infty(0,T).$$

因而由(3.3)有

$$\int_0^T\langle\xi(t),\ u(t)B(t)x(t,u,x_0)\rangle dt=0,\ u\in L^\infty(0,T). \tag{3.5}$$

如果我们能找到一个控制$u\in L^\infty(0,T)$使得

$$u(t)B(t)x(t,u,x_0)=\xi(t), \tag{3.6}$$

那么由(3.5)及注意到$\xi\in C(0,T;\ H)$，可得到$\xi(t)=0$，$\forall t\in[0,T]$，因而$\phi\equiv0$。所以，关键是找出$u\in L^\infty(0,T)$使得(3.6)成立，由(3.1)及(A_7)知道，这等价于寻找$u\in L^\infty(0,T)$使得

$$u(t)B(t)\left(T(t)x_0+\int_0^T T(T-s)\xi(s)ds\right)=\xi(t).$$

由(3.4)知道，上式等价于(3.2)，证毕。

推论3.1 在定理3.3的假定下，如果对任一给定的$\phi\in Q_1$，其中Q_1如定义3.1所述，(3.2)成立，则系统(3.1)是关于Q_1局部逼近能达的。

注3.1 如果$f\neq0$，我们在定理3.3中有如下的结果以代替(3.2)：

$$u(t)B(t)\left[T(t)x_0+\int_0^t T(T-s)f(s)\,ds+\left(\int_0^t T(T-s)T^*(T-s)\,ds\right)\phi\right]$$
$$=T^*(T-t)\phi+f(t) \qquad \forall t\in(0,T).$$

定理3.4　假定定理2.1的假设及（A_7）成立，给定$x_1\in H$，那么存在（3.1）的解$x(t,u,x_0)$使得对某个$T>0$有$x(T,u,x_0)=x_1$的充分条件是：存在$T>0$及$u\in L^\infty(0,T)$，使得

$$u(t)B(t)\left[I+\frac{1}{T}T^*(T-t)-\frac{1}{T}\int_0^t T(t-s)T^*(T-s)\,ds\right]T(T)x_0$$

$$=\left[\frac{1}{T}\int_0^t T(t-s)T^*(T-s)\,ds-\frac{1}{T}T^*(T-t)\right]x_1 \qquad (3.7)$$

成立。

证　用类似于定理3.3的证明方法可得到$x(T,u,x_0)=x_1$等价于

$$\left\langle \phi,\int_0^T T(T-t)u(t)B(t)x(t,u,x_0)\,dt+T(T)x_0-x_1\right\rangle=0 \qquad \forall\phi\in D(-A^*).$$

因此，关键是寻找$T>0$及$u\in L^\infty(0,T)$，使得

$$\int_0^t\left[T(T-t)u(t)B(t)x(t,u,x_0)+\frac{1}{T}(T(T)x_0-x_1)\right]dt=0.$$

类似于定理3.3的证明便可得到（3.7），证毕。

注3.2　当$A(t)$依赖于t时，我们可以假定$(-A^*(t))$生成一个强发展算子来代替假设（A_7），并可得到类似于定理3.3及定理3.4的结果。

四、最优控制存在性的讨论

由定理2.3及定理3.1，即可得到如下的定理：

定理4.1　在定理2.3的假设下，假定$\widetilde{K}$是H的闭子集，对某个$\widetilde{t}\in[0,T]$，$\widetilde{K}\cap K(\widetilde{t},x_0)\neq\phi$，$J:H\to R$是连续泛函，那么存在一个$u^*\in U_{ad}$，使得$x(\cdot,u,x_0)\in S$，$x(\widetilde{t},u,x_0)\in\widetilde{K}$，并使$J$在$\widetilde{K}\cap K(\widetilde{t},x_0)$上达到最小。

定理4.2　在定理2.3的假设下，假定$\widetilde{K}$是H的闭子集，且

$$I(K)=\{t\in I:\widetilde{K}\cap K(t,x_0)\neq\phi\}$$

非空，则存在一个$u^*\in U_{ad}$，它使系统（1.1）的解在最小的时间内从x_0到达$\widetilde{K}$。

注4.1　可以用定理3.3及定理3.4去验证定理4.1及定理4.2中条件$\widetilde{K}\cap K(t,x_0)\neq\phi$是否满足。

最后需指出的是，用类似的方法可以证明，当$B\in L^\infty(I,L(V,V^*))$时在补充条件（$\alpha-bM$）$>0$下，第二及第四部分的所有结果仍成立。再者，关于能达性的结果（3.2）及（3.7）相对来说比较易于验证。事实上，如果把（3.2）的左边表为$u(t)y_\psi(t)$，并假定$\|y_\psi(t)\|\geq\alpha>0$　$\forall t\in I$，则由（3.2）有$u(t)=\langle T(T-t)\phi,y_\psi(t)\rangle/\|y_\psi(t)\|^2$，$\forall t\in I$。

由文章的讨论可见，如何找到一个理想的框架，使得对最优控制的存在性及能达性都能有一个较理想的结果是一个很有意义的问题。

参 考 文 献

〔1〕 Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equation. Springer－Verlag, New York, (1971).

〔2〕 Ball, J. M., Marsden, J. E., and Slemrob, M., Controllability for Distributed Bilinear Systems. SIAM J. Control and Optimization, **20**, 4, (1982).

A DISCUSSION ON THE ATTAINABILITY PROBLEMS FOR A CLASS OF BILINEAR SYSTEMS*

Zhao Yi, Liu Mingyan

(Zhongshan University, Guangzhou)

Abstract

In this paper, we consider the following bilinear control system

$$\begin{cases} \dot{x}(t)+A(t)x(t)=u(t)B(t)x(t)+f(t) & t\in(0,T) \\ x(0)=x_0 \end{cases}$$

under some space structures.

The properties of the distributed solution and the set of the trajectories of the system are given under certain assumptions on operators $A(t)$ and $B(t)$. Results concerning the approximate and locally approximate reachability are presented by introducing conjugate system and using semigroup theory. Some specific optimal control problems are discussed by virtue of foregoing results.

*This word is supported in part by the foundation of Zhongshan University Advanced Research Centre and the Science Fund of the Chinese Academy of Sciences。