

基于ARMAX模型的广义预测控制

袁震东

(华东师范大学数学系, 上海)

摘 要

本文指出 Clarke 等人^{[2], [3]}的广义预测控制适用于干扰噪声功率趋向无穷的 CARIMA 模型. 本文给出了一种基于 ARMAX 模型的广义预测控制器, 这种广义预测控制具有较强的稳健性 (Robustness). 文末给出了数字仿真例子.

一、引 言

1984年 Clarke, Mohtadi 和 Tuffs 从 CARIMA 模型出发导出了广义预测控制算法. 他们所作的数字仿真表明, 广义预测控制具有很好的稳健性^{[2], [3]}.

CARIMA 是 “Controlled Auto-Regressive Integrated Moving-Average” 的缩写, 可以译为 “受控自回归积分滑动平均模型”. 这个模型可以写成

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})e(t)/\Delta, \quad (1.1)$$

其中 A, B, C 是后移算符 q^{-1} 的多项式, $\Delta = 1 - q^{-1}$, $\{y(t)\}$, $\{u(t)\}$ 和 $\{e(t)\}$ 分别表示输出、输入和均值为零的白噪声序列. 如果系统滞时大于零, $B(q^{-1})$ 多项式领头的一项或几项系数等于零. Clarke 等人在推导广义预测控制时, 为了简单起见, 又令 $C(q^{-1}) = 1$, 于是 (1.1) 可写成

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + e(t)/\Delta. \quad (1.2)$$

下面叙述我们对于模型 (1.2) 的看法, 若令

$$e(t)/\Delta = v(t), \quad (1.3)$$

(1.2) 可写成

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + v(t), \quad (1.4)$$

这里 $v(t)$ 表示随机阶跃干扰, 在概率论中可看作 Brown 运动. 由 (1.3) 得

$$v(t) = v(t-1) + e(t), \quad (1.5)$$

(1.5) 式两边同乘 $v(t)$, 并取数学期望可得

$$R(t) = R(t, t-1) + \sigma^2, \quad (1.6)$$

其中 $R(t) = E v^2(t)$, $R(t, t-1) = E v(t)v(t-1)$, $E e^2(t) = \sigma^2$, “ E ” 表示数学期望运算.

(1.5) 式两边同乘 $v(t-1)$ 并取数学期望可得

$$R(t, t-1) = R(t-1). \quad (1.7)$$

由(1.6)和(1.7)得到

$$R(t) = R(t-1) + \sigma^2 = \dots = R(0) + t\sigma^2. \quad (1.8)$$

由(1.8)可知, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $R(t) \rightarrow \infty$. 这就是说, 系统模型中随机干扰的功率, 当 $t \rightarrow \infty$ 时趋向无穷大.

在本文中, 我们采用 Åström, Ljung, Goodwin 等人描述动态系统时常用的 ARMAX 模型. 本文导出了基于 ARMAX 模型的广义预测控制器, 并说明它具有稳健性的原因. 具体内容如下: 第二节归结基于 ARMAX 模型的预测控制问题; 第三节, 推导广义预测控制算法, 也就是广义预测控制问题求解过程; 第四节, 仿真例子; 第五节, 一些结论性看法.

二、广义预测控制问题

本文考虑由下列 ARMAX 模型给出的系统

$$A(q^{-1})y(t) = B(q^{-1})u(t-1) + C(q^{-1})e(t), \quad (2.1)$$

其中 A, B, C 分别为阶数是 n, m 和 n 的 q^{-1} 的多项式. 如果系统的滞时大于零, $B(q^{-1})$ 领头的一项或几项系数为零. 这里 $\{y(t)\}, \{u(t)\}, \{e(t)\}$ 与 (1.1) 中的说明一致.

在讨论基于模型 (2.1) 的广义预测控制时, 我们采用了下列增强系统稳健性 (Robustness) 的措施.

(一) 为了使控制过程平稳, 我们不要求系统输出 $y(t)$ 直接跟踪设定值 w , 而使对象输出 $y(t)$ 沿着参考轨迹到达设定值 w . 这就是文献 [1] 中所谓的“柔化”手段. 参考轨迹一般取作指数平滑形式

$$y_r(t+k) = \alpha^k y(t) + (1-\alpha^k)w, \quad (2.2)$$

这里 $y_r(t)$ 是参考轨迹, $0 < \alpha < 1$, w 是设定值. 容易看出, α 小, $y_r(t)$ 很快趋向 w , 这时控制系数跟踪的快速性好则稳健性差些; α 大, $y_r(t)$ 跟踪 w 的过程较长, 这些快速性差些而稳健性提高. 在实际应用中, 人们可以根据人们对控制系统的快速性要求与稳健性要求作适当的折衷.

(二) 在目标函数中考虑了现在时刻的控制 $u(t)$ 对系统将来输出的影响. 采用下列目标函数

$$J = E \left\{ \sum_{k=1}^N (y(t+k) - y_r(t+k))^2 + \sum_{k=1}^M \mu(k) u^2(t+k-1) \right\}, \quad (2.3)$$

其中 N 称为最大预测长度 (the maximum prediction horizon), N 一般应大于 $B(q^{-1})$ 的阶数, 或近似等于系统的上升时间. M 表示控制长度, 这里可选 $M = N$, 也可选 $M < N$. $\mu(k)$ 是大于零的权, 为简单起见取 $\mu(k) = \mu$ (常数).

广义预测控制问题, 可以归结为求出 $u(t), u(t-1), \dots, u(t+M-1)$ 使得目标函

数(2.3)达到最小值的问题。这是一个最优化问题。

三、极小化问题求解过程

先讨论 $M=N$ 的情形。根据 Åström^[4] 和 Ljung^[5] 等人的预测理论, 时刻 t 后的 j 步输出可表示为

$$y(t+j) = \frac{G_j}{C} y(t) + \frac{BF_j}{C} u(t+j-1) + F_j e(t+j), \quad (3.1)$$

这里 $F_j(q^{-1}) = f_{j0} + f_{j1}q^{-1} + \dots + f_{j, j-1}q^{-j+1}, f_{j0} = 1,$

$$G_j(q^{-1}) = g_{j0} + g_{j1}q^{-1} + \dots + g_{j, n-1}q^{-n+1}.$$

满足丢番(Diophantine)方程

$$C = AF_j + q^{-j}G_j, \quad (3.2)$$

这里我们省略了 $C(q^{-1}), F_j(q^{-1}), G_j(q^{-1})$ 表示式中的 q^{-1} , 而简记为 C, F_j, G_j . 由 [4] 可知, (3.1) 式右端的第一、二项与第三项统计独立. 由 (3.1) 可知

$$C = AF_k + q^{-k}G_k, \quad (3.3)$$

$$C = AF_{k+1} + q^{-k-1}G_{k+1}. \quad (3.4)$$

从 (3.4) 式中减去 (3.3) 式得

$$0 = A(F_{k+1} - F_k) + q^{-k}(q^{-1}G_{k+1} - G_k). \quad (3.5)$$

又因为 F_{k+1} 是 k 次多项式, 可令

$$F_{k+1} - F_k = \tilde{R} + r_k q^{-k}, \quad (3.6)$$

$\tilde{R}$ 是 $k-1$ 次多项式, A 的首项系数 $a_0 = 1$, 因此 (3.6) 右边第一项应不含 $q^0, q^{-1}, \dots, q^{-k+1}$ 次项, 否则与 (3.5) 矛盾. 于是

$$\tilde{R} = 0. \quad (3.7)$$

所以 $F_{k+1} = F_k + r_k q^{-k}. \quad (3.8)$

由 (3.6), (3.7) 和 (3.5) 可得

$$Ar_k q^{-k} + q^{-k}(q^{-1}G_{k+1} - G_k) = 0. \quad (3.9)$$

因此 $G_{k+1} = q(G_k - Ar_k), \quad r_k = g_{k,0}, \quad (3.10)$

这里 $g_{k,0}$ 是 G_k 的首项系数, 由 (3.10) 可得

$$g_{k+1,i} = g_{k,i+1} - a_{i+1}, \quad g_{k,i}, \quad i=0, 1, \dots, \deg G_{k+1}. \quad (3.11)$$

(3.8), (3.10) 和 (3.11) 给出了 F_k, G_k 的递推计算公式.

为了把 $y(t+k)$ 分解成与 $u(t), u(t+1), \dots, u(t+N-1)$ 有关的项及与 t 时刻前的 $u(k), k < t$ 有关的项, 令 $H_{k+1} = F_{k+1}B$, 那么

$$H_{k+1} = (F_k + r_k q^{-k})B = F_k B + r_k q^{-k}B = H_k + r_k q^{-k}B. \quad (3.12)$$

再利用丢番方程

$$H_k = CE_k + q^{-k}L_k, \quad k=1, \dots, N. \quad (3.13)$$

1 期

$$H_{k+1} = H_k + r_k q^{-k} B = C E_{k+1} + q^{-k-1} L_{k+1}. \quad (3.14)$$

因为

从 (3.14) 减去 (3.13) 得

$$q^{-k} r_k B = C(E_{k+1} - E_k) + q^{-k}(q^{-1} L_{k+1} - L_k). \quad (3.15)$$

 由于 E_{k+1} 是 k 次多项式, 可令

$$E_{k+1} - E_k = \tilde{E} + t_k q^{-k}. \quad (3.16)$$

 因为 C 是首 1 多项式, 又把 (3.16) 代入 (3.15) 得

$$r_k q^{-k} B = C \tilde{E} + t_k q^{-k} C + q^{-k}(q^{-1} L_{k+1} - L_k). \quad (3.17)$$

可知

$$\tilde{E} = 0. \quad (3.18)$$

于是 (3.17) 变为

$$r_k q^{-k} B = q^{-k}(q^{-1} L_{k+1} + t_k C - L_k). \quad (3.19)$$

由此得

$$L_{k+1} = q(L_k + r_k B - t_k C). \quad (3.20)$$

于是有

$$t_k = b_0 r_k + l_{k,0} \quad (3.21)$$

 和 $l_{k+1,i} = l_{k,i+1} + b_{i+1} r_k - t_k C_{i+1}, i=0,1,\dots, \deg L_{k+1},$

$$(3.22)$$

 这里 $l_{k+1,i}, l_{k,i}$ 分别表示 L_{k+1} 和 L_k 中 q^{-i} 项的系数。加上初始条件, 最后获得一组递推公式

$$F_1 = 1, g_{1,i} = c_{i+1} - a_{i+1}, i=0, \dots, n-1, \quad (3.23a)$$

$$H_1 = B, E_1 = b_0, L_1 = q(B - b_0 C), \quad (3.23b)$$

$$G_1 = q(C - A), r_k = g_{k,0}, \quad (3.23c)$$

$$g_{k+1,i} = g_{k,i+1} - a_{i+1} r_k, i=0,1,\dots, \deg G_{k+1}, \quad (3.23d)$$

$$E_{k+1} = E_k + t_k q^{-k}, t_k = b_0 r_k + l_{k,0}, \quad (3.23e)$$

$$l_{k+1,i} = l_{k,i+1} + b_{i+1} r_k - t_k C_{i+1}, i=0,1,\dots, \deg L_{k+1}, \quad (3.23f)$$

$$L_k = l_{k,0} + l_{k,1} q^{-1} + \dots + l_{k,n'-1} q^{-n'+1}. \quad (3.23g)$$

利用公式 (3.23), 极小化 (2.3) 等价于极小化下列目标函数

$$J' = (Eu + f - W)^T (Eu + f - W) + \mu u^T u, \quad (3.24)$$

其中

$$u^T = (u(t), u(t+1), \dots, u(t+N-1)),$$

$$E = \begin{pmatrix} b_0 & & & 0 \\ e_{2,1} & b_0 & & \\ e_{3,2} & e_{2,1} & b_0 & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \\ e_{N,N-1} & \dots & e_{2,1} & b_0 \end{pmatrix}, \quad (3.25a)$$

$$f = \begin{pmatrix} \frac{G_1}{C} y(t) + \frac{q^{-1} L_1}{C} u(t) \\ \frac{G_2}{C} y(t) + \frac{q^{-2} L_2}{C} u(t+1) \\ \dots \\ \frac{G_N}{C} y(t) + \frac{q^{-N} L_N}{C} u(t+N-1) \end{pmatrix}, \quad (3.25b)$$

$$W^T = (y_r(t+1), \dots, y_r(t+N)). \quad (3.26)$$

(3.27) 关于 u 求导, 并令它等于零, 可得

$$2E^T(Eu + f - W) + 2\mu Iu = 0, \quad (3.27)$$

其中 I 是 $N \times N$ 单位阵. 由此可得

$$u = (E^TE + \mu I)^{-1}E^T(W - f). \quad (3.28)$$

设 $\bar{g}^T$ 是矩阵 $(E^TE + \mu I)^{-1}E^T$ 的第一行, 那么

$$u(t) = \bar{g}^T(W - f). \quad (3.29)$$

注意: 在考虑控制作用时使用了目标函数 (3.24), 那是为了增强稳健性. 然而, 在实际应用时, 只用一步控制律 (3.29). 对于控制长度 $M < N$ 的情形, 可套用 [2] 的方法, 这里不赘述.

四、数字仿真例子

利用 (3.23), (3.25) 和 (3.29), 求下列非最小相位系统的广义预测控制:

$$y(t) - 1.5y(t-1) + 0.7y(t-2) = u(t-2) + 1.5u(t-3) + \lambda(e(t) + 0.2e(t-1)), \quad (4.1)$$

用 (2.2) 计算 $y_r(t+1), \dots, y_r(t+5)$. f 的分量记作 f_1, f_2, f_3, f_4, f_5 . 因为 (4.1) 是非最小相位的, 属于“复杂”系统, 因此取 $N=5, \mu=1, \lambda=0.1$. α 取不同的值. 计算得

$$f'_2 = Cf_2 = 1.85y(t) - 1.19y(t-1) + 3u(t-1) + 2.55u(t-2),$$

$$f'_3 = Cf_3 = 1.585y(t) - 1.295y(t-1) + 3.8u(t-1) + 2.775u(t-2),$$

$$f'_4 = Cf_4 = 1.0825y(t) - 1.1095y(t-1) + 3.6u(t-1) + 2.3775u(t-2),$$

$$f'_5 = Cf_5 = 0.51425y(t) - 0.75775y(t-1) + 2.748u(t-1) + 1.62375u(t-2).$$

广义预测控制律为

$$\begin{aligned} Cu(t) = & 0.1357(Cy_r(t+2) - f'_2) + 0.11457(Cy_r(t+3) - f'_3) \\ & + 0.20796(Cy_r(t+4) - f'_4) - 0.09339(Cy_r(t+5) - f'_5). \end{aligned}$$

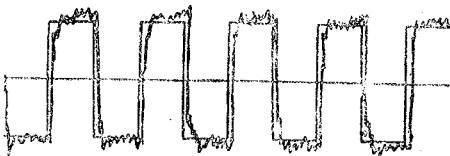


图 1 $\alpha = 0.5$

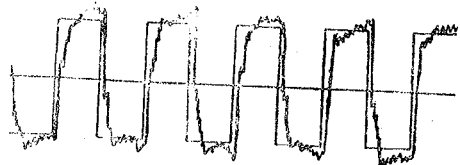


图 2 $\alpha = 0.7$

α 的值不同, $y_r(t+j)$, $j=2,3,4,5$ 的值也不同. 我们取 $\alpha=0.5, 0.7, 0.9$ 作计算机仿真, 使过程输出跟踪周期为 80 的方波. 下面三个图都是非最小相位系统广义预测控制输

出跟踪的情况。

从数字仿真的例子看, α 越大 (如 $\alpha = 0.9$) 超调将消失, 稳健性增强, 但跟踪速度降低 (如图3)。

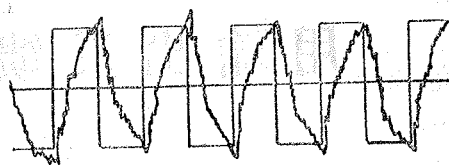


图 3 $\alpha = 0.9$

五、结 论

从构造预测控制器的原理 (2.2) 式和 (2.3) 式以及数字仿真的结果来看, 基于 ARMAX 模型的广义预测控制是一种适于在计算机上实现的数字控制算法, 有较强的稳健性。当模型参数未知时, 利用“确定等价原理”, 可把它写成自适应控制的形式。但一般说来, 这样不能导致一致估计及性能指标的极小化。这是需要进一步研究的问题。

致谢 本文写作过程中曾与谢贤亚副教授, 席裕庚副教授及裘子扬老师进行过有益的讨论, 由于他们的意见使本文得以改进, 特此致谢。

参 考 文 献

- [1] 席裕庚、张钟俊, 一类新型计算机控制算法: 预测控制算法, 控制理论与应用, 2, 3, (1985), 1-9.
- [2] Clarke, D.W., C. Mohtadi, P.S. Tuffs, Generalized Predictive Control, Part 1. The Basic Algorithm; Part 2. Extensions and Interpretations. O.U.E. Report 5155/84; 1557/84, Rept. of Engr. Sci. Oxford, (1984).
- [3] Clarke, D.W., C. Mohtadi, P.S. Tuffs, Self Tuning Control of a Difficult Process, 7th IFAC/IFORS Symp. on Ident. and Sys. Parameter Est. York, UK. Preprints, (1985), 1009-1014.
- [4] Åström, K.J. 著, 潘裕焕译, 随机控制理论导论, 科学出版社, 北京, (1983), 第六章.
- [5] Ljung, L. and T. Söderström, Theory and Practice of Recursive Identification, MIT Press, (1983).

Generalized Predictive Control Based on an ARMAX Model

Yuan Zhendong

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai)

Abstract

The generalized predictive control based on the CARIMA model has recently been developed by Clarke and his co-workers. However the noise power of the CARIMA process tends to infinity as t tends to infinity. Hence we have developed a new predictive controller based on the ARMAX model. The new predictive controller is robust enough. Some numerical illustrations are given.