第5卷 第1期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.1
1988年3月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　March, 1988

用输出反馈配置鲁棒极点*

周其节　　龙志扬

（华南工学院自动化系，广州）

摘　　要

本文讨论了线性定常多变量系统在时域上用输出反馈配置鲁棒极点的问题.用输出反馈配置极点时，有一些自由度，可以利用这些自由度指定特征向量。本文给出一种数值方法，它用于选择一组尽可能正交的特征向量，使闭环系统矩阵 $A+BKC$ 尽可能接近正规，从而使闭环极点对于矩阵的系数变化是鲁棒的。

一、引　　言

系统综合指标的形式之一可以取为 s 平面上给出的一组希望的极点。然而，设置同一组指定闭环极点，状态反馈阵或输出反馈阵可能不是唯一的，有一些可供选择的自由参数[1][2]。〔1〕研究了在全状态反馈下，利用这设计自由度，指定一组尽可能正交的特征向量，从而使得在系统矩阵、控制矩阵、状态反馈矩阵的参数同时变化时，所配置的闭环极点是不敏感的。将此方法推广到输出反馈的情况是目前正在研究的课题[1]。本文就此问题作了初步的探讨，推导出当系统矩阵、反馈矩阵、控制矩阵和输出矩阵同时变化时，所配置的极点是不敏感的综合算法。

二、输出反馈配置鲁棒极点

考虑完全能控、能观的线性定常多变量系统

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t),$$
$$y(t)=Cx(t)。$$

$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times m}$，$C\in R^{l\times n}$，不失一般性，设B是列满秩，C是行满秩，从输出 y 引线性反馈到输入，得闭环系统状态方程

$$\dot{x}(t)=(A+BKC)x(t)+Bv(t),$$

其中，$K\in R^{m\times l}$，〔3〕已证明，当满足

$$n\leq(m+l-1) \tag{2.1}$$

和某些条件时，闭环系统的极点可以配置。对于完全能控、完全能观的系统，总可以通

*本项目得到高等学校博士学科点专项科研基金资助。

本文于1986年12月13日收到，1987年9月15日收到修改稿。

过附加一个适当阶数的动态补偿器，使扩大阶数后的系统满足（2.1）的要求，所以，在后面的讨论中，不妨假设关系式（2.1）成立。

如果矩阵$A+BKC$是正规矩阵，则其特征值对于矩阵参数变化不敏感，其相应的特征向量$x_1,\cdots,x_n$相互正交[4]。配置鲁棒极点就是对给定的一组特征值$\{\lambda_i,\ i=1,\cdots,n\}$，利用设计自由度，寻找一组尽可能正交的特征向量，从而使$A+BKC$尽可能接近正规。特征向量相互正交的程度，可用测度[1]

$$\nu=n^{-1/2}\|X^{-1}\|_F, \tag{2.2}$$

其中，$\|\cdot\|_F$为Frobenius范数；$X=[x_1,\cdots,x_n]$；$\|x_i\|_2=1$，$i=1,\cdots,n$，来衡量。

选择特征向量是特征结构配置问题，〔2〕给出了可配置的充要条件，但存在中间变量，对于如何选择特征向量不能给出明确的提示。为此，本文在〔2〕的基础上，给出输出反馈特征结构可配置的另一形式。

命题 2.1 给定$A\in R^{n\times n},B\in R^{n\times m}$，$C\in R^{l\times n}$，其中$B$是列满秩，$C$是行满秩，$\{\lambda_i,\ i=1,\cdots,n\}$是一组互不相同的特征值（复特征值以共轭对出现），则存在一实矩阵K，使$(A+BKC)x_i=\lambda_i x_i$，$i=1,\cdots,n$，当且仅当下面条件同时满足

i)特征向量$\{x_i,i=1,\cdots,n\}$在C^n中是线性独立；

ii)当$\lambda_i=\overline{\lambda}_j$时，则$x_i=\overline{x}_j$；

iii)$x_i\in\mathbf{N}\{(B^{\perp})^T(\lambda_i I-A)\}$；

iv)$\operatorname{rank}\begin{bmatrix} z_1,\cdots,z_n \\ Cx_1,\cdots,Cx_n \end{bmatrix}=l$。

其中，$z_i=(B\ \ B)^{-1}B^T(\lambda_i I-A)x_i$；$B^{\perp}$是$B$的值空间$\mathbf{R}(B)$的正交补空间的正交基。

命题 2.2 设矩阵$G\in R^{n\times n}$，$F\in R^{n\times m}$且F列满秩，记$F^{\perp}$是F的值空间$\mathbf{R}(F)$正交补空间的正交基，n维向量$\nu\in\mathbf{N}\{(F\ \ )\ G\}$，当且仅当存在$m$维向量$\omega$，使

$$\begin{bmatrix} \nu \\ \omega \end{bmatrix}\in\mathbf{N}\{G\ \vdots\ -F\}. \tag{2.3}$$

而且，$\omega=(F^TF)^{-1}F^TG\nu$。

证 （充分性）由条件得$G\nu-F\omega=\mathbf{0}$等式两边同乘$(F\ \ )^T$，由F的定义得$(F^{\perp})^TG\nu=\mathbf{0}$，从而得证（2.3）式；（必要性）由$\nu\in\mathbf{N}\{(F^{\perp})^TG\}\Rightarrow G\nu\in\mathbf{N}\{(F^{\perp})^T\}$，由$F^{\perp}$的定义和$F$是列满秩的条件，有$\mathbf{N}\{(F^{\perp})^T\}=\mathbf{R}(F)$，所以，$G\nu\in\mathbf{R}(F)$，于是必有一个$m$维向量$\omega$使$G\nu-F\omega=\mathbf{0}$，而且$\omega=(F^TF)^{-1}F^TG\nu$。

命题2.1的证明很容易由命题2.2和文献〔2〕中的定理推得，在此省略。配置鲁棒极点的问题就是在子空间$\mathbf{N}\{(B\ \ )^T(\lambda_i I-A)\}$中选择特征向量$x_i$（该子空间的维数为$m^{\ 1}$），使（2.2）定义的测度$\nu$取最小值。

三、配置鲁棒极点的数值算法

设$X=[x_1,\cdots,x_n]$是已知的对应于特征值$\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}$的特征向量组，先固定某些特

征向量，然后，在满足命题2.1的条件下修正未固定的特征向量，使（2.2）式取最小，反复地改变被固定的特征向量，直至（2.2）式收敛某一值，则计算结束。

为叙述方便，不妨假设被固定的特征向量是X中后面的$n-k$个向量，记$X_k=[x_{n-k+1},\cdots,x_n]$，$Z_k=[z_{n-k+1},\cdots,z_n]$；$Z=[z_1,\cdots,z_n]$，其中$z_i=(B^TB)^{-1}B^T(\lambda_iI-A)x_i$，$i=1,\cdots,n$。$C$的秩是$l$，设存在某最小的$k$，使$\mathrm{rank}[CX_k]=l-1$，此时，$x_1,\cdots,x_k$可以在满足一定的条件下自由选择。

事实上，如果假设S_i是空间$\mathrm{N}\{(B^\perp)^T(\lambda_iI-A)\}$的标准正交基，$i=1,\cdots,n$，由命题2.1得$x_i=S_i\omega_i$，$S_i\in C^{n\times m}$，$i=1,\cdots,k$，记

$$\begin{pmatrix} CS_i \\ (B^TB)^{-1}B^T(\lambda_iI-A)S_i \end{pmatrix}=F_i\in C^{(m+l)\times m},\tag{3.1}$$

由命题2.1条件iv)有$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} CX_k \\ Z_k \end{bmatrix}=\mathrm{rank}[CX_k]=l-1$，对$\begin{bmatrix} CX_k \\ Z_k \end{bmatrix}$做$QR$分解[4]

$$\begin{bmatrix} CX_k \\ Z_k \end{bmatrix}=[Q_{xzk},\ q_{xzk}]\begin{bmatrix} R_{xzk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},\tag{3.2}$$

其中$Q_{xzk}\in C^{(m+l)\times(l-1)}$；$q_{xzk}\in C^{(m+l)\times(m+1)}$，$R_{xzk}\in C^{(l-1)\times(n-k)}$是行满秩，由命题2.1 iv)，（3.1），（3.2）有

$$\mathrm{rank}\left[F_1\omega_1,\cdots,F_k\omega_k\ \middle|\ \begin{matrix} CX_k \\ Z_k \end{matrix}\right]=\mathrm{rank}\begin{bmatrix} Q^T_{xzk}\ [F_1\omega_1,\cdots,F_k\omega_k] & R_{xzk} \\ q^T_{xzk}\ [F_1\omega_1,\cdots,F_k\omega_k] & \mathbf{0} \end{bmatrix}=l.\tag{3.3}$$

令$G_i=q^T_{xzk}F_i,i=1,\cdots,k$,(3.3)成立，当且仅当$\mathrm{rank}[G_1\omega_1,\cdots,G_k\omega_k]=1$。由$k$的最小性，很容易证明$G_i\in C^{(m+1)\times m},i=1,\cdots,k$是列满秩矩阵，所以，必存在$k-1$个非零常数$t_2,\cdots,t_k$使下式成立：

$$t_iG_1\omega_1=G_i\omega_i,\quad i=2,\cdots,k.\tag{3.4}$$

上式有解的充要条件为$q^T_{Gi}G_1\omega_1=0$，$i=2,\cdots,k$，q_{Gi}由G_i的QR分解决定：

$$G_i=[Q_{Gi}\quad q_{Gi}]\begin{bmatrix} R_{Gi} \\ 0 \end{bmatrix}\qquad i=2,\cdots,k,$$

其中，$Q_{Gi}\in C^{(m+1)\times m}$；$q_{Gi}\in C^{(m+1)\times 1}$，$R_{Gi}\in C^{m\times m}$是非奇异阵。设$N_i$是$q^T_{Gi}G_1\in C^{1\times m}$的零空间的正交基，则

$$\omega_1\in\bigcap_{i=2,\cdots,k}\mathrm{span}\{N_i\}.\tag{3.5}$$

当ω_1满足（3.5）时，满足（3.4）的ω_i为

$$\omega_i = t_i D_i \omega_1,\quad D_i = (G_i^T G_i)^{-1} G_i^T G_1\ ,\qquad i = 2,\cdots,k. \tag{3.6}$$

由于满足（3.5）、（3.6）的 $\omega_1,\cdots,\omega_k$ 不是唯一的，所以 $x_i = S_i\omega_i$ 的选择也不是唯一的。

由（2.2）有：

$$\nu = n^{-1/2}\|[S_1\omega_1,\cdots,S_k\omega_k \mid X_k]^{-1}\|_F,$$
$$\|\omega_i\|_2 = 1,\quad i = 1,\cdots,k. \tag{3.7}$$

记 $[S_1\omega_1,\cdots,S_k\omega_k] = SW_k$，$X_k$ 有 QR 分解式

$$X_k = [Q_{xk}\quad q_{xk}]\begin{bmatrix} R_{xk} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \tag{3.8}$$

其中，$Q_{xk}\in C^{n\times(n-k)}$；$q_{xk}\in C^{n\times k}$，$R_{xk}\in C^{(n-k)\times(n-k)}$ 是非奇异阵，

$$\|X^{-1}\|_F = \left\| \begin{bmatrix} Q_{xk}^T SW_k & R_{xk} \\ q_{xk}^T SW_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} \right\|_F. \tag{3.9}$$

由（3.8）知，$\mathrm{span}\{x_{k+1},\cdots,x_n\}$ 的正交补空间由 q_{xk} 所张成，而 $S_1\omega_1,\cdots,S_k\omega_k$，$x_{k+1},\cdots,x_n$ 都是特征向量，它们线性独立，很容易证明，$q_{xk}^T SW_k$ 是可逆阵，而且

$$\begin{bmatrix} Q_{xk}^T SW_k & R_{xk} \\ q_{xk}^T SW_k & \mathbf{0} \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & (q_{xk}^T SW_k)^{-1} \\ R_{xk}^{-1} & -R_{xk}^{-1} Q_{xk}^T SW_k (q_{xk}^T SW_k)^{-1} \end{bmatrix}.$$

由（3.7）、（3.9）和上式得

$$\nu = n^{-1/2}\{\|R_{xk}^{-1}\|_F^2 + \|q_{xk}^T SW_k)^{-1}\|_F^2 + \|R_{xk}^{-1} Q_{xk}^T SW_k (q_{xk}^T SW_k)^{-1}\|_F^2\}.$$

将（3.5）、（3.6）代入上式，上式取最小值归结为下面具有非线性约束的非线性优化问题：

$$\min_{\omega_1} \|(q_{xk}^T T)^{-1}\|_F^2 + \|R_{xk}^{-1} Q_{xk}^T T (q_{xk}^T T)^{-1}\|_F^2, \tag{3.10}$$

其中，$T = [S_1\omega_1,\ t_2 S_2 D_2\omega_1,\cdots,t_k S_k D_k\omega_1]$，约束为

$$\omega_1 \in \bigcap_{i=2,\cdots,k} \mathrm{span}\{N_i\};\qquad \|\omega_1\|_2 = 1$$

$$t_i^2 = \|D_i\omega_1\|_2^{-2},\qquad i = 2,\cdots,k.$$

当 $k=1$ 时，问题可进一步简化为求解线性最小二乘问题，此时（3.10）简化为

$$\min_{\|\omega_1\|_2=1} \rho^2 + \|R_{x1}^{-1} Q_{x1}^T S_1\omega_1\rho\|_2^2 = \min_{\omega_1} \left\| \begin{pmatrix} R_{x1}^{-1} Q_{x1}^T S_1 \\ I_m \end{pmatrix} \rho\omega_1 \right\|_2^2, \tag{3.11}$$

其中，$\rho^{-1}=q_{x1}^T S_1\omega_1$。

设有正交阵$\widetilde{P}$，使 $q_{x1}^T S_1=\sigma e_m^T\widetilde{P}=\sigma e_m^T[P \mid p]^T=\sigma p^T$，则有$\rho^{-1}=\sigma p^T\omega_1$，令$\widetilde{\omega}_1=P^T\omega_1/p^T\omega_1$，那么，$\rho\omega_1=\rho\widetilde{P}^T\widetilde{P}\omega_1=\sigma^{-1}[P\widetilde{\omega}_1+p]$，于是（3.11）等价于

$$\min_{\widetilde{\omega}_1}\left\|\begin{pmatrix}R_{x1}^{-1}Q_{x1}^T S_1\\ I_m\end{pmatrix}(P\widetilde{\omega}_1+p)\right\|_2^2. \qquad (3.12)$$

所求的x_1为

$$x_1=S_1\omega_1/\|\omega_1\|_2=S_1(\|\omega_1\|_2\rho)^{-1}\sigma^{-1}[P\widetilde{\omega}_1+p],$$

$$(\|\omega_1\|_2\rho)^2=\sigma^{-2}(\widetilde{\omega}_1^T\widetilde{\omega}_1+1).$$

当$k=2$时，问题可进一步简化为无约束非线性优化问题，此时，（3.10）简化为

$$\min_{\omega_1}\|\{q_{x2}^T[S_1\omega_1,\ t_2S_2D_2\omega_1]\}^{-1}\|_F^2+\|R_{x2}^{-1}Q_{x2}^T[S_1\omega_1,\ t_2S_2D_2\omega_1]$$

$$[q_{x2}^T(S_1\omega_1,\ t_2S_2D_2\omega_1)]^{-1}\|_F^2 \qquad (3.13)$$

约束。

$$t_2^2=\|D_2\omega_1\|_2^{-2}, \qquad (3.14)$$

$$\omega_1\in\operatorname{span}\{N_2\},\ \|\omega_2\|_2=1. \qquad (3.15)$$

记

$$q_{x2}^T[S_1\omega_1,\ t_2S_2D_2\omega_1]=\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}. \qquad (3.16)$$

$$R_{x2}^{-1}Q_{x2}^T S_1=B_1;\quad R_{x2}^{-1}Q_{x2}^T S_2=B_2.$$

很容易证明，（3.13）是t_2的偶函数，将（3.14）、（3.16）代入（3.13），再由ρ_{12}，ρ_{21}与ω_1的长度无关，去掉约束$\|\omega_1\|_2=1$将（3.15）的约束表为$\omega_1=N_2f$，（3.13）简化为关于f的非线性最小二乘问题：

$$\min_f\frac{1}{(\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}\rho_{21})^2}\Big\{(\rho_{11}^2+\rho_{21}^2)(1+\|D_2N_2f\|_2^{-2}\|B_2D_2N_2f\|_2^2)$$

$$+(\rho_{22}^2+\rho_{12}^2)\left\|\begin{pmatrix}B_1\\ I_m\end{pmatrix}N_2f\right\|_2^2-2(\rho_{11}\rho_{12}+\rho_{21}\rho_{22})\|D_2N_2f\|_2^{-1}(B_1N_2f)^TB_2D_2N_2f\Big\}$$

（3.17）

$$\begin{bmatrix}\rho_{11} & \rho_{12}\\ \rho_{21} & \rho_{22}\end{bmatrix}=q_{x2}^T[S_1N_2f,\ \|D_2N_2f\|_2^{-1}S_2D_2N_2f],$$

四、例

例 1　$$A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

指定闭环极点 $\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，取一组初始特征向量矩阵

$$[x_1,x_2,x_3]=\begin{bmatrix}0.577 & 0.577 & 0\\ -0.577 & -1.155 & 0\\ 0.577 & 0.667 & 1\end{bmatrix}.$$

此时鲁棒测度为$\nu=3.42$，反馈阵为

$$K=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 5 & -5\end{bmatrix},$$

经计算，最小 k 为1，按（3.12）计算结果为

$$[x_1',x_2',x_3']=\begin{bmatrix}0.577 & 0.424 & 0\\ -0.577 & -0.848 & 0\\ 0.577 & 0.318 & 1\end{bmatrix},\quad \nu'=3.1,\quad K'=\begin{bmatrix}-5 & -1\\ 6.25 & -5\end{bmatrix}.$$

例 2　$$A=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}2 & 0 & -4 & 5\\ 0 & -4 & 0 & 1\\ -1 & 1 & 0 & -1\end{bmatrix},$$

指定闭环极点$\lambda_1=-1$，$\lambda_2=-2$，$\lambda_3=-3$，$\lambda_4=-4$，取初始特征向量矩阵

$$X=\begin{pmatrix}-0.817 & 0 & -0.943 & -0.773\\ -0.408 & -0.696 & -0.236 & -0.463\\ 0.408 & 0.174 & -0.236 & -0.309\\ 0 & -0.696 & 0 & -0.309\end{pmatrix},\quad \nu=44.18$$

$$K=\begin{bmatrix}2.5 & 5 & 0\\ 2 & 5 & -4\\ -1 & -2 & 2\end{bmatrix},$$

经计算，最小 k 为 2，按（3.17）计算结果为

$$X'=\begin{pmatrix}-0.825 & -0.953 & -0.943 & -0.772\\ -0.027 & -0.261 & -0.236 & -0.463\\ 0.412 & 0.145 & -0.236 & -0.309\\ 0.357 & 0.056 & 0 & -0.309\end{pmatrix},$$

$$\nu' = 21.98, \qquad K' = \begin{bmatrix} 1.860 & 4.086 & 0.366 \\ 0.720 & 3.171 & -3.268 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

五、结 束 语

本文给出了输出反馈配置鲁棒极点的数值算法，它最终归结为具有非线性约束的非线性优化问题，并在两种情况下，将此问题分别简化为线性最小二乘问题和非线性最小二乘问题。

参 考 文 献

〔1〕 Kautsky, J., Nichols, N.K. and Van Dooren, P., Robust Pole Assignment in Linear State Feedback, Int. J. Control, 41,5,(1985), 1129-1155.

〔2〕 Sambandan, A. and Chandrasokharan, P.C., Eigenvector Assignment Using Output Feedback, Int. J. Control, 34, 6, (1981), 1143-1152.

〔3〕 Davison, E.J. and Wang, S. H., On Pole Assignment in Linear Multivariable Systems Using Output Feedback, IEEE Trans. Automat. Control, AC-20, (1975), 516-518.

〔4〕 Wilkinson, J. H., The Algebraic Eigenvalue Problem, London, England; Oxford University Press, (1965).

Robust Pole Assignment by Output Feedback

Zhou Qijie, Long Zhiyang

(Department of Automatic Control, South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

In this paper, the problem concerning robust pole assignment by output feedback in time-domain is discussed. For a linear time-invariant multivariable system, there will be some degrees of design freedom in pole assignment by output feedback. We can use this design freedom to specify closed-loop eigenvectors. This paper gives a numerical method which is used to select a set of eigenvectors as possible as orthogonal in order to make closed-loop matrix A+BKC approach normal as possible. Therefore, the closed-loop poles are robust to the variation in parameters of the matrix.