第5卷 第1期
1988年3月
控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS
Vol.5, No.1
March, 1988

关于非线性力学系统的优化与全局线性化

高为炳　　吴东南
（北京航空学院应用数理系）

摘　　要

本文研究了非线性力学系统的优化与全局线性化问题。对于选定的一种具体的但相当一般的指标函数，提出了两个定理，证明了相对控制变量、或加速度变量、或变换后的控制变量进行优化的等价性。同时证明了先对非线性力学系统进行线性化然后再进行优化，所得结果与直接对非线性系统进行优化得到的结果是一样的。另外，文中还比较了在研究机器人操作器的控制问题中提出的一些非线性方法，得到的结果说明，虽然这些非线性方法是完全不同的，但若闭环系统是线性的，那么所建立的控制规律是相同的。

一、前　　言

近来在研究机器人、直升机、飞机等的控制问题中遇到的都是强非线性的控制方程。在这些领域中，除了需要解决所熟知的稳定性、振动控制、动力学方程建立等问题外，还需要解决诸如点—点控制、跟踪、力控制等问题。许多现代控制理论的方法已被发展应用来解决这些问题。Luo 和 Saridis[1]在应用最优控制理论来研究机器人的控制问题中，提出了一种新的二次型指标。与一般的二次型指标不同，它依赖系统的加速度变量而不是控制变量。

在这种指标下，本文证明了系统相对控制向量、加速度向量、通过状态反馈变换后的控制向量三者优化的等价性。这一结果的意义在于，我们可以将非线性系统的优化问题转化为对非线性系统线化后得到的线性系统的优化问题。

关于机器人的控制问题，人们已提出了许多设计方法，如逆动力学方法[2-4]，变结构方法[5]，自适应方法[6,7]，大范围线性化与解耦方法[8-10]，Liapunov方法[11]等等。但值得注意的是，尽管所用方法不同，但如果得到的闭环系统是线性的话，则控制规律是等价的。

二、问 题 的 叙 述

考虑如下非线性力学方程

$$\mathbf{M}(\mathbf{q},t)\ddot{\mathbf{q}}+\mathbf{N}(\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)=\mathbf{B}(\mathbf{q},t)\mathbf{u}, \tag{1}$$

其中 $\mathbf{q}$ 为 $n\times 1$ 维广义坐标向量，$\mathbf{u}$ 为 $n\times 1$ 维控制向量。引入

本文于 1987 年 1 月 27 日收到。1987 年 10 月 28 日收到修改稿。

$$x = [x_1^T, x_2^T]^T = [q^T, \dot{q}^T],$$

则（1）式可写为

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = f_2(x,t) + g(x,t)u。 \qquad (2)$$

这里

$$f_2(x,t) = -M^{-1}(x,t)N(x,t),$$
$$g_2(x,t) = M^{-1}(x,t)B(x,t)。$$

假设$g_2(x,t)$为$n\times n$维矩阵，其在某包含$x=0$点的区域内非奇。为简洁起见，今后将略写函数的自变量。

文[2]、[3]表明，在状态反馈控制

$$u = g_2^{-1}(-f_2 - Kx) \qquad (3)$$

下，系统变为如下系统

$$\dot{x} = Ax, \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & I \\ & K \end{bmatrix}, \qquad K \in R^{n\times 2n}. \qquad (4)$$

考虑如下优化指标：

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_f)Gx(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[x^T Q(t)x + \dot{x}_2 R_0(t)\dot{x}_2]dt, \qquad (5)$$

其中$G\geq 0$，$Q(t)\geq 0$，$R_0(t)>0 \quad \forall t\geq t_0$。式（5）中被积函数的第二项是加速度$\dot{x}_2$的二次型，而不是通常指标中的控制向量的二次型。我们知道，加速度与力成正比，从而上述指标具有与通常使用的指标有相近的物理意义。

对于指标（5），我们考虑三个问题：

问题 1　在约束（2）下，求控制u使得指标（5）最小。

问题 2　考虑状态反馈

$$u = \overline{u}(x,t) + \overline{B}(x,t)v, \qquad (6)$$

其中$\overline{u}(x,t)$为已知，$\overline{B}(x,t)$为已知非奇矩阵，而v为一新的控制向量.（2）式化为

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = f_2 + g_2\overline{u} + g_2\overline{B}_2 v, \qquad (7)$$

求v，使得指标（5）相对v最小。

问题 3　求指标(5)相对$\dot{x}_2$的最小值。

在下一节中，我们将讨论这三个优化问题的相互关系.

三、优 化 问 题

定理 1　对系统（2）若下列极小值存在

$$(1)\ \min_{\dot{x}_2} J, \qquad (2)\ \min_{u} J, \qquad (3)\ \min_{v} J$$

而相对应得到的控制为

（1）u^{**}，（2）u^{*}，（3）v^{*}

则有 $u^{*}=u^{**}$，$v^{*}=\overline{B}^{-1}(u^{*}-\overline{u})$。（8）

证 Hamilton－Jacobi方程可写为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\min_{w}H\left(x,w,\frac{\partial V}{\partial x},t\right)=0, \tag{9}$$

其中 $H=\frac{1}{2}x^{T}Qx+\frac{1}{2}\dot{x}_{2}^{T}R_{0}\dot{x}_{2}+\dot{x}^{T}\frac{\partial V}{\partial x}$。（10）

而 w 在三种情况下分别表示 $\dot{x}_2$，u，v。

情况（1） $w=\dot{x}_2$

从方程（9）得知 $\frac{\partial H}{\partial \dot{x}_2}=0$，从而

$$R_0\dot{x}_2+\frac{\partial V}{\partial x_2}=0。 \tag{11}$$

推出 $R_0(f_2+g_2u)+\frac{\partial V}{\partial x_2}=0$，（12）

有

$$u^{**}=g_2^{-1}\left(-f_2-R_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right), \tag{13}$$

从而（9）式变为

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}x^{T}Qx+\frac{1}{2}\frac{\partial V^{T}}{\partial x_2}R_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial x_2}+x^{T}\frac{\partial V}{\partial x}=0。 \tag{14}$$

情况（2） $w=u$

从方程（2）知

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u}=g_2。 \tag{15}$$

由（9）式推出

$$\frac{\partial \dot{x}_2}{\partial u}R_0\dot{x}_2+\frac{\partial \dot{x}}{\partial u}\frac{\partial V}{\partial x}=0。 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \quad g_2R_0(f_2+g_2u)+g_2\frac{\partial V}{\partial x_2}=0, \tag{17}$$

$$\Rightarrow \quad u^{*}=g_2^{-1}\left(-f_2-R_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial x_2}\right)。 \tag{18}$$

将（18）式代入（9）式后，我们有

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}\mathbf{R}_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}+\mathbf{x}^T\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=0。\tag{19}$$

情况（3）　$\mathbf{w}=\mathbf{v}$

由方程（2）与（9）知

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}=\mathbf{0},\qquad \frac{\partial \dot{\mathbf{x}}_2}{\partial \mathbf{v}}=\overline{\mathbf{B}}\mathbf{g}_2,$$

从而

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{v}}=\overline{\mathbf{B}}\mathbf{g}_2\mathbf{R}_0\dot{\mathbf{x}}_2+\overline{\mathbf{B}}\,\mathbf{g}_2\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}=0。$$

$$\Rightarrow\qquad \mathbf{v}^*=\overline{\mathbf{B}}^{-1}\left[\mathbf{g}_2^{-1}\left(-\mathbf{f}_2-\mathbf{R}_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}\right)-\overline{\mathbf{u}}\right]。\tag{20}$$

将（20）式代入（9）式，得

$$\frac{\partial V}{\partial t}+\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{Q}\mathbf{x}+\frac{1}{2}\frac{\partial V^T}{\partial \mathbf{x}_2}\mathbf{R}_0^{-1}\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}+\mathbf{x}^T\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}}=0.\tag{21}$$

上述结果表明，在三种情况下，我们得到相同方程（14）、（19）、（21），并且它们有相同的边界条件：$V(t_f)=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T(t_f)\mathbf{G}\mathbf{x}(t_f)$，从而给出相同的解 V。

对比三种情况中的控制规律有

定理 2　使指标（5）最小的最优控制

$$\mathbf{u}^*=\mathbf{g}_2^{-1}(-\mathbf{f}_2-\mathbf{R}_0^{-1}[\mathbf{P}_{21}(t)\mathbf{x}_1+\mathbf{P}_{22}(t)\mathbf{x}_2]),\tag{22}$$

其中

$$\dot{\mathbf{P}}(t)+\mathbf{Q}(t)+\mathbf{P}(t)\mathbf{S}\mathbf{P}(t)+\mathbf{F}^T\mathbf{P}(t)+\mathbf{P}^T\mathbf{F}=0,\tag{23}$$

$$\mathbf{P}(t)=\begin{bmatrix}\mathbf{P}_{11}(t) & \mathbf{P}_{12}(t)\\ \mathbf{P}_{21}(t) & \mathbf{P}_{22}(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{S}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{R}_0^{-1}(t)\end{bmatrix},\quad \mathbf{F}=\begin{bmatrix}0 & I\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

证　设方程（21）的解为 $V=\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$，$\mathbf{P}(t)>0$，则（21）式化为

$$\mathbf{x}^T(\dot{\mathbf{P}}+\mathbf{Q}+\mathbf{P}^T\mathbf{F}+\mathbf{F}^T\mathbf{P})\mathbf{x}+\mathbf{x}_2^T\mathbf{P}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{P}\mathbf{x}_2=0,$$

由此得式（23）。并且

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_2}=\mathbf{P}_{21}(t)\mathbf{x}_1+\mathbf{P}_{22}(t)\mathbf{x}_2。\tag{24}$$

将其代入（18）式即得最优控制（22）式。

四、应　　用

假设非线性状态反馈（6）将方程（2）变换为

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = Kx + Dv. \tag{25}$$

根据定理1，在指标（5）下对方程（2）求最优可以转化为对方程（25）求最优，并且

$$u^* = \overline{u} + \overline{B}v^*. \tag{26}$$

将上述结果应用于如下机器手动力学方程：

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) = u, \tag{27}$$

其中 q 为广义坐标向量，M(q)为惯性阵。假设机器手的期望运动为 $q^d(t)$，令

$$e = [(q^d - q)^T, (\dot{q}^d - \dot{q})^T]^T = [e_1^T, e_2^T]^T, \tag{28}$$

则（27）可化为

$$\dot{e}_1 = e_2, \qquad \dot{e}_2 = \ddot{q}^d + M^{-1}(N + G) - M^{-1}u. \tag{29}$$

现在我们考虑如下优化问题：在指标

$$J = \frac{1}{2}e^T(t_f)Ge(t_f) + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_f}[e^TQe + \dot{e}_2^T R_0 \dot{e}_2]dt \tag{30}$$

下，对约束（29）求 u 使 J 最小。

用非线性状态反馈

$$u = N + G + M\ddot{q}^d - Mv, \tag{31}$$

可将方程（29）线化为

$$\dot{e}_1 = e_2, \qquad \dot{e}_2 = v. \tag{32}$$

我们知道上式对指标（30）的最优控制为

$$v^* = R_0^{-1}P_{21}e_1 + R_0^{-1}P_{22}e_2, \tag{33}$$

从而 $$u^* = N + G + M\ddot{q}^d - MR_0^{-1}[P_{21}e_1 + P_{22}e_2], \tag{34}$$

这一结果与文[1]中结果相吻合。

五、非线性方法的等价性

最近几年中，针对如下方程

$$M(q)\ddot{q} + N(q, \dot{q}) + G(q) = u \tag{35}$$

描述的机器手控制问题，提出了好几种方法。值得指出的是这些方法在一定意义上是等价的。在以下讨论中，设 $q^d(t)$为机器手的期望运动，令 $e = q^d - q$。

（1）预算力矩法[2]

文[2]中提出如下控制方案：

$$u = M_c(t)(\ddot{q}^d + K_v\dot{e} + K_pe) + N_c(t) + G_c(t), \tag{36}$$

其中 $M_c(t) = M(q^d)$，$G_c(t) = G(q^d)$，$N_c(t) = N(q^d, \dot{q}^d)$。

在假设 $M(q)=M_c(t)$，$N(q,\dot{q})=N_c(t)$，$G(q)=G_c(t)$下，方程（35）变为

$$\ddot{e}+K_v\dot{e}+K_pe=0。\tag{37}$$

（2）非线性状态反馈线性化方法[3-4]

令

$$u=M(\ddot{q}^d+K_v\dot{e}+K_pe)+N+G,\tag{38}$$

并代入（35）式得

$$\ddot{e}+K_v\dot{e}+K_pe=0。\tag{39}$$

此方程与（37）完全一样。这两种情况中，控制方案不同之处仅在于 $M(q)$，$N(q,\dot{q})$，$G(q)$的计算不同，前者用 q^d 代替 q，而后者则用实时测得的 q 值。

（3）非线性状态反馈线性化与解耦方法[8-10]

对于一般的控制系统

$$\begin{cases}\dot{x}=A(x,t)+B(x,t)u,\\ y=C(x,t)+D(x,t)u,\end{cases}\tag{40}$$

其中 $x\in R^n$，y、$u\in R^m$。引入控制规律

$$u=F(x,t)+G(x,t)v,\tag{41}$$

其中 $F(x,t)=-\overline{D}^{-1}(x,t)\overline{C}(x,t)+\overline{M}(x,t)$,

$$G(x,t)=\overline{D}^{-1}(x,t),$$

$$\overline{D}=[\overline{D}_1^T,\cdots,\overline{D}_m^T]^T\qquad \overline{D}_i=\begin{cases}D_i, & d_i=0\\ \left(\dfrac{\partial}{\partial x}N_A^{d_i-1}C_i\right)B, & d_i\neq 0,\end{cases}$$

$$d_i=\min\left\{j\,\middle|\,\left(\frac{\partial}{\partial x}N_A^{j-1}C_i\right)B\neq 0,\ j\in\underline{n}\right\},$$

$$N_A^kC_i=\frac{\partial}{\partial t}N_A^{k-1}C_i+\left(\frac{\partial}{\partial x}N_A^{k-1}C_i\right)A。$$

$\overline{C}(x,t)$，$\overline{M}(x,t)$的第 i 个元素为

$$\overline{C}_i=N_A^{d_i-1}C_i,\qquad \overline{M}_i=\begin{cases}0, & d_i=0\\ \sum\limits_{k=0}^{d_i-1}a_{k,i}N_A^kC_i, & d_i\neq 0\end{cases}$$

假设$\overline{D}^{-1}(x,t)$存在，则（41）式化为

$$y^{(d_i)}+A_{d_i-1}y^{(d_i-1)}+\dots+A_0y=w。\tag{42}$$

方程中系数阵 A_i 均为对角阵。

将上述结果应用于机器手控制方程

$$\dot{x}_1 = x_2, \qquad \dot{x}_2 = \overline{N}(x) + M^{-1}(x)u, \tag{43}$$

可以求出

$$d_i = 2, \qquad \overline{C} = \overline{N} = M^{-1}(-N+G),$$

$$\overline{D} = M, \qquad \overline{M} = A_0 x_1 + A_1 x_2,$$

$$u = N + G + M(-A_0 q - A_1 \dot{q} + w) \tag{44}$$

令 $w = A_0 q^d + A_1 \dot{q}^d + \ddot{q}^d$，有

$$u = N + G + M(A_0 e + A_1 \dot{e} + \ddot{q}^d), \tag{45}$$

$$\ddot{e} + A_1 \dot{e} + A_0 e = 0, \tag{46}$$

这与(38)、(39)式等价。

(4)李雅普诺夫方法

方程(35)可改写为

$$\ddot{e} = -M^{-1}(-N-G+u) + \ddot{q}^d \tag{47}$$

令 $w(e) = \frac{1}{2}e^T W e$，$v(e,\dot{e}) = \frac{1}{2}\dot{e}^T V \dot{e} + w(e)$，$W>0$，$V>0$，从而有

$$\dot{v}(e,\dot{e}) = -\dot{e}^T V \overline{u}, \tag{48}$$

其中 $\overline{u} = -M^{-1}(N+G-u) - \ddot{q}^d - V^{-1}\frac{\partial w}{\partial e}$。 (49)

设 $\overline{u} = A\dot{e}$，$A>0$，则有

$$u = M(A\dot{e} + V^{-1}We + \ddot{q}^d) + N + G, \tag{50}$$

$$\dot{v}(e,\dot{e}) = -\dot{e}^T \mathbf{Q}\dot{e}, \tag{51}$$

其中 $\mathbf{Q}$ 满足方程

$$VA + AV = \mathbf{Q}. \tag{52}$$

由于 $A>0$，从而 $\forall \mathbf{Q}>0$，方程有唯一正定解 $V>0$。方程(51)的右端虽然为半负定，但可以证明此时系统(47)是渐近稳定的。将式(50)代入(47)式有

$$\ddot{e} + A\dot{e} + A_0 e = 0, \tag{53}$$

其中 $A_0 = V^{-1}W$。显然这里得到的控制规律(50)与前面得到的是等价的。

考虑上述推导中常数阵的确定问题，选取任意 A，A_0，使其特征值实部为负，则 $\forall \mathbf{Q}>0$，由方程(52)可确定唯一 $V>0$。由于

$$V^{-1}W + WV^{-1} = A_0 + A_0^T, \tag{54}$$

从而可唯一确定 $W>0$。因此所有常数阵均可确定。

（5）变结构控制方法[5]

方程（35）可改写为

$$\dot{\mathbf{e}}=\mathbf{w}, \qquad \dot{\mathbf{w}}=\mathbf{f}(\mathbf{e},\mathbf{w},t)+\mathbf{B}(\mathbf{e},t)\mathbf{u}+\ddot{\mathbf{q}}^d. \tag{55}$$

定义 n 个函数

$$S_i(e_i,w_i,t)=w_i+c_{i1}e_i+c_{i0}\int e_i dt, \quad i\in \underline{n}, \tag{56}$$

其中 c_{i0}，c_{i1} 均为正数。假设在控制

$$u_i=\begin{cases} u_i^+(\mathbf{e},\mathbf{w},t), & \dot{S}_i>0 \\ u_i^-(\mathbf{e},\mathbf{w},t), & S_i<0 \end{cases} \tag{57}$$

下，在滑动面 $S_i(e_i,w_i,t)=0$，$i\in \underline{n}$ 上存在滑动运动，则系统（36）的运动将趋近线性系统

$$\ddot{e}_i+c_{i1}\dot{e}_i+c_{i0}e_i=0 \qquad i\in \underline{n} \tag{58}$$

的运动，并将最终与之重合。考虑滑动面上滑动运动，将（55）式代入（58）式，有

$$\mathbf{u}^*=\mathbf{N}+\mathbf{G}+\mathbf{M}(\ddot{\mathbf{q}}^d+\mathbf{c}_1\dot{e}+\mathbf{c}_0 e), \tag{59}$$

其中 $\mathbf{c}_1=\mathrm{diag}[c_{11},\cdots,c_{n1}]$，$\mathbf{c}_0=\mathrm{diag}[c_{10},\cdots,c_{n0}]$。这里得到的控制规律与前面四种情况中得到的结果完全等价。

五、结 论

通过上节中的比较，可以看出，在确定系统反馈规律时，尽管使用的方法不同，但只要闭环系统是线性的，则控制规律等价，而且可以选择成完全一样。事实上，控制规律由两部分组成：

$$\mathbf{u}=\mathbf{u}_1+\mathbf{u}_2,$$

其中 $\mathbf{u}_1=\mathbf{N}(\mathbf{q},\dot{\mathbf{q}})+\mathbf{G}(\mathbf{q})$对所有方法均一样。$\mathbf{u}_2=\mathbf{M}^{-1}(\mathbf{q})(\ddot{\mathbf{q}}^d+\mathbf{c}_1\dot{\mathbf{e}}+\mathbf{c}_0\mathbf{e})$在结构上对所有方法均为一样，不同之处仅在于 $\mathbf{c}_1$，$\mathbf{c}_0$ 的选取。这一结论也可以通过对一般非线性系统的理论研究而得到，见文[12]。

参 考 文 献

〔1〕 Luo, G. L., Saridis, G. N., Optimal/PID Formulation for Control of Robotic Manipulators, Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation, St. Louis, MI (1985), 621-626.

〔2〕 Bejczy, A. K., Robot Arm Dynamics and Control, Jet Propulsion Lab. Tech. Memo., (1974), 33-369.

〔3〕 Luh, J. Y. S., Walker, N. W., Paul, P. R. C., Resolved Acceleration Control of Mechanical Manipulators, IEEE Trans. Automatic Control, 25, 2, (1980), 468-474.

〔4〕 Whiteney, D. E., Resolved Motion Rate Control of Manipulators and Human Protheses, IEEE Trans. Man-Machine Systems, 10, 1, (1969), 47-53.

〔5〕 Slotine, J. J. E., Sastry, S. S., Tracking Control of Nonlinear Systems Using Sliding Surfaces with Application to Robot Manipulators, Int. J. Control, 38, 2, (1983), 465-492.

〔6〕 Dubowsky, S., DesForges, D. T., The Application of Model-Referenced Adaptive Control to Robotic Manipulators, ASME Trans. J.DSMC, 101,2, (1979), 193-200.

〔7〕 Lee, C. S. G., Chung M. J., Lee, B. H., Adaptive Control for Robot Manipulators in Joint and Cartesian Coordinates, Proc. Int. Conf. on Robotics and Automation, (1984), 530-539.

〔8〕 Freund, E., Fast Nonlinear Control with Arbitrary Pole-Placement for Industrial Robots and Manipulators, Int. J. Robotic Research, 1, 1, (1982), 65-78.

〔9〕 Porter, W. A., Diagonalization and Inverse for Nonlinear Systems, Int. J. Control, 11, 1, (1970), 67-74.

〔10〕 Sigh, S. M., Rugh, W. J., Decoupling of Nonlinear Systems by State Variable Feedback, ASME Trans. J,DSMC, 12, 4, (1972), 323-329.

〔11〕 Takegaki, M., Arimoto, S., A New Feedback Method for Dynamic Control of Manipulators, ASME Trans. J.DSMC, 102, 2, (1981), 119-125.

〔12〕 高为炳、吴东南，关与非线性系统的线性化问题，中国科学，A辑，7，（1987），740-748.

On the Optimization and Global Linearization of Nonlinear Mechanical Systems

Gao Weibing, Wu Dongnan
(Department of Applied Mathematics and Physics,
Beijing Institue of Aeronautics and Astronautics)

Abstract

In this paper, the optimization and global linearization of nonlinear mechanical systems are studied. For a specific but general cost function, two theorems are proved which show that the optimization with respect to the control vector, or the acceleration vector, or the transformed new control vector are equivelent. Consequently, we may linearize the nonlinear systems first and then optimize the obtained linear systems, which will give the same results to that obtained by optimizing the nonlinear systems directly. Through the comparison of several nonlinear approaches to the control problems of robot manipulators, it is found that the control agencies are entirely the same if the closed loop systems are linear, despite of the differences of the methods used.