第5卷第1期 控制理论与应用 Vol.5, No.1
1988年3月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS March, 1988

对角优势的常数阵实现

江青茵

（华东石油学院自动化系，山东东营）

摘　要

本文考虑Nyquist阵列法中的对角优势问题，讨论了由常数阵实现对角优势的条件与算法。

符号约定：

$G(s)$：系统的过程传递函数阵　$G(s)\in C^{m\times m}$

$Q(s)$：包括补偿器在内的开环传递函数阵　$Q(s)\in C^{m\times m}$

K：前置补偿器阵，在本文中　$K\in R^{m\times m}$

$q_{\cdot j}$，$k_{\cdot j}$：分别为$Q(s)$，K阵的第j列向量

$\|\cdot\|$：向量的欧氏范数

$[\cdot]^T$：矩阵或向量的转置

$\lambda[\cdot]$：矩阵$[\cdot]$的特征值

一、引　言

Rosenbrock[1]提出的Nyquist阵列法已被证明是多变量控制系统设计中的一种行之有效、简便易行的方法。该法的一个关键步骤是使开环系统获得对角优势。一般来说，这可通过在系统过程前加一补偿器来实现，即使开环传递函数阵$Q(s)=G(s)K$或其逆$Q^{-1}(s)=K^{-1}G^{-1}(s)$对角优势。考虑实现的方便，希望$K$阵的形式尽量简单，最好为常数阵。

有关常数补偿器阵K的求解，已有不少讨论。Rosenbrock[1]，Hawkins[2]和Johnson[3]讨论了用伪对角化法求解K阵的问题，但未能给出所解K阵能实现对角优势的条件。Wang[4]、聂为清[5]讨论了由常数的K阵实现对角优势的充分条件与必要条件，但未能给出二者之间的联系，推导也略嫌繁琐。本文将在上述文献的基础上，对由常数阵实现对角优势的条件与算法，作进一步的讨论。

二、实现的条件

为推导方便，引入正投影阵P_j

本文于1985年10月23日收到。1987年4月1日收到修改稿。

$$P_j=\begin{pmatrix} 0 & & & & & & \\ & \ddots & & & & 0 & \\ & & 0 & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 & \\ & 0 & & & & & 1 \\ & & & & & & 0 \\ & & & & & & \ddots \\ & & & & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{第 } j \text{ 行} \\ \\ \\ \\ \\ \text{第} j+m \text{行} \\ \\ \\ \\ \end{matrix}$$

P_i 为 $2m\times 2m$ 阵，并且 i）$P_j^T=P_j$，ii）$P_j^2=P_j$，iii）$\sum\limits_{j=1}^{m}P_j=I_{2m}$。

令 $$W^T=\begin{bmatrix}\mathrm{Re}\{G(s_i)\}\\ I_m\{G(s_i)\}\end{bmatrix}_{2m\times m}$$

$Q(s)$阵的第 j 列向量 $q_{\circ j}(s)$可以写成

$$q_{\circ j}(s)=G(s)k_{\circ j},\qquad (j=1,2,\cdots,m)$$

其第 h 个分量的模 $\quad |q_{hj}(s_i)|=\|P_hW^Tk_{\circ j}\|$。　　（1.1）

定理 1　设实对称阵 $Z_j=W[\alpha P_j-I_{2m}]W^T$，其中 $\dfrac{m}{m-1}\leq\alpha\leq 2$为常数，$j=1,2,\cdots,m$。则开环系统可由常数补偿器阵 K 在 s_i 点处实现对角优势的充分必要条件是

$$\lambda_{\max}[Z_j]>0,\qquad j=1,2,\cdots,m。\qquad (1.2)$$

证　直接考虑列对角优势指标

$$\theta_j(s_i)=|q_{jj}(s_i)|-\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}|q_{hj}(s_i)|=\|P_jW^Tk_{\circ j}\|-\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}\|P_hW^Tk_{\circ j}\|$$

$$=\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}\{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|/\beta_h-\|P_hW^Tk_{\circ j}\|\}$$

$$=\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}\frac{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|^2/\beta_h^2-\|P_hW^Tk_{\circ j}\|^2}{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|/\beta_h+\|P_hW^Tk_{\circ j}\|},\qquad (1.3)$$

式中 $\sum\limits_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}1/\beta_h=1$，并且 β_h 的取值使和式中所有项同号。这样，令

$$c_1=\max_h\{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|/\beta_h+\|P_hW^Tk_{\circ j}\|\},$$

$$c_2=\min_h\{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|/\beta_h+\|P_hW^Tk_{\circ j}\|\},$$

$$\theta_j^*(s_i)=\sum_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}\{\|P_jW^Tk_{\circ j}\|^2/\beta_h^2-\|P_hW^Tk_{\circ j}\|^2\}$$

$$=k_{\cdot j}^T W[\alpha P_j - I_{2m}]W^T k_{\cdot j}. \quad (1.4)$$

则有　$\theta_j^*(s_i)/c_1 \le \theta_j(s_i) \le \theta_j^*(s_i)/c_2$

或　$\theta_j^*(s_i)/c_2 \le \theta_j(s_i) \le \theta_j^*(s_i)/c_1$　成立。

由于 $c_1>0$，$c_2>0$，则 $\theta_j(s_i)$ 的符号可由 $\theta_j^*(s_i)$ 确定；因此，在对角优势问题中，只需考虑指标 $\theta_j^*(s_i)=k_j^T W[\alpha P_j - I_{2m}]W^T k_{\cdot j} = k_{\cdot j}^T Z_j k_{\cdot j}$，　$(j=1,2,\cdots,m)$

这里 $\alpha = 1+\sum_{\substack{h=1\\h\ne j}}^m 1/\beta_h^2$，由哥西不等式[7] $\sum_{\substack{h=1\\h\ne j}}^m 1/\beta_h^2 \ge \frac{1}{m-1}\left[\sum_{\substack{h=1\\h\ne j}}^m 1/\beta_h\right]^2 = \frac{1}{m-1}$，而由 $\sum_{\substack{h=1\\h\ne j}}^m 1/\beta_h = 1$，$1/\beta_h>0$，则有 $\sum_{\substack{h=1\\h\ne j}}^m 1/\beta_h^2 \le 1$ 成立。

$$\therefore \quad \frac{m}{m-1} \le \alpha \le 2. \quad (1.5)$$

考虑 $\theta_j^*(s_i)$ 的最大值，由[7]

$$\max\ \theta_j^*(s_i) = \max_{\|k_j\|^2=\mu^2} k_{\cdot j}^T Z_j k_{\cdot j} = \lambda_{\max}[Z_j]\mu^2. \quad (1.6)$$

综合上述，可知定理成立。

在 Z_j 阵中，$\alpha P_j - I_{2m}$ 为对角阵，其对角元素除第 j，$j+m$ 个元素外均为 -1，若令 $2m$ 维向量 $X=W^T k_{\cdot j}$，则 $\theta_j^*(s_i)$ 可以写成

$$\theta_j^*(s_i) = (\alpha-1)(x_j^2 + x_{j+m}^2) - \sum_{h\ne j,\, j+m}^{2m} x_h^2 . \quad (1.7)$$

不难得出 $\theta_j^*(s_i)$ 的上下限

$$k_{\cdot j}^T W\left[\frac{m}{m-1}P_j - I_{2m}\right]W^T k_{\cdot j} \le \theta_j^*(s_i) \le k_{\cdot j}^T W[2P_j - I_{2m}]W^T k_{\cdot j}.$$

记

$$Z_{j1} = W[2P_j - I_{2m}]W^T, \quad (1.8)$$

$$Z_{j2} = W\left[\frac{m}{m-1}P_j - I_{2m}\right]W^T. \quad (1.9)$$

推论 1　当 $\lambda_{\max}[Z_{j2}]>0$ 时 $(j=1,2,\cdots,m)$，系统一定可由常数阵 K 在 s_i 点处实现列对角优势，而当 $\lambda_{\max}[Z_{j1}]\le 0$ 时，系统一定不能由常数阵实现优势。

推论 1 与[4][5]的结论虽然形式不同，实质上是等价的。

注意到（1.7）式中非对角元素之和

$$\sum_{h\neq j,j+m}^{2m} x_h^2 = k_{\cdot j}^T W[I_{2m}-P_j]W^T k_{\cdot j} = \|(I_{2m}-P_j)W^T k_{\cdot j}\|^2\text{。}$$

上式右边正好是伪对角化法的目标函数 J_{pj}[1]，而由[1]，使 J_{pj} 在约束 $\|P_j W^T k_{\cdot j}\|^2 = \mu_1^2$ 下最小的解

$$\begin{cases}\lambda_{\min}[WW^T/WP_jW^T]\,k_{\cdot j}^* = WW^T k_{\cdot j}^*\,, \\ J_{pj} = \lambda_{\min}[WW^T/WP_jW^T]\mu_1^2\text{。}\end{cases}\qquad (1.10)$$

所以有

推论 2　由（1.10）式给出的伪对角化法之解 $k_{\cdot j}^*$ 能使开环系统 $Q(s)$ 的第 j 列在 s_i 处对角优势的充要条件是 $\lambda_{\min}[WW^T/WP_jW^T]<\alpha-1$，其中 α 由定理 1 给出。特别是，当 $\lambda_{\min}<\dfrac{1}{m-1}$ 时，$k_{\cdot j}^*$ 一定能使该列对角优势，当 $\lambda_{\min}\geq 1$ 时，$k_{\cdot j}^*$ 一定不能使该列优势。

推论 3　由[3][6]给出的伪对角化法的简化二维算法之解可使系统在 s_i 处列优势的充要条件是 $\lambda_{\max}[D_j]>\dfrac{1}{\alpha}$，其中 $D_j = E_j^T W^T (WW^T)^{-1} W E_j \quad j=1,2,\cdots,m$。

证　由[3][6]，$\lambda_{\max}[D_j]\triangleq\dfrac{1}{1+\lambda_{\min}[WW^T/WP_jW^T]}$ 则由推论 2 立得。

上述讨论都是针对某一频率点的对角优势问题。而实际应用时，往往需要考虑在一段频率 $[s_0,s_n]$ 上的对角优势。这一问题要复杂的多；这是因为，虽然由 $\theta_j^*(s_i)>0$ $\forall s_i\in[s_0,s_n]$ 容易推出 $\int_{s_0}^{s_n}\theta_j^*(s)ds>0$，但逆定理不能成立，即由 $\int_{s_0}^{s_n}\theta_j^*(s)ds>0$ 不能断定 $\theta_j^*(s_i)>0\quad\forall s_i\in[s_0,s_n]$。因此文献[5]给出的充分条件不能成立。

由于 Z_j 阵连续，在某一点处的对角优势化也能使在一段频率上优势，下述定理说明了这一点。

定理 2　设系统在 $s_i\in[s_0,s_n]$ 上均有 $\lambda_{\max}[Z_{j2}^i]>0$ 成立，其中 Z_{j2}^i 由（1.9）式表示

$$i=0,1,\cdots,n,\quad j=1,2,\cdots,m\text{。}$$

定义 $\gamma_j^i = \lambda_{\max}[Z_{j2}^i] + \min\limits_{h\neq i}\left\{\lambda_{\min}[Z_{j2}^h - Z_{j2}^i]\right\}\quad \begin{matrix} i=0,1,\cdots,n \\ j=1,2,\cdots,m\end{matrix}$

若有 $\max\limits_{0\leq i\leq n}\gamma_j^i = \gamma_j^l>0$ 成立，则系统可通过时应于 $\lambda_{\max}[Z_{j2}^l]$ 的特征向量

$k^l_{\cdot j}$ 组成的 K 阵在$[s_0, s_n]$上实现对角优势。注意这里对于不同的列，l 的取值可以是不同的。

证 ∵
$$k^{iT}_{\cdot j}Z^h_{j2}k_{\cdot j}^{i}=k^{iT}_{\cdot j}Z^i_{j2}k^i_{\cdot j}+k^{iT}_{\cdot j}[Z^h_{j2}-Z^i_{j2}]k^i_{\cdot j}$$
$$=\lambda_{\max}[Z^i_{j2}]\mu^2+k^{iT}_{\cdot j}[Z^h_{j2}-Z^i_{j2}]k^i_{\cdot j}$$
$$\geq\lambda_{\max}[Z^i_{j2}]\mu^2+\lambda_{\min}[Z^h_{j2}-Z^i_{j2}],$$

∴若有 $\gamma^l_j=\lambda_{\max}[Z^l_{j2}]+\min\limits_{h\neq l}\{\lambda_{\min}[Z^h_{j2}-Z^l_{j2}]\}>0$ 一定有 $k^{lT}_{\cdot j}Z^h_{j2}k^l_{\cdot j}>0(h=0,1,\cdots,n)$，由定理1及其推论1，可知定理成立。

三、算法与实例

定理2实际上也给出一种求解常数补偿器阵 K 的算法，即可在某一频率点 s_e 上求取对应于 $\lambda_{\max}[Z^l_{j2}]$的特征向量$k^l_{\cdot j}$。由定理2，只要选择合适的 s_e，所求 $k^l_{\cdot j}$不仅能使该列在 s_e点处对角优势，还可使该列在$[s_0, s_n]$上优势。这恰是伪对角化法不易做到的。

例 系统为
$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{s+1}{s^2+10s+100} & \dfrac{2}{2s+1}\\ \dfrac{s+4}{s^2+6s+5} & \dfrac{1}{5s+1}\end{pmatrix},$$

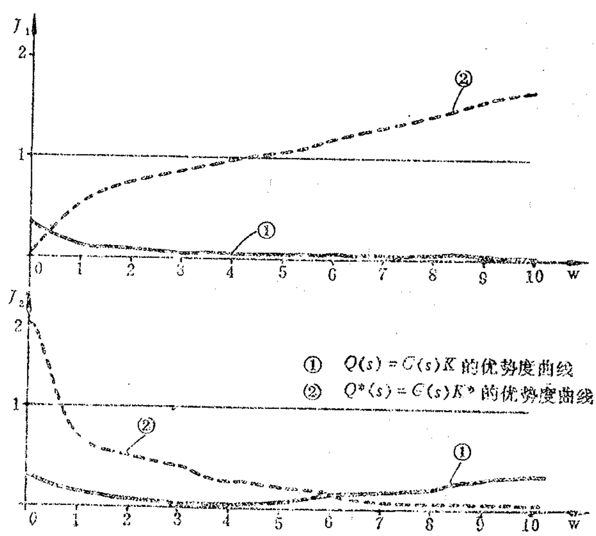

图 1

$G(s)$显然不为列优势阵。在 $s=0$，$s=j_{10}$处分别计算对应于$\lambda_{max}[Z_{j2}]$的特征向量 $k_{.1}$ 和 $k_{.2}$，所求 K 阵为

$$K=\begin{bmatrix} -0.20107 & -0.9924 \\ 0.9796 & 0.1229 \end{bmatrix}.$$

在同一频率上用伪对角化法计算的 K^* 阵为

$$K^*=\begin{bmatrix} -0.5094 & 1.4857 \\ 0.4075 & -0.5720 \end{bmatrix}。$$

令 $J_j=\sum\limits_{\substack{h=1\\h\neq j}}^{m}|q_{hj}(s)|/|q_{jj}(s)|$ 为第 j 列的优势度，图 1 给出开环系统的优势度曲线。

计算结果表明了所给算法的优越。

参 考 文 献

〔1〕 Rosenbrock, H. H., Computer Aidecl Control System Design, N. Y. Academic Press, (1974).

〔2〕 D. J. Hawkins, Pseudodiagonalistaion and the Inverse-Nyquist Array Method, Proc. IEE, 119, (1972), 337-342.

〔3〕 Johnson, M. A., Diagonal Dominance and the Method of Pseudodiagonalisation, Paoc. IEE, 126, (1979), 1011-1017.

〔4〕 Wang Shilin and Kai Pingan, Design of Diagonal Dominance by Compensator, Int. J. Control, 30, (1983), 221-227.

〔5〕 聂为清，对角优势的可实现性，信息与控制，13，2，(1984)，1-5。

〔6〕 鲍远律、庞国仲、李嗣福，实现对角优势的动态补偿器的设计，信息与控制，13，4，(1984)，17-21。

〔7〕 倪国熙，常用的矩阵理论和方法，上海科学出版社，(1984)，115-117。

Achieving Diagonal Dominance Via Constant Compensation

Jiang Qingyin

(Department of Automation, East China Petroleum Institute, Shandong Dongying)

Abstract

The problem of achieving diagonal dominance in Nyquist Array design method was considered in this paper. Necessary and sufficient condition for achieving diagonal dominance by constant compensator was deduced. If this condition is satisfied, the procedure presented in this paper can assure diagonal dominance for the openloop system. The pseudodiagonalisation procedure was also discussed, and the necessary and sufficient condition for this procedure to achieve dominance at a certain frequncy was given.