

离散MRAC系统的简便算法

李 泳

(苏州计算机开发应用研究所)

摘 要

研究简便的算法对于自适应控制的工程实现具有重要意义。本文应用无源性概念分析了附加信号的作用,提出了消除附加信号以简化算法的方法,建立了 Narendra-Lin 误差模型的推广形式,导出了一种不需附加信号、形式简便的离散 MRAC 新算法。

一、引 言

R. V. Monopoli 在1974年提出的“增广误差”概念^[1],曾被成功地应用于模型参考自适应控制(MRAC)的研究中,极大地推动了MRAC理论的发展。K. S. Narendra 和 Lin 在1980年提出一种误差模型^[2],以此综合离散系统的自适应律,并证明了这种自适应方案的全局渐近稳定性^[3],这是MRAC理论的一项重要成果。文[3]的自适应方案在系统相对阶 $n^* > 0$ 的情况下(实际的控制系统总是如此),也需要在参考模型上加入附加信号而构成增广误差,以保证全局渐近稳定性;在被控对象增益未知或时变情况下,还需引入辅助可调参数,故整个自适应系统结构复杂,运算量大,给工程实现特别是应用低档微机带来了困难。

本文用无源性概念分析了附加信号在MRAC系统的误差模型中的作用,提出了消除附加信号同时又使误差模型稳定的新设想。根据这个设想建立了一种更为广泛的误差模型,推广了 Narendra 和 Lin 的结果^[2],进而综合了一种离散MRAC系统的简便算法。

二、离散MRAC系统的误差模型分析

在MRAC系统的研究中,自适应律的综合往往归结为误差模型的渐近稳定性问题。误差模型的一种典型结构如图1,图中 $W_m(z)$ 是参考模型的传递函数。

根据反馈系统的无源性分析^[4]或 Landau-Popov 超稳定性理论^[5],只要图1中前向回路严格无源,反馈回路无源,那么整个系统就是渐近稳定的。但是当被控对象和参考模型的相对阶 $n^* > 0$ 时, $W_m(z)$ 不是严格无源,上述条件就不满足了。为了解决这个问题,一种重要的方法是引进附加信号而构成增广误差。从 Narendra 等人^[3,6]

的研究中可以看到, 附加信号的作用相当于在误差模型中增加一个环节 $L(z)$, 从而使前向回路严格无源, 如图2. 由于 $L(z)$ 的分子次数比分母高, 它本身不是物理可实现的, 因此必须借助于在参考模型上加入附加信号来实现.

现在我们从另一方向考虑使图1中前向回路严格无源的方法, 即在参考模型后面加一个环节, 这正同图2相反, 见图3. 图3中参考模型的传递函数用一种最简单的形式 z^{-n^*} 表示. 显然前向回路严格无源. 但是自适应机构的输入信号 $\varepsilon_1(k) = e_1(k + n^*)$ 是时间上超前信号. 如果能研究一种自适应规律, 它在 k 时刻调整参数只需用到 $(k - n^*)$ 时刻以前的信号 $\varepsilon_1(k - n^*)$, $\varepsilon_1(k - n^* - 1)$, $\dots$, 即只需用到 $e_1(k)$, $e_1(k - 1)$, $\dots$, 自适应机构就不会遇到时序上的困难了; 同时自适应规律又能保证反馈回路无源. 对于这种自适应方案, 附加信号就不再需要了, 整个算法就会简单得多.

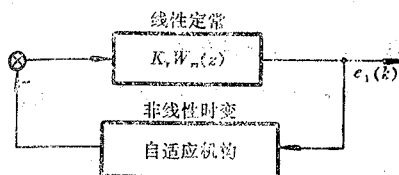


图1 误差模型的典型结构

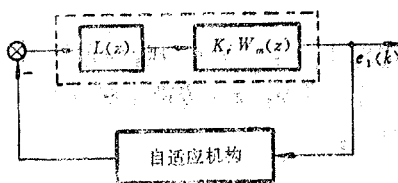


图2 Narendra-Lin 自适应方案的误差模型

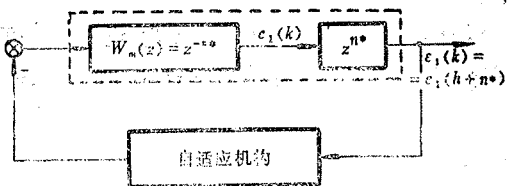


图3 误差模型的新设想

三、Narendra—Lin 误差模型的推广形式

基于以上想法, 我们对 Narendra—Lin 误差模型^[2]作如下的推广.

设新的误差模型的方程为

$$\varepsilon(k+1) = A\varepsilon(k) + bv(k), \quad (1)$$

$$\varepsilon_1(k) = c^T \varepsilon(k) + dv(k), \quad (2)$$

$$v(k) = \phi^T(k)\omega(k) - \alpha\omega^T(k)\Gamma\omega(k)\varepsilon_1(k), \quad (3)$$

$$\Gamma = \Gamma^T > 0, \quad \alpha > n^* - \frac{1}{2},$$

$\varepsilon(\cdot) \in R^n$, $\omega(\cdot)$ 、 $\phi(\cdot) \in R^r$, $v(\cdot)$ 和 $\varepsilon_1(\cdot)$ 是标量, n^* 是正整数. 自适应算法为

$$\Delta \phi(k) \triangleq \phi(k) - \phi(k-1) = -\Gamma\omega(k-n^*)\varepsilon_1(k-n^*). \quad (4)$$

显然, 上述误差模型当 $n^* = 1$ 时, 就是 Narendra-Lin 误差模型. 图 4 是它的框图.

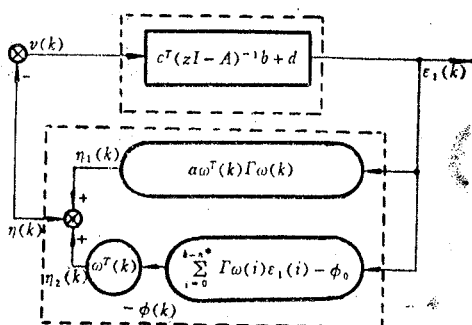


图 4 推广的 Narendra-Lin 误差模型的结构

定理 1 给定 $(n \times n)$ 阶稳定矩阵 A 和对称正定矩阵 Γ , 向量 $b, c \in R^n$ 和 $\omega(k): Z_+ \rightarrow R^r$, $\{A, b\}$ 完全可控, z -传递函数 $d + c^T(zI - A)^{-1}b$ 严格正实, 则 (1) ~ (4) 组成的误差模型满足:

- (i) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k) = 0$;
- (ii) $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$.

证 (i) 图 4 中虚线标出两个部分, 其中线性正向方框是严格正实的. 按照 Landau-Popov 超稳定性理论^[5], 只要反馈方框满足 Popov 不等式, 则整个系统渐近超稳定, $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k) = 0$.

$$\begin{aligned} I(0, K_1) &= \sum_{k=0}^{K_1} \varepsilon_1(k) \eta(k) = \sum_{k=0}^{K_1} \varepsilon_1(k) \eta_1(k) + \sum_{k=0}^{K_1} \varepsilon_1(k) \eta_2(k) \\ &= I_1(0, K_1) + I_2(0, K_1), \end{aligned} \quad (5)$$

$$I_2(0, K_1) = \sum_{k=0}^{K_1} \varepsilon_1(k) \omega^T(k) \left(\sum_{i=0}^{k-n^*} \Gamma \omega(i) \varepsilon_1(i) - \phi_0 \right), \quad (6)$$

ϕ_0 是 $\phi(k)$ 的初始值.

应用计算方法中的 Cholesky 分解定理, 存在非奇异下三角矩阵 M , 使 $MM^T = \Gamma$, 令 $z(k) \triangleq M^T \omega(k) \varepsilon_1(k)$, $z_0 \triangleq M^{-1} \phi_0$,

$$\begin{aligned} \text{则 } I_2(0, K_1) &= \sum_{k=0}^{K_1} z^T(k) \left(\sum_{i=0}^{k-n^*} z(i) - z_0 \right) = \frac{1}{2} \left(\sum_{k=0}^{K_1} z(k) - z_0 \right)^T \\ &\quad \cdot \left(\sum_{k=0}^{K_1} z(k) - z_0 \right) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{K_1} z^T(k) z(k) - \frac{1}{2} z_0^T z_0 \end{aligned}$$

$$- \sum_{k=0}^{K_1} z^T(k) \left(\sum_{i=k-n^*+1}^k z(i) \right), \quad (8)$$

$$I_1(0, K_1) = \alpha \sum_{k=0}^{K_1} z^T(k) z(k). \quad (9)$$

对 (8) 式中最后一项应用关系式

$$x_i x_j \leq \frac{1}{2} x_i^2 + \frac{1}{2} x_j^2 \quad (10)$$

并经简单运算, 最后得

$$\begin{aligned} I(0, K_1) &\geq \left(\alpha - n^* + \frac{1}{2} \right) \sum_{k=0}^{K_1} z^T(k) z(k) - \frac{1}{2} z_0^T z_0 \\ &\geq -\frac{1}{2} z_0^T z_0, \quad \text{当 } \alpha > n^* - \frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (11)$$

可见图 4 中反馈方框满足 Popov 不等式.

(ii) 引进新的向量

$$\text{令 } X_1(k) \triangleq \varepsilon(k - n^* + 1), \quad (12)$$

$$X_2(k) \triangleq \begin{bmatrix} \Delta \phi(k) \\ \Delta \phi(k-1) \\ \vdots \\ \Delta \phi(k - n^* + 2) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

当 $n^* = 1$ 时, $X_1(k) = \varepsilon(k)$, 而 $X_2(k) \triangleq 0$.

定义非负函数 $V(k)$

$$V(k) \triangleq 2X_1^T(k)PX_1(k) + \phi^T(k)\Gamma^{-1}\phi(k) + X_2^T(k)FX_2(k), \quad (14)$$

其中

$$P = P^T > 0,$$

$$F \triangleq \begin{bmatrix} (n^* - 1)\Gamma^{-1} & & & \\ & (n^* - 2)\Gamma^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \Gamma^{-1} \end{bmatrix}. \quad (15)$$

根据 (1) ~ (4) 式和 (12) ~ (15) 式, 并利用离散形式的 Kalman-Yacubovich 引理^[2], 得

$$\begin{aligned} \Delta V(k) &\triangleq V(k+1) - V(k) = -2[\varepsilon^T(k - n^* + 1)q - vv(k - n^* + 1)]^2 \\ &\quad - 2\sigma\varepsilon^T(k - n^* + 1)L\varepsilon(k - n^* + 1) \\ &\quad + 2 \left[\sum_{i=0}^{n^*-2} \Delta \phi^T(k-i) \right] \Gamma^{-1} \Delta \phi(k+1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (1-2\alpha) \Delta \phi^T(k+1) \Gamma^{-1} \Delta \phi(k+1) \\
& + (n^*-1) \Delta \phi^T(k+1) \Gamma^{-1} \Delta \phi(k+1) \\
& - \sum_{i=0}^{n^*-2} \Delta \phi^T(k-i) \Gamma^{-1} \Delta \phi(k-i),
\end{aligned} \tag{16}$$

其中矩阵 $L = L^T > 0$, 标量 $\nu, \sigma > 0$, $q \in R^n$. 对 (16) 式中第三项也应用 Cholesky 分解定理及不等式 (10), 并经简单运算得

$$\begin{aligned}
\Delta V(k) & \leq -2[\varepsilon^T(k-n^*+1)q - \nu \varepsilon(k-n^*+1)]^2 \\
& - 2\sigma \varepsilon^T(k-n^*+1)L\varepsilon(k-n^*+1) \\
& + (2n^*-1-2\alpha) \Delta \phi^T(k+1) \Gamma^{-1} \Delta \phi(k+1) \leq 0, \\
& \text{当 } \alpha > n^* - \frac{1}{2}.
\end{aligned} \tag{17}$$

由于 $\Delta V(k) \leq 0$, $V(k) \geq 0$, 所以

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{\infty} (-\Delta V(k)) = V(0) - V(\infty) < \infty, \\
& \sum_{k=0}^{\infty} \{2[\varepsilon^T(k-n^*+1)q - \nu \varepsilon(k-n^*+1)]^2 \\
& + 2\sigma \varepsilon^T(k-n^*+1)L\varepsilon(k-n^*+1) + (2\alpha-2n^*+1) \Delta \phi^T(k \\
& + 1) \Gamma^{-1} \Delta \phi(k+1)\} \leq V(0) - V(\infty) < \infty.
\end{aligned} \tag{18}$$

从 (18) 式第二、三项分别得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon(k) = 0$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$. 证毕

注: 在证明 (i) 中, 规定 $\omega(-1) = \omega(-2) = \dots = \omega(-n^*) = 0$, 当 “ Σ ” 号的上标小于下标时, 该和式为 0.

四、不需附加信号的离散 MRAC 算法

设被控对象为

$$A(z^{-1})y_p(k) = z^{-n^*} B(z^{-1})u(k), \tag{19}$$

$$\text{其中 } A(z^{-1}) = 1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_n z^{-n}, \tag{20}$$

$$B(z^{-1}) = b_0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_m z^{-m}, \quad b_0 \neq 0. \tag{21}$$

这是一个 SISO 系统, $u(k)$ 和 $y_p(k)$ 分别是输入和输出. 相对阶 n^* 是已知的, $B(z^{-1})$ 的零点均在 z 平面的单位圆内. a_i 和 b_i 是未知的、慢时变的. b_0 是有界的, 其符号已知. 不失一般性, 设 $b_0 > 0$.

取参考模型为

$$C(z^{-1})y_m(k) = z^{-n^*} D(z^{-1})r(k), \tag{22}$$

$$\text{其中 } C(z^{-1}) = 1 + c_1 z^{-1} + \dots + c_l z^{-l}, \tag{23}$$

$$D(z^{-1}) = d_0 + d_1 z^{-1} + \dots + d_p z^{-p}. \tag{24}$$

$r(k)$ 是有界参考输入, $y_m(k)$ 是期望的输出. 参考模型是稳定的, 但不一定是最小相位的.

对 (19) 式自身连续进行迭代, 以消去 $y_p(k-i)$, $i=1, 2, \dots, n^*-1$, 得

$$y_p(k+n^*) = \tilde{A}(z^{-1})y_p(k) + \tilde{B}(z^{-1})u(k), \quad (25)$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = \alpha_0 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_{n-1} z^{-n+1}, \quad (26)$$

$$\tilde{B}(z^{-1}) = \beta_0 + \beta_1 z^{-1} + \dots + \beta_{m+n^*-1} z^{-m-n^*+1}, \quad (27)$$

$$\beta_0 = b_0. \quad (28)$$

$$\text{输出误差 } e_1(k+n^*) = y_p(k+n^*) - y_m(k+n^*) = \tilde{A}(z^{-1})y_p(k) + \tilde{B}(z^{-1})u(k) - y_m(k+n^*). \quad (29)$$

$$\text{取控制规律 } u(k) = \theta^T(k)\omega(k), \quad (30)$$

$$\text{其中 } \theta^T(k) = (\hat{\beta}_1(k), \dots, \hat{\beta}_{m+n^*-1}(k), \hat{\alpha}_0(k), \dots, \hat{\alpha}_{n-1}(k), \hat{\beta}_0(k)), \quad (31)$$

$$\omega^T(k) = (u(k-1), \dots, u(k-m-n^*+1), y_p(k), \dots, y_p(k-n+1), y_m(k+n^*)), \quad (32)$$

$\theta(k)$ 是自适应过程中被调参数向量.

将 (30) 式代入 (29) 式中 $\beta_0 u(k)$ 项, 得

$$e_1(k+n^*) = b_0(\theta(k) - \theta_0)^T \omega(k) = \phi^T(k)\omega(k), \quad (33)$$

$$\text{其中 } \theta_0^T = \left(-\frac{\beta_1}{b_0}, \dots, -\frac{\beta_{m+n^*-1}}{b_0}, -\frac{\alpha_0}{b_0}, \dots, -\frac{\alpha_{n-1}}{b_0}, \frac{1}{b_0} \right). \quad (34)$$

θ_0 就是 $\theta(k)$ 的期望值, $\phi(k)$ 是广义参数误差向量. 然后按第三节的误差模型构造自适应律.

$$\text{令 } \varepsilon_1(k) = v(k), \quad (35)$$

$$v(k) = \phi^T(k)\omega(k) - \alpha \omega^T(k) \tilde{\Gamma} \omega(k) \varepsilon_1(k), \quad (36)$$

$$\phi(k) = \phi(k-1) - \tilde{\Gamma} \omega(k-n^*) \varepsilon_1(k-n^*), \quad (37)$$

$$\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma}^T > 0, \quad \alpha > n^* - \frac{1}{2}.$$

以下分三步证明 (35) ~ (37) 式的自适应律能保证 $\lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k) = 0$.

(1) 由定理 1 得 $\lim_{k \rightarrow \infty} \varepsilon_1(k) = 0, \lim_{k \rightarrow \infty} \Delta \phi(k) = 0$.

(2) 证明当 k 充分大时, $y_p(k)$ 有界.

用反证法. 若 $y_p(k)$ 无界, 则 $\|\omega(k)\|$ 也无界.

从 (19) 式可得

$$u(k-i) = z^{-i} \frac{A(z^{-1})}{B(z^{-1})} y_p(k+n^*). \quad (38)$$

$$\|u(k-i)\| \leq m_1 \sup_{j \leq k} |y_p(j+n^*)| + m_2, \quad (39)$$

$$m_1, m_2 > 0.$$

再由 (32) 式及 $y_m(k)$ 的有界性, 得

$$\begin{aligned} \|\omega(k)\| &\leq m_3 \sup_{j \leq k} |y_p(j+n^*) - y_m(j+n^*)| + m_4 \\ &= m_3 \sup_{j \leq k} |\phi^T(j)\omega(j)| + m_4, \end{aligned} \quad (40)$$

$$m_3, m_4 > 0.$$

从 (35) ~ (37) 和 $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$, $\Delta\phi(k) \rightarrow 0$, 得

$$\phi^T(k)\omega(k) \rightarrow \alpha\omega^T(k)\tilde{\Gamma}\omega(k)\varepsilon_1(k), \quad (41)$$

$$\phi^T(k)\omega(k) = 0\|\omega(k)\|. \quad (42)$$

结合 (40) 和 (42) 式, 得

$$\|\omega(k)\| \leq 0\|\omega(k)\| + m_4. \quad (43)$$

这与 $\|\omega(k)\|$ 的无界性相矛盾.

(3) 由 $\|\omega(k)\|$ 的有界性及 $\varepsilon_1(k) \rightarrow 0$, 从 (33)、(35)、(36) 式易证

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e_1(k) = 0. \quad \text{证毕.}$$

$$\text{令 } \tilde{\Gamma} = b_0\Gamma, \Gamma = \Gamma^T > 0.$$

由 (33) ~ (37) 式得

$$\theta(k) = \theta(k-1) - \Gamma\omega(k-n^*)\varepsilon_1(k-n^*), \quad (44)$$

$$\varepsilon_1(k-n^*) = \frac{y_p(k) - y_m(k)}{1 + \alpha b_0 \omega^T(k-n^*)\Gamma\omega(k-n^*)}. \quad (45)$$

因 b_0 是未知时变的, 为了确保 $\alpha > n^* - \frac{1}{2}$, (45) 式中 b_0 可用 $\sup\{b_0\}$ 代替, $\sup\{b_0\}$

在很多实际问题中是可以确定的.

五、结 论

本文提出的算法简单, 计算量还不到 Narendra-Lin 自适应方案^[3]的一半, 利于工程实现. 计算机仿真表明该算法的收敛性良好. 本文的结果已成功地应用于一个惯量矩变化达 10 倍的电机伺服系统.

致谢 本文得到了南京电子技术研究所杜立高级工程师的热情指导, 谨致谢意.

参 考 文 献

- [1] Monopoli, R. V., Model Reference Adaptive Control with an Augmented Error Signal, IEEE Trans., AC-19, 5, (1974), 474-484.
- [2] Lin Yuan hao & Narendra, K. S., A New Error Model for Adaptive Systems, IEEE Trans., AC-25, 3, (1980), 585-587.
- [3] Narendra, K. S. & Lin Yuan hao, Stable Discrete Adaptive Control, IEEE Trans., AC-25, 3, (1980), 456-461.
- [4] 冯纯伯, 反馈系统的无源性分析及其应用, 自动化学报, 11:2, (1985), 111-117.
- [5] Landau, I. D., Adaptive Control-the Model Reference Approach, Dekker, (1979).
- [6] Narendra, K. S., Lin Yuan hao & Valavani, L. S., Stable Adaptive Controller Design, Part II: Proof of Stability, IEEE Trans., AC-25, 3, (1980), 440-448.

A Simple Algorithm of Discrete-time MRAC Systems

Li Yong

(Suzhou Research Institute of Computer Development and Application)

Abstract

A simple algorithm is of importance to the implementation of an adaptive system. This paper analyzes the role of the auxiliary signal by passivity, and suggests a method of eliminating the auxiliary signal for simplification of an algorithm. An extensive Narendra-Lin error model is presented and a new simple discrete-time MRAC algorithm without any auxiliary signal is deduced.