适用于时变系统参数估计的新算法

方　定　法

（华东师范大学数学系，上海）

摘　　要

本文提出一种新的参数估计方法，可成功地用来处理一类时变系统的自适应控制，并在一般条件下证明了参数估计的强一致性及自适应控制收敛于最小方差控制。模拟结果验证了算法的有效性。

一、引　　言

时变系统广泛存在于工业、交通、经济及科技等领域，这方面的理论探讨，对系统控制的实际应用很有价值，最近几年已取得一些初步进展。

线性时变系统（SISO）一般形式为

$$y(t+1)=a_1(t)y(t)+\cdots+a_p(t)y(t-p+1)+b_1(t)u(t)+\cdots$$
$$+b_q(t)u(t-q+1)+e(t). \tag{1}$$

若记
$$\theta^T(t)=[a_1(t),\ \cdots,\ a_p(t),\ b_1(t),\ \cdots,\ b_q(t)],$$
$$\varphi^T(t)=[y(t),\ \cdots,\ y(t-p+1),\ u(t),\ \cdots,\ u(t-q+1)],$$

则（1）可表示成

$$y(t+1)=\varphi^T(t)\theta(t)+e(t), \tag{1'}$$

其中 $e(t)$ 为随机干扰，根据有无此项而分别称（1）为随机时变系统和确定性时变系统。现有的参数估计方法一般都是基于

$$\hat{\theta}(t+1)=\hat{\theta}(t)+\gamma(t)R(t)\varphi(t)\varepsilon(t)$$

进行递推计算，其中$\gamma(t)$、$R(t)$、$\varepsilon(t)$分别是增益系数、校正矩阵、量测新息。

1981年，Fortescue等[1]在加权最小二乘法基础上提出变遗忘因子辨识方法，同年Cordero[2]在系统为时不变的情况下证明了由此辨识方法所导出的自适应控制算法是收敛的。1982年，Xie等[3]用多项式展开逼近时变参数的思想，提出扩维和重新起动的辨识方法，并在模型和系统完全一致的条件下证明自适应控制算法收敛。1983年，Anderson等[4]在慢时变的情况，证明投影法辨识的自适应控制其参数误差和输出误差的有界性。以上都是就确定性时变系统论述的。对随机系统，1984，Goodwin等[5]在时变参数以指数速度收敛到定常系统的条件下证明了随机逼近法辨识的自适应控制收

本文于1986年10月15日收到。1987年8月1日收到修改稿。

敛于最小方差控制.

到目前为止，所有改进算法都是关于$\gamma(t)$、$R(t)$的某些修正，但分析（2）式后可知参数误差$\tilde{\theta}(t)=\theta(t)-\hat{\theta}(t)$的传递矩阵$(I-\gamma(t)R(t)\varphi(t)\varphi^T(t))$只有一个异于1的特征值，自然会影响到参数的收敛速度，难以跟踪变化着的参数，因此实际应用受到限制.

二、新算法及主要结果

对时变系统，Caines 和 Chen[7] 论证了若系统的参数任意变化则不可能施加一适应控制保证系统稳定，因而对时变参数应给予某种限制，即被控系统的参数需具有一定的内在不变性. 我们要求系统（1）：

$S1$　系统阶数p、q的上界已知；

$S2$　系统的时变参数$\theta(t)$满足

$$\sum_{t=1}^{\infty}\|\theta(t+1)-\theta(t)\|<\infty,$$

即参数在整个时间域上是全变差有界的，包含了不经常发生的陡参变及趋于平稳的慢参变.

我们有如下新算法，适当选取常数$l>p+q$，记向量$K(t)=\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)y(i+1)$，

矩阵$P(t)=\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)\varphi(i)^T$，

$$\gamma(t)=1+\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)^T\varphi(i),$$

参数估计由

$$\hat{\theta}(t+1)=\hat{\theta}(t)+t^{-\alpha}\gamma^{-1}(t)[K(t)-P(t)\hat{\theta}(t)]\quad \alpha\in(\frac{1}{2},1) \tag{3}$$

递推计算. 易推知此算法参数误差的传递矩阵特征值都小于1，确是参数向量空间上的压缩映射，称为压缩误差算法.

对于$e(t)$为白噪声序列的随机系统（1），由压缩误差算法给出的辨识方法有结果：

定理 1　设待辨识系统（1），满足$S1$、$S2$条件，若存在$\beta>0$，对任意t都成立

$$\lambda_{\min}(\gamma^{-1}(t)\sum_{k=t-l+1}^{t}\varphi(k)\varphi^T(k))\geq\beta\qquad a.s. \tag{4}$$

则由（3）式给出的算法，（$\lambda_{\min}(\cdot)$为矩阵的最小特征值）对任意的$\hat{\theta}(1)$都有

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{\theta}(t)=0\qquad a.s. \tag{5}$$

证 令 $\Phi(t)=I-t^{-\alpha}\gamma^{-1}(t)\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)\varphi^T(i)$，则

$$\widetilde{\theta}(t+1)=\Phi(t)\widetilde{\theta}(t)+t^{-\alpha}\gamma^{-1}(t)\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)e(i)+\varepsilon(t,\ \theta)$$

$$=\prod_{k=1}^{t}\Phi(k)\widetilde{\theta}(1)+\sum_{k=1}^{t}C_{t,k}e(k)+\sum_{k=1}^{t}\left(\prod_{i=k}^{t}\Phi(i)\right)\varepsilon(k,\ \theta), \tag{6}$$

其中 $\varepsilon(t,\ \theta)=\theta(t+1)-\theta(t)+t^{-\alpha}\gamma^{-1}(t)\sum_{i=t-l+1}^{t}\varphi(i)\varphi^T(i)(\theta(t)-\theta(i))$，

$C_{t,k}^T=[C_{t,k}^{(1)},\ C_{t,k}^{(2)},\ \cdots,\ C_{t,k}^{(n)}]$ n为参数θ的维数，

$$C_{t+1,k}=\Phi(t+1)C_{t,k}+U_{t,k},$$

$$U_{t,k}=\begin{cases}t^{-\alpha}\gamma^{-1}(t)\varphi(k) & \text{当}k<t\leqslant k+l\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{7}$$

易知 $\|\Phi(t)\|\leqslant 1-\frac{\beta}{t^{\alpha}}$ $a.s.$ 由无穷乘积基本定理知，当$\alpha<1$时，有

$$\prod_{k=1}^{t}\|\Phi(k)\|\leqslant\prod_{k=1}^{t}\left(1-\frac{\beta}{k^{\alpha}}\right)\to 0\quad a.s.\ (t\to\infty).$$

因此（6）式右端的第一项对任意$\widehat{\theta}(1)$都有

$$\lim_{t\to\infty}\prod_{k=1}^{t}\Phi(k)\widetilde{\theta}(1)=0\qquad a.s. \tag{8}$$

对（6）式右端的第三项，有

$$b_{t,k}=\left\|\prod_{i=k}^{t}\Phi(i)\right\|\leqslant\|\Phi(k)\|\left\|\prod_{i=k+1}^{t}\Phi(i)\right\|\leqslant\left\|\sum_{i=k+1}^{t}\Phi(i)\right\|=b_{t,k+1},$$

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k\leqslant\sum_{k=1}^{\infty}\|\varepsilon(k,\ \theta)\|\leqslant l\sum_{k=1}^{\infty}\|\theta(k+1)-\theta(k)\|<\infty,$$

$$\sup_t b_{t,t}=1.$$

附录引理1的条件满足，因此

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}\left(\prod_{i=k}^{t}\Phi(i)\right)\varepsilon(k,\ \theta)=0\qquad a.s. \tag{9}$$

对（6）式右端的第二项，注意到 l 有限，由（7）式可以证明对任意t、k

$$\|C_{t,k}\|^2\leqslant Mt^{-2\alpha},$$

则每一分量

$$C_{t,k}^{(j)2} \leqslant M t^{-2\alpha} \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

再由附录引理 2，此时 $2\alpha>1$，则

$$\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^{(j)} e(k) \to 0 \qquad a.s. \ (t\to\infty) \tag{10}$$

由（8）、（9）、（10）三式知定理1得证.

注：条件（4）可减弱为 $\lambda_{\min}\left(\gamma^{-1}(t)\sum_{k=t-l+1}^{t}\varphi(k)\varphi^T(k)\right)=\beta_t$，$\beta_t=O(t^{-\varepsilon})$，$\varepsilon<\alpha-1/2$，比通常的持续激励条件弱。

考虑系统（1）的自适应控制，不失一般性，要求

$S3$ 设定输出 $y^*(t)$ 一致有界；

$S4$ 系统（1）为最小相位系统.

通过（3）式得到估计 $\hat{\theta}(t)$，再由

$$y^*(t+1)=\varphi^T(t)\hat{\theta}(t) \tag{11}$$

计算输入控制变量 $u(t)$. 有下述结果：

定理 2 时变系统（1）满足$S1$、$S2$、$S3$、$S4$，由（3）、（11）给出的自适应控制，其输入、输出平方值的采样均值以概率 1 有界

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}[u^2(k)+y^2(k+1)]<\infty \qquad a.s. \tag{12}$$

且输出误差的均方值收敛到干扰的最小方差

$$\lim_{t\to\infty}\frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t}E\{[y(k+1)-y^*(k+1)]^2|F_k\}=Ee^2(1)=\sigma_2 \quad a.s. \tag{13}$$

其中 $F_k=\sigma\{e(j)|j\leqslant k\}$ 为F的非降子σ代数.

证 类似于[8]的证明. 本文略.

三、模 拟 结 果

为验证理论推导，我们在计算机上对时变参数的各种变化情况反复进行了数值模拟和比较，表明压缩误差算法有较好的跟踪性能. 现举几个二阶系统的例子说明如下，待控系统为

$$y(t+1)=a_1(t)y(t)+a_2(t)y(t-1)+b_1(t)u(t)+b_2(t)u(t-1)+c\cdot e(t), \tag{15}$$

其中$\{e(t)\}$为期望 0、方差 1 的独立同分布序列，通过 c 值来确定随机干扰的方差大小.

例 1 （陡参变情况）系统（15）的参数变化情况为

$$a_1(t)=\begin{cases}1.5 & 1\leqslant t\leqslant 300\\ 0.9 & 300<t\leqslant 1000\end{cases},\qquad a_2(t)=\begin{cases}-0.7 & 1\leqslant t\leqslant 300\\ -0.3 & 300<t\leqslant 1000\end{cases},$$

$$b_1(t)=1,\qquad\qquad b_2(t)=0.5.$$

参数估计$\hat{a}_1(t)$、$\hat{a}_2(t)$、$\hat{b}_1(t)$、$\hat{b}_2(t)$的跟踪情况如图1所示.

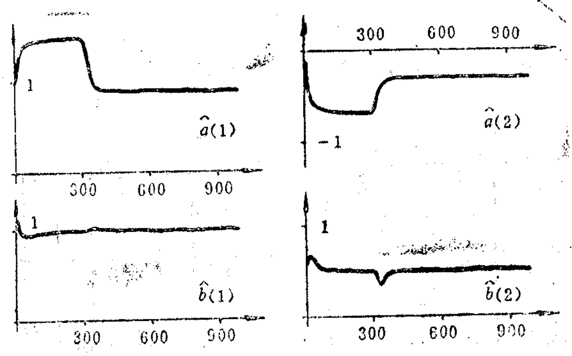

图 1　陡参变系统的参数估计（$c=0.5$，$l=40$）

例　2　（慢参变情况）系统（15）的参数变化情况为

$$a_1(t)=1.5\qquad\qquad a_2(t)=-0.7$$

$$b_1(t)=\begin{cases}1 & 1\leqslant t\leqslant 400\\ 1-0.0015(t-400) & 400<t\leqslant 800\\ 0.4 & 800<t\leqslant 1000\end{cases}$$

$$b_2(t)=\begin{cases}0.5 & 1\leqslant t\leqslant 300\\ 0.5+0.3\sin((k-300)\pi/250) & 300<t\leqslant 800\\ 0.5 & 800<t\leqslant 1000\end{cases}$$

参数估计$\hat{a}_1(t)$、$\hat{a}_2(t)$、$\hat{b}_1(t)$、$\hat{b}_2(t)$的跟踪情况如图2所示.

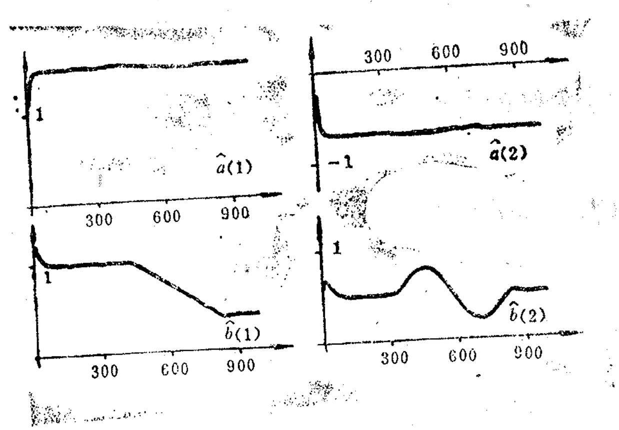

图 2　慢参变系统的参数估计（$c=0.3$，$l=40$）

例 3 （时变系统的自适应控制）系统（15）参数变化情况为

$$a_1(t)=\begin{cases}1.5 & 1\leqslant t\leqslant 200\\ -0.2 & 200<t\leqslant 750\end{cases}\qquad a_2(t)=-0.7$$

$$b_1(t)=1\qquad b_2(t)=\begin{cases}0.5 & 1\leqslant t\leqslant 200\\ 0.5+0.3\sin((k-200)\Pi/400) & 200<t\leqslant 600\\ 0.5 & 600<t\leqslant 750\end{cases}$$

设定输出 $y^*(t)$ 为振幅100的方波函数，系统输出 $y(t)$ 的跟踪情况如图3所示。

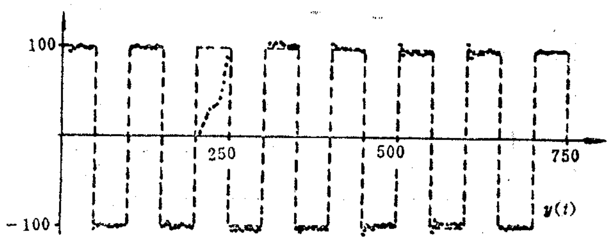

图 3 时变系统自适应控制跟踪情况（$c=1.3$，$l=40$），×表示 $y(t)$

四、附 录

引理 1 设实序列 $\{a_t\}$、非负序列 $\{b_{t,k}|k=1,2,\cdots,t,\ t=1,2\cdots\}$ 满足

i）$\sum\limits_{t=1}^{\infty}a_t$ 收敛；

ii）对所有 t，$b_{t,k}\leqslant b_{t,k+1}$ （$k=1,2,\cdots,t-1$），且对每一固定的 k，$b_{t,k}$ 单调趋于零。$\sup\limits_t b_{t,t}\leqslant M<\infty$，则

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k=1}^{t}a_k b_{t,k}=0.$$

证 略。

引理 2 设 $\{e_k\}$ 为独立同分布随机变量序列，$E e_k=0$，$Ee_k^4=\sigma_4<\infty$，若存在常数 M 及 $\alpha>1$，使得

$$C_{t,k}^2\leqslant Mt^{-\alpha},\quad k=1,2,\cdots t,\quad t=1,2,\cdots$$

则

$$V_t=\sum_{k=1}^{t}C_{t,k}\,e_k\to 0\quad a.s.\qquad (t\to\infty)$$

证 令 $C_{t,k}^{+}=\max\{C_{t,k},\ 0\}$，$C_{t,k}^{-}=\max\{-C_{t,k},0\}$，则

$$P\{|V_t|>\varepsilon\}\leqslant P\{\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^{+}e_k>\frac{\varepsilon}{4}\}+P\{\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^{-}e_k>\frac{\varepsilon}{4}\}$$
$$+P\{\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^{+}e_k<-\frac{\varepsilon}{4}\}+P\{\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^{-}e_k<-\frac{\varepsilon}{4}\}.$$

因此不失一般性，可设$C_{t,k}>0$，且考虑$V_t\geqslant0$的情形

设　$\beta=\alpha-1$，则 $C_t=\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}^2\leqslant Mt^{-\beta}$，

取正数$\gamma<\beta/4$，令

$$e'_{t,k}=e_kI_{[C_{t,k}e_k\leqslant t^{-\gamma}]},\quad V'_t=\sum_{k=1}^{t}C_{t,k}\ e'_{t,k}$$

对任意$\varepsilon>0$，我们有

$$\sum_{t=1}^{\infty} P\{V'_t>\varepsilon\}<\infty. \tag{16}$$

事实上，对每一t 令 $\delta=\min\{\varepsilon/2C_t,\ t^{\gamma}\}$，则$\delta C_{t,k}\ e'_{t,k}\leqslant1$.由此可推得

$$P\{V'_t>\varepsilon\}\leqslant e^{-\varepsilon\delta}E\ e^{\delta V'_t}\leqslant e^{-\varepsilon\delta+C_t\delta^2}$$

若 $\varepsilon/2C_t\leqslant t^{\gamma}$，则

$$P\{V'_t>\varepsilon\}\leqslant e^{-\varepsilon t^{\gamma}/2}.$$

若 $\varepsilon/2C_t>t^{\gamma}$，则

$$P\{V'_t>\varepsilon\}\leqslant e^{-\varepsilon^2 t^{\beta}/4M}.$$

而级数$\sum_{t=1}^{\infty} e^{-\varepsilon t^{\gamma}/2}$、$\sum_{t=1}^{\infty} e^{-\varepsilon^2 t^{\beta}/4M}$都收敛，因此(16)式成立.

再取 $N>\frac{2}{\beta}$，令

$$e''_{t,k}=e_kI_{[C_{t,k}e_k>\varepsilon/N]},\ V''_t=\sum_{k=1}^{t}C_{t,k}e''_{t,k},\ \text{则}$$

$$P\{V''_t>\varepsilon\}\leqslant D(V''_t)/\varepsilon^2\leqslant(\max_{k\leqslant t}C_{t,k}^2)\cdot\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{t}E(e''_{t,k})^2$$
$$\leqslant Mt^{-\alpha}/\varepsilon^2\cdot\sum_{k=1}^{t}Ee_k^2\ I_{[e_k>\varepsilon/N\cdot C_{t,k}]}$$
$$\leqslant Mt^{-\alpha}/\varepsilon^2\cdot N^2MEe_1^{\ 4}/\varepsilon^2=M^2N^2\sigma_4t^{-\alpha}/\varepsilon^4.$$

因此 $$\sum_{t=1}^{\infty} P\{V_t''>\varepsilon\}\leqslant\sum_{t=1}^{\infty} M^2N^2\sigma_4 t^{-\alpha}/\varepsilon^4<\infty. \tag{17}$$

令 $e_{t,k}'''=e_k I_{[t^{-\gamma}<C_{t,k}e_k\leqslant\varepsilon/N]}$, $V_t'''=\sum_{k=1}^{t} C_{t,k}e_{t,k}'''$, 则

$$V_t=V_t'+V_t''+V_t''',$$

我们有

$$P\{V_t'''>\varepsilon\}\leqslant P\{\omega:\text{至少}N\text{次使}e_{t,k}'''\neq 0,\ k=1,2,\cdots,t\}$$

$$\leqslant\sum_{1<k_1<\cdots<k_N\leqslant t}\prod_{j=1}^{N}P\{C_{t,k_j}e_{t,k_j}'''>t^{-\gamma}\}$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{t}P\{C_{t,k}e_{t,k}'''>t^{-\gamma}\}\right)^N$$

$$\leqslant\left(\sum_{k=1}^{t}C_{t,k}^2t^{2\gamma}\cdot\sigma_2\right)^N\leqslant\left(Mt^{-\beta+2\gamma}\sigma_2\right)^N$$

$$\leqslant(M\sigma_2)^N t^{-N\beta/2},$$

其中 $\sigma_2=Ee_t^2$.由N的选择可知 $N\beta/2>1$,因此

$$\sum_{t=1}P\{V_t'''>\varepsilon\}<\infty. \tag{18}$$

由(16)、(17)、(18)三式知，对任意$\varepsilon>0$有

$$\sum_{t=1}^{\infty}P\{V_t>\varepsilon\}<\infty.$$

根据 Borel-Cantelli 引理得

$$\lim_{t\to\infty}V_t=0 \qquad a.s.$$

参考文献

〔1〕 Fortescue, T. R., L. S. Kershenbaum, and B. E. Ydstie., Implementation of Self Tuning Regulators with Variable Forgetting Factors, Automatica, 17, (1981), 831-835.

〔2〕 Cordero, A. O. and D. Q. Mayne, Deterministic Convergence of a Self Tuning Regulator with Variable Forgetting Factor, Proc. IEE, 128, (1981), 19-23.

〔3〕 Xianya, X. and Evans, R. J., Discrete Time Adaptive Control for Deterministic Time-varying Systems, Technical Report EE 8225, Dept of Electrical & Computer Engng, Univ of Newcastle, N. S. W., (1982).

[4] Anderson, B. D. O. and R. M. Johstone., Adaptive Sestems and Time Varying Plants, Int. J. Control, 37, (1983), 367-377.

[5] Goodwin, G. C., D. J. Hill, and X. Xianya, Stochastic Adaptive Control for Exponentially Convergent Time-varying Systems, Technical Report EE 8407, Dept of Electrical & Computer Engng, univ of Newcastle, (1984).

[6] Goodwin, G. C., D. J. Hill, and M. Palaniswani, A perspective on Convergence of Adaptive Control Agorithms, Automatica, 20, (1984), 519-531.

[7] Caines, P. E. and H. F. Chen, on the Adaptive Control of Stochastic System with Random Parameters: A Counter Example, ISI Workshop on Adaptive Control, Florence, Italy, (1982).

[8] Goodwin, G. C., P. J. Ramadge, and P. E. Caines, Discrete Time Stochastic Adaptive Control, SIAM J. Control Optimiz, 19, (1981), 829-853.

A New Algorithm for Parameter Estimation for Time-varying System

Fang Dingfa

(Department of Mathematics, East China Normal University, Shanghai)

Abstract

In this paper, we present a new identification algorithm which is applicable to parameter estimation and adaptive control for a class of time-varying system. The strong consistency of parameter estimation and the optimality of adaptive control are also proved on general condition. Good results are shown by simulation examples.