第5卷 第3期 控制理论与应用 Vol.5, No.3
1988年9月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Sept., 1988

多时延系统最优控制的沃尔什变换算法*

童调生 陈明武 张海沙
(湖南大学电气工程系，长沙)

摘 要

本文将[1]的结果推广到时延系统，应用沃尔什变换把多时延系统的最优控制问题转化成函数极值问题，给出了一种矩阵代数解的算法，避免了解延时微分方程和反复迭代的困难。

一、延时系统时间域传递特性

线性定常延时系统一般可表示为

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+\sum_{k=1}^{p}C_k x(t-s_k)+\sum_{g=1}^{q}D_g u(t-d_g), \tag{1}$$

初始函数

$$x(t)=x_{[-s,0]},\quad s\leqslant t\leqslant 0,\quad s=\max_k(s_k),$$

$$u(t)=u_{[-d,0]},\quad d\leqslant t\leqslant 0,\quad d=\max_g(d_g),$$

式中，状态向量 $x\in R^n$，控制向量 $u\in R^r$，A、B、$C_k(k=1,\cdots,p)$、$D_g(g=1,\cdots,q)$是常数阵，$s_k(k=1,\cdots,p)$、$d_g(g=1,\cdots,q)$分别是状态和控制的延时量。

由(1)可得延时系统的解式

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)Bu(\tau)d\tau+\int_0^t\Phi(t-\tau)\left[\sum_{k=1}^{P}C_k x(\tau-s_k)\right]d\tau$$
$$+\int_0^t\Phi(t-\tau)\left[\sum_{g=1}^{q}D_g u(\tau-d_g)\right]d\tau. \tag{2}$$

若控制区间为[0, T]，设$u(t)$各分量在区间$(-d, T]$上是2^m有限序率的，将区间$[0,T)$分成N个长度为$\Delta t=\dfrac{T}{N}$的子区间，将区间$(-d_m, 0]$从右向左也按长度Δt

---

*国家自然科学基金资助的课题。

本文于1987年5月30日收到。1988年1月27日收到修改稿。

分段，$d_m=\max(s,\ d)$，且$N=2^m$（m为正整数，则$u(t)$在长度为Δt的各子区间$[i\Delta t,\ (i+1)\Delta t)$上取常值。又设$s_k=l_k\Delta t\ (k=1,\ \cdots,\ p)$，$d_g=h_g\Delta t\ (g=1,\cdots,q)$，令

$$\left.\begin{aligned}&\Pi=[B\ C_1\ C_2\cdots C_p\ D_1\ D_2\cdots D_p],\\&\mu(\tau)=[u^T(\tau),x^T(\tau-l_1\Delta t),\cdots,x^T(\tau-l_p\Delta t),\\&\quad u^T(\tau-h_1\Delta t),\cdots,u^T(\tau-h_g\Delta t)]\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

利用近似表达式

$$\overline{x}(i\Delta t)\triangleq\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}x(t)dt\approx x(t),\quad t\in[i\Delta t,\ (i+1)\Delta t),\tag{4}$$

且设$\sigma=\tau-j\Delta t$，则由（2）可得

$$\begin{aligned}&x(i\Delta t)=\Phi^i(\Delta t)x(0)+\sum_{j=0}^{i-1}\Phi^{(i-1-j)}(\Delta t)H(\Delta t)\overline{\mu}(j\Delta t),\\&\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ N-1,\end{aligned}\tag{5}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&\overline{\mu}(j\Delta t)=[\overline{u}^T(j\Delta t),\overline{x}^T(j\Delta t-l_1\Delta t),\cdots,\overline{x}^T(j\Delta t-l_p\Delta t),\\&\quad\overline{u}^T(j\Delta t-h_1\Delta t),\cdots,\overline{u}^T(j\Delta t-h_g\Delta t)],\\&H(\Delta t)=\int_0^{\Delta t}\Phi(\sigma)\Pi d\sigma,\end{aligned}\right\}\tag{6}$$

在引入了（4）（5）（6）以后，就可以引用文[1]的结果得到（5），以及下面的（7）～（13）各式。

在第$i+1$个子区间$[i\Delta t,\ (i+1)\Delta t)$上把$i\Delta t$取作初始时刻，（2）可改写为

$$x(t)=\Phi(t-i\Delta t)x(i\Delta t)+\int_{i\Delta t}^{t}\Phi(t-\tau)\Pi d\tau\mu(i\Delta t),\tag{7}$$

两边取均值得

$$\left.\begin{aligned}&\overline{x}(i)\triangleq\overline{x}(idt)=\overline{\Phi}(\Delta t)x(i\Delta t)+\overline{H}(\Delta t)\mu(i\Delta t),\\&\Phi(\Delta t)=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}\Phi(\tau)d\tau,\ \overline{H}(\Delta t)=\frac{1}{\Delta t}\int_0^{\Delta t}H(\tau)d\tau,\end{aligned}\right\}\tag{8}$$

把N个$\overline{x}(i)$和$\overline{\mu}(i)$分别合写为

$$\overline{x}=[\overline{x}^T(0),\ \overline{x}^T(1),\cdots,\ \overline{x}^T(N-1)]^T_{Nn},\tag{9}$$

$$\overline{\mu}=[\overline{\mu}^T(0),\overline{\mu}^T(1),\ \cdots,\ \overline{\mu}^T(N-1)]^T_{N(r+pn+qr)},\tag{10}$$

仍然运用近似表达式（4），把（6）写成矩阵形式

$$\left.\begin{aligned}&x(i\Delta t)=\Phi^i(\Delta t)x(0)+H_i^*(\Delta t)\overline{\mu},\ i=0,\cdots,N-1\\&H_i^*(\Delta t)=[\Phi^{i-1}(\Delta t)H(\Delta t),\Phi^{i-2}(\Delta t)H(\Delta t),\ \cdots\\&\quad\Phi(\Delta t)H(\Delta t),H(\Delta t),0,\cdots,0]_{n\times(N(r+pn+qr))}\end{aligned}\right\}\tag{11}$$

把（11）代入（8）得到

$$\left.\begin{aligned}&\overline{x}(i)=\Gamma(i)x(0)+\Psi(i)\overline{\mu},\\&\Gamma(i)=\overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i}(\Delta t),\\&\Psi(i)=[\overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i-1}(\Delta t)H(\Delta t),\ \overline{\Phi}(\Delta t)\Phi^{i-2}(\Delta t)H(\Delta t),\\&\qquad\cdots,\ \overline{\Phi}(\Delta t)H(\Delta t),\ \overline{H}(\Delta t),0,\cdots,0]\end{aligned}\right\}\tag{12}$$

由（9）（10）（12）可写成

$$\overline{x}=\begin{pmatrix}\Gamma(0)\\\Gamma(1)\\\vdots\\\Gamma(N-1)\end{pmatrix}x(0)+\begin{pmatrix}\Psi(0)\\\Psi(1)\\\vdots\\\Psi(N-1)\end{pmatrix}\overline{\mu}=\Gamma x(0)+\Psi\overline{\mu}.\tag{13}$$

由（10）（6），注意到

$$\begin{aligned}\overline{\mu}=[&\overline{u}^T(0),\ \overline{x}^T(-l_1),\cdots\overline{x}^T(-l_p),\ \overline{\mu}^T(-h_1),\cdots,\overline{u}^T(h_q)\vdots\\&\overline{u}^T(1),\overline{x}^T(1-l_1),\cdots\overline{x}^T(1-l_p),\overline{u}^T(1-h_1),\cdots,\overline{u}^T(1-h_q)\vdots\cdots\vdots\\&\overline{u}^T(N-1),\overline{x}^T(N-1-l_1),\cdots,\overline{x}^T(N-1-l_p),\ \overline{u}^T(N-1-h_1),\\&\cdots,\ \overline{u}^T(N-1-h_q)].\end{aligned}\tag{14}$$

对应于（14）的分块，对（13）中的Ψ作分块处理

$$\begin{aligned}\Psi=[&\Psi_0\ \Psi_{l_1}\cdots\Psi_{l_p}\Psi_{h_1}\cdots\Psi_{h_q}\vdots\Psi_1\Psi_{1-l_1}\cdots\Psi_{1-l_p}\Psi_{h_1}\\&\cdots\Psi_{1-h_q}\vdots\cdots\vdots\Psi_{N-1}\Psi_{N-1-l_1}\cdots\Psi_{N-1-l_p}\Psi_{N-1-h_1}\cdots\Psi_{N-1-h_q}].\end{aligned}\tag{15}$$

再把（13）中的$\Psi\ \overline{u}$按（14）（15）分块处理后的结果展开，得到

$$\overline{x}=\Gamma x(0)+E\overline{u}+F\overline{x_l}+G\overline{u_h},\tag{16}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}&E=[\Psi_0,\cdots\Psi_{N-1}],F=[\Psi_{-l_1}\ \cdots\Psi_{-l_p}\ \cdots\Psi_{N-1-l_1}\ \cdots\Psi_{N-1-l_p}],\\&G=[\Psi_{-h_1}\ \cdots\Psi_{-h_q}\ \cdots\Psi_{N-1-h_1}\ \cdots\Psi_{N-1-h_q}],\\&\overline{x_l}=[\overline{x}^T(-l_1)\cdots\overline{x}^T(-l_p)\cdots\overline{x}^T(N-1-l_1)\cdots\overline{x}^T(N-1-l_p)]^T,\\&\overline{u_h}=[\overline{u}^T(-h_1)\cdots\overline{u}^T(-h_q)\cdots\overline{u}^T(N-1-h_1)\cdots\overline{u}^T(N-1-h_q)]^T,\\&\overline{u}=[\overline{u}^T(1),\ \overline{u}^T(2)\cdots\overline{u}^T(N-1)]^T.\end{aligned}\right\}\tag{17}$$

把（16）的第三、四项写成有限和，则有

$$\overline{x}=\Gamma x(0)+E\overline{u}+\sum_{k=1}^{p}F_k\overline{x}_{l_k}+\sum_{g=1}^{q}G_g\overline{u}_{h_g}.\tag{18}$$

由（17）知

$$\left.\begin{aligned}
\bar{\mathbf{x}}_{l_k} &= [\bar{\mathbf{x}}^T(-l_k) \cdots \bar{\mathbf{x}}^T(N-1-l_k)],\\
F_k &= [\Psi_{-l_k} \cdots \Psi_{N-1-l_k}] \quad k=1,\cdots,p,\\
\bar{\mathbf{u}}_{h_g} &= [\bar{\mathbf{u}}^T(-h_g) \cdots \bar{\mathbf{\mu}}^T(N-1-h_g)],\\
G_g &= [\Psi_{-h_g} \cdots \Psi_{N-1-h_g}] \quad g=1,\cdots,q
\end{aligned}\right\} \tag{19}$$

对（18）中的 $F_k\ \bar{\mathbf{x}}_{l_k}$ 分块处理，从 $\bar{\mathbf{x}}_{l_k}$ 中分离出 $\bar{\mathbf{x}}$ 和初始函数

$$F_k\bar{\mathbf{x}}_{l_k} = F_{1k}\bar{\mathbf{x}}_{[-s,0]k} + F_{2k}\bar{\mathbf{x}} \quad k=1,\cdots,p, \tag{20}$$

其中，

$$\bar{x}_{[-s,0]k} = [\bar{\mathbf{x}}^T(-l_k),\ \bar{\mathbf{x}}^T(1-l_k),\cdots,\bar{\mathbf{x}}(-1)];$$

$$F_{1k} = \begin{pmatrix} F_{k,11} & \cdots & F_{k,1l_k} \\ \vdots & & \\ F_{k,N1} & \cdots & F_{k,Nl_k} \end{pmatrix}, F_{2k} = \begin{pmatrix} F_{k,1l_{k+1}} & \cdots & F_{k,1N} & 0\cdots0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots\ \vdots \\ F_{k,Nl_{k+1}} & \cdots & F_{k,NN} & 0\cdots0 \end{pmatrix}. \tag{21}$$

对（18）中的 $G_g\ \bar{u}_{h_g}$ 作类似处理得

$$G_g\ \bar{\mathbf{u}}_{h_g} = G_{g1}\bar{\mathbf{u}}_{[-d,0]} + G_{g2}\bar{u} \quad g=1,\cdots,q, \tag{22}$$

其中，

$$\bar{\mathbf{u}}_{[-d,0]g} = [\bar{u}^T(-h_g),\ \bar{u}^T(1-h_g) \cdots \bar{u}^T(-1)],$$

$$G_{1g} = \begin{pmatrix} G_{g,11} & \cdots & G_{g,1h_g} \\ \vdots & & \vdots \\ G_{g,N1} & \cdots & G_{g,Nh_g} \end{pmatrix},\ G_{2g} = \begin{pmatrix} G_{g,1h_{g+1}} & \cdots & G_{g,1N} & 0\cdots0 \\ & & & \\ G_{g,Nh_{g+1}} & \cdots & G_{g,NN} & 0\cdots0 \end{pmatrix}. \tag{23}$$

经过以上处理，并设 $\left[1-\sum_{k=1}^{p} F_{2k}\right]^{-1}$ 存在，则有

$$\bar{\mathbf{x}} = M\mathbf{x}(0) + K\bar{\mathbf{u}} + L, \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned}
M &= \left[1-\sum_{k=1}^{p} F_{2k}\right]^{-1}\Gamma,\\
K &= \left[1-\sum_{k=1}^{p} F_{2k}\right]^{-1}\left(E+\sum_{g=1}^{q} G_{2g}\right),\\
L &= \left[1-\sum_{k=1}^{p} F_{2k}\right]^{-1}\left[\sum_{k=1}^{p} F_{1k}\bar{\mathbf{x}}_{[-s,0]k} + \sum_{g=1}^{q} G_{1g}\bar{u}_{[-d,0]g}\right].
\end{aligned}\right\} \tag{25}$$

L可由初始函数得到，为常量。

二、时延系统在序率域中的传递特性

由（24），根据沃尔什变换不难得到

$$\hat{x} = \hat{M}x(0) + \hat{K}\,\hat{u} + \hat{L}, \tag{26}$$

其中，$\hat{x}$、$\hat{u}$ 分别是状态和控制的沃尔什变换式

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{x} \triangleq (I_n \otimes W_N^{(s)})\,T_x\,\overline{x},\\
&\hat{u} \triangleq (I_r \otimes W_N^{(s)})\,T_u\,\overline{u},\\
&\hat{M} = (I_n \otimes W_N^{(s)})\,T_x M,\\
&\hat{K} = \frac{1}{N}(I_n \otimes W_N^{(s)})\,T_x K T_u^T\,(I_r \otimes W_N^{(s)}),\\
&\hat{L} = (I_n \otimes W_N^{(s)})\,T_x L.
\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

以上诸式中 $W_N^{(s)}$ 是沃尔什变换阵；I_n、I_r 分别为 $n\times n$、$r\times r$ 的单位阵；$\otimes$表示克罗内克乘积；T_x、T_u 为置换阵，它们的第三行 k 列的元素为

$$\left.\begin{aligned}
&[T_x]_{ik} = \begin{cases} 1 & 当 k = \left[\dfrac{i-1}{N}\right](1-nN) + (i-1)n + 1,\\ 0 & 否则\end{cases}\\
&[T_u]_{ik} = \begin{cases} 1 & 当 k = \left[\dfrac{i-1}{N}\right](1-rN) + (i-1)r + 1,\\ 0 & 否则\end{cases}
\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

三、利用沃尔什变换把延时系统最优控制问题转变为函数极值的算法

定义性能指标

$$J = \int_0^T [x^T(t)Q(t)x(t) + u^T(t)R(t)u(t)]dt, \tag{29}$$

其中，$Q(t) \geqslant 0$，$R(t) > 0$。

当控制和状态用有限沃尔什变换式（27）表出后，则有[1]

$$J = \Delta t\,(\hat{x}^T\hat{Q}\,\hat{x} + \hat{u}^T\hat{R}\,\hat{x}), \tag{30}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}
&\hat{Q}=\frac{1}{N^2}[I_n\otimes W_N^{(s)}]T_x\overline{Q}T_x^T[I_n\otimes W_N^{(s)}],\\
&\overline{Q}=\mathrm{diag}[\overline{Q}(0),\overline{Q}(1),\cdots,\overline{Q}(N-1)],\\
&\overline{Q}(i)=\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}Q(\tau)d\tau,\ i=0,\ \cdots,\ N-1,\\
&\hat{R}=\frac{1}{N^2}[I_r\otimes W_N^{(s)}]T_u\overline{R}T_u^T[I_r\otimes W_N^{(s)}],\\
&\overline{R}=\mathrm{diag}[\overline{R}(0),\overline{R}(1),\cdots,\overline{R}(N-1)],\\
&\overline{R}(i)=\frac{1}{\Delta t}\int_{i\Delta t}^{(i+1)\Delta t}R(\tau)d\tau,\ i=0,\ \cdots,\ N-1.
\end{aligned}\right\}\tag{31}$$

把(27)代入(30)得到

$$J(\hat{u})=\Delta t\{\hat{u}\hat{\Lambda}\hat{u}+\hat{u}^T(\hat{\Phi}x(0)+\hat{\Omega})+(x^T(0)\hat{\Phi}^T+\hat{\Omega})\hat{u}$$
$$+(x^T(0)\hat{M}^T+\hat{L}^T)\hat{Q}(\hat{M}x(0)+\hat{L})\},\tag{32}$$

其中，

$$\hat{\Lambda}=\hat{K}^T\hat{Q}\hat{K}+\hat{R},\quad \hat{\Phi}=\hat{K}^T\hat{Q}\hat{M},\quad \hat{\Omega}=\hat{K}^T\hat{Q}\hat{L}.\tag{33}$$

(32)表示了J与$\hat{u}$的函数，由

$$\left.\frac{dJ}{dQ}\right|_{\hat{u}=\hat{u}^*}=0,$$

得到最优控制在序率域的表达式

$$\hat{u}^*=-(\hat{K}^T\hat{Q}\hat{K}+\hat{R})^+(\hat{K}^T\hat{Q}\hat{M}x(0)+\hat{K}^T\hat{Q}\hat{L}),\tag{34}$$

其中，$(\cdot)^+$是$(\cdot)$的广义逆．应用有限沃尔什逆变换及(27)，可得到最优控制在时间域内的表达式

$$\overline{u}^*=-\frac{1}{N}T_u^T(I_r\otimes W_N^{(s)})\hat{\Lambda}^+(\hat{\Phi}x(0)+\hat{\Omega}).\tag{35}$$

把$\overline{u}^*$代入(24)可得$\overline{x}^*$。(25)就是应用沃尔什变换，在采样和保持下求得的时延系统二次型性能指标的最优控制，它是连续时间最优控制的一种很好近似．以上算法可称作极值代数法．

如果在二次型性能指标J中还含有终端项$x^T(T)Sx(T)$，则可通过适当选择$Q(t)$，把$x^T(T)Sx(T)$合并到积分号内的$x^T(t)Q(t)x(t)$中去．

如果不是二次型指标，也可以通过以上类似的方法得到最优控制问题的函数极值算法．

例 题　在状态和控制中具有时延的系统：

$$\dot{x}_1=x_2,$$

$$\dot{x}_2 = -16.7x_2 + 868x_3,$$

$$\dot{x}_3 = -3.33x_3 + 8x_1(t-0.30033) + 1000u(t-0.0033).$$

边界条件：

$$\left.\begin{aligned} x(t)=0 \\ u(t)=0 \end{aligned}\right\} \qquad t\in[-0.30033,\ 0],$$

$$x_1(T)=20,\ x_2(T)=0,\ x_3(T)=0,\ T=5$$

作性能指标

$$J'=\int_0^5 \frac{1}{2}[(x_1-20)^2+Ru^2]dt,$$

考虑到终端约束条件，在上述性能指标中用罚函数引入终端项

$$J=\frac{1}{2}\{s_1(x_1(t_f)-20)^2+s_2x_2^2(t_f)+s_3x_3^2(t_f)$$

$$+\int_0^T \frac{1}{2}[(x_1-20)^2+Ru^2]dt.$$

取权系数$R=5$，$s_1=s_2=s_3=1000$。$N=32$。用计算机按以上所给程序计算出的最优控制$\overline{u^*}$和最优轨线$\overline{x_1^*}$如图1所示，图上阶梯形曲线是应用极值代数法计算的结果；而点

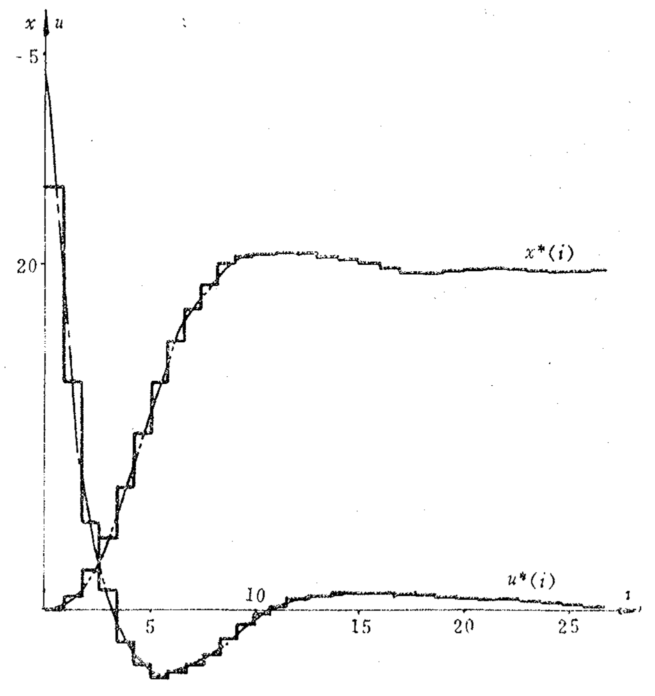

图 1 例题用极值代数法所得的最优解

曲线是用共轭梯度法寻优仿真的结果，由图可见，二者具有较高的相对精度。

参 考 文 献

〔1〕 关肇直、陈文德,沃尔什函数与沃尔什变换,国防工业出版社,北京,(1984),125—132.

〔2〕 Palanisamy, K. R., P. G. Rao, Optimal Control of Linear System with Delays in State and Control Via Walsh Function, IEE Proc. D, 130: 6, (1983), 234—238.

〔3〕 Hasdorff, L., Gradient Optimization and Nonlinear Control, WILEY-INTERSCIENCE Pub., (1976), 160—165.

〔4〕 童调生，离散多时延系统的增广系统，科学通报，6，(1988)，477—478.

An Algorithm for Solving Optimal Control of Multi-time-delays Systems by Walsh Transformation

Tong Tiaosheng, Chen Mingwu, Zhang Haisha

(Department of Electrical Engineering, Hunan University, Changsha)

Abstract

This paper extend the result of reference〔1〕to systems with delays, and the optimal control problem of systems with mlti-delays is transformed into an extremal problem by walsh transformation. An arithmetic of algebrac-matrix solution is given. The difficulty of solving time-delay differencial equation and iterative iteration is avoided.