第5卷 第3期　　控制理论与应用　　Vol.5, No.3
1988年9月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Sept., 1988

带有分数时滞采样系统的零点

张永光　　　马润津

（中国科学院系统科学研究所，北京）　（北方工业大学工学部，北京）

摘　要

本文考虑带有时间延迟连续系统的采样系统的零点．在T_0间隔下对此系统进行采样，系统的时滞为τ，$\tau=(d+\rho)T_0$，d为整数，$0\leqslant\rho<1$．文中证明了采样系统的零点与ρ有密切关系，ρ从0趋于1时，采样系统的零点运动呈现固定的规律．

一、分数时滞采样系统及其传递函数

许多文献研究过有时滞的连续系统的采样系统及其控制[1,2,3,4]，但基本上都假定时滞τ为采样间隔T_0的整数倍，这种假设非常勉强．此外，自校正控制器也要求最小相位条件[5,6]．因此，采样系统的零点问题一直受到人们的关注．〔1〕文对于不含时滞的采样系统的零点做了深入的研究，对$T_0\to 0$及$T_0\to\infty$两种极限情形进行了解析描述。同时，〔1〕文的例8还显示了对于一阶系统分数时滞直接影响采样系统的零点．本文在此基础上深入研究有分数时滞采样系统的零点。

我们考虑如下的连续系统：

$$G(s)=\frac{K\cdot P(s)}{Q(s)}e^{-\tau s}=\frac{K\cdot(s-z_1^*)\cdots(s-z_m^*)}{(s-p_1^*)\cdots(s-p_n^*)}e^{-\tau s},\quad(m<n)\tag{1}$$

这里p_i^*与z_i^*分别为连续系统的极点和零点，K为增益，τ为时间延迟．若采样间隔为T_0，则$\tau=(d+\rho)T_0$，d为整数，$0\leqslant\rho<1$，称为时滞的分数部分。当$\rho=0$时，采样系统（包含一个零阶保持器）的脉冲传递函数为

$$H(z)=\frac{B(z)}{A(z)}z^{-d}\triangleq\frac{b_1z^{-1}+\cdots+b_nz^{-n}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}z^{-d}$$

$$=\frac{b_1z^{n-1}+\cdots+b_n}{z^n+a_1z^{n-1}+\cdots+a_n}z^{-d},\quad(b_1\neq 0)\tag{2}$$

对于$\rho=1$的情形，只要将（2）中的d换为$d+1$即可。

当$0<\rho<1$时，为了得到采样系统的脉冲传递函数，使用扩展的（modified）z变换方法〔7〕得到

本文于1987年7月28日收到。1988年1月21日收到修改稿。

$$H(z;\rho)=\frac{B'(z;\rho)}{A(z)}z^{-d}=\frac{b_1'(\rho)z^{-1}+\cdots+b_n'(\rho)z^{-n}+b_{n+1}'(\rho)z^{-n-1}}{1+a_1z^{-1}+\cdots+a_nz^{-n}}z^{-d}$$

$$=\frac{b_1'(\rho)z^n+\cdots+b_{n+1}'(\rho)}{(z^n+\cdots+a_n)z}z^{-d}。\tag{3}$$

比较$H(z)$与$H(z;\rho)$可知，由于分数时滞$0<\rho<1$的存在，使采样系统的零点从$n-1$个增加至n个，还增加了一个极点$p_{n+1}=0$；原来的n个极点没有发生变化。可见分数时滞主要影响采样系统的零点。

二、零点运动的极限过程

由扩展z变换的性质，有$\lim\limits_{\rho\to 0}H(z;\rho)=H(z)$及$\lim\limits_{\rho\to 1}H(z;\rho)=z^{-1}H(z)$。又因为扩展$z$变换关于变量$\rho$连续，在(3)中只有分子$B'(z;\rho)$与$\rho$有关。所以，$\lim\limits_{\rho\to 0}B'(z;\rho)=B(z)$及$\lim\limits_{\rho\to 1}B'(z;\rho)=z^{-1}B(z)$。这个关系由$B'(z;\rho)$及$B(z)$的多项式系数之间的极限关系体现。

首先考虑$\rho\to 0$的情形。

由$\lim\limits_{\rho\to 0}B'(z;\rho)=B(z)$，所以必有

$$\begin{cases}\lim\limits_{\rho\to 0}\ b_i'(\rho)=b_i'(0)=b_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\\ \lim\limits_{\rho\to 0}\ b_{n+1}'(\rho)=b_{n+1}'(0)=0。\end{cases}\tag{4}$$

令 $z_1,z_2,\cdots,z_{n-1}$是(2)中$H(z)$的$n-1$个零点，$z_1'(\rho),\cdots,z_n'(\rho)$是(3)中$H(z;\rho)$的$n$个零点。由多项式根与系数的关系可知

$$b_{n+1}'(\rho)/b_1'(\rho)=\prod_{i=1}^{n}z_i'(\rho)。\tag{5}$$

因为$b_{n+1}'(0)=0$，所以在$z_i'(0)$，$i=1,\cdots,n$中必有一个为0，不妨令为$z_1'(0)=0$。而且有

$$\lim_{\rho\to 0}\ z_{i+1}'(\rho)=z_{i+1}'(0)=z_i,\tag{6}$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

由(3)可知，$H(z;\rho)$恒有一个零极点$p_{n+1}=0$，于是当$\rho\to 0$时，$z_1'(0)=0$与$p_{n+1}=0$产生零极相消，而使$H(z;0)$与$H(z)$完全重合。为了理论上叙述方便，对

$H(z)$ 我们假定有一个0零点及一个0极点存在。

下边考虑 $\rho\to1$ 的极限情形。

由 $\lim\limits_{\rho\to1} B'(z;\rho)=z^{-1}B(z)$，所以必有

$$\begin{cases}\lim\limits_{\rho\to1} b'_{i+1}(\rho)=b'_{i+1}(1)=b_i, & i=1,2,\cdots,n\\ \lim\limits_{\rho\to1} b'_1(\rho)=b'_1(1)=0.\end{cases} \tag{7}$$

这意味着 $z'_i(\rho)\to z_i(\rho\to1)$ $i=1,\cdots,n-1$，而 z^{-1} 这个因子相当于一个在∞处的零点，因此，在 n 个 $z'_i(\rho)$ 中不妨令 $z'_n(\rho)\to\infty$。而这又相当于一个向后推移算子 z^{-1}，与 z^{-d} 结合后成为 $z^{-(d+1)}$。

把上述两个极限过程，利用 $H(z;\rho)$ 关于 ρ 的连续性可以合并为一个过程，即分数时滞 ρ 从0趋于1的极限过程：

$$\begin{array}{lccccc}\rho=1 & z_1 & z_2 & \cdots & \infty(z^{-1}),\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\\ 0<\rho<1 & z'_1(\rho) & z'_2(\rho) & \cdots & z'_n(\rho),\\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & & \uparrow\\ \rho=0 & 0 & z_1 & \cdots & z_{n-1}.\end{array} \tag{8}$$

在这个极限过程中，一个0零点运动到 z_1，而 z_1 运动到 z_2，$\cdots$，z_{n-1} 则向∞运动，最终的极限相当于增加了一个时间延迟单位 z^{-1}。

由上述分析可知，当存在分数延迟时，各个零点相对于 $\rho=0$ 时产生了一个位移，若 $\rho\doteq0$，则有一个零点非常靠近原点，而其余的 $n-1$ 个零点与 $\rho=0$ 时的零点（即 $H(z)$ 的零点）非常靠近。若 $\rho\doteq1$，则有一个零点会远离原点，它很容易落在单位圆外，而其余的 $n-1$ 个零点与 $H(z)$ 的 $n-1$ 个零点非常靠近，从而使得系统必然为非最小相位的。这个结果可以叙述为下述定理。

定理 对于系统（1）以采样间隔 T_0 进行采样得到的采样系统（3），有如下结果：

（i）采样系统（3）的极点与 d，ρ 无关，而零点直接与 ρ 有关，当 ρ 从0趋于1时，采样系统（3）的零点如下变化：

$$(0,z_1,\cdots,z_{n-1})\longrightarrow(z'_1(\rho),\cdots,z'_n(\rho))\longrightarrow(z_1,\cdots,z_{n-1},\infty).$$

（ii）如果 $H(z;0)=H(z)$ 是最小相位的，则存在 $\delta_1>0$，$\delta_2>0$，$0<\delta_1\leqslant\delta_2<1$，使当 $0<\rho<\delta_1$ 时，采样系统（3）一定是最小相位的，而当 $\delta_2<\rho<1$ 时，采样系统（3）一定是非最小相位的。

如果考虑到[2]中已有的结果，可知系统（1）的采样系统（3）成为非最小相位系统的可能性是很大的。对于任何基于最小相位假定的控制律，应用于（3）遭到失败的可能性也是非常显然的，所以选择采样间隔 T_0 是必要的。

三、仿真计算结果

例　考虑二阶系统

$$G(s)=K\cdot e^{-\tau s}/(s+a)(s+b), \tag{9}$$

其中　$a\neq b$，可以是不同的实根或一对共轭复根，在零阶保持器下以 T_0 间隔对（9）进行采样，得到

$$H(z;\ \rho)=\frac{b_1'(\rho)z^{-1}+b_2'(\rho)z^{-2}+b_3'(\rho)z^{-3}}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}}z^{-d}, \tag{10}$$

其中

$$\left\{\begin{aligned}
b_1'(\rho)&=\frac{Ka}{a-b}(1-e^{-(1-\rho)bT_0})-\frac{Kb}{a-b}(1-e^{-(1-\rho)aT_0}),\\
b_2'(\rho)&=\frac{Ka}{a-b}(e^{-(1-\rho)bT_0}-e^{-bT_0})-\frac{Kb}{a-b}(e^{-(1-\rho)aT_0}-e^{-aT_0})\\
&\quad-\frac{Ka}{a-b}(-e^{-(1-\rho)bT_0})e^{-aT_0}+\frac{Kb}{a-b}(1-e^{-(1-\rho)aT_0})e^{-bT_0},\\
b_3'(\rho)&=\frac{Ka}{a-b}(e^{-bT_0}-e^{-(1-\rho)bT_0})e^{-aT_0}-\frac{Kb}{a-b}(e^{-aT_0}-e^{-(1-\rho)aT_0})e^{-bT_0}.
\end{aligned}\right. \tag{11}$$

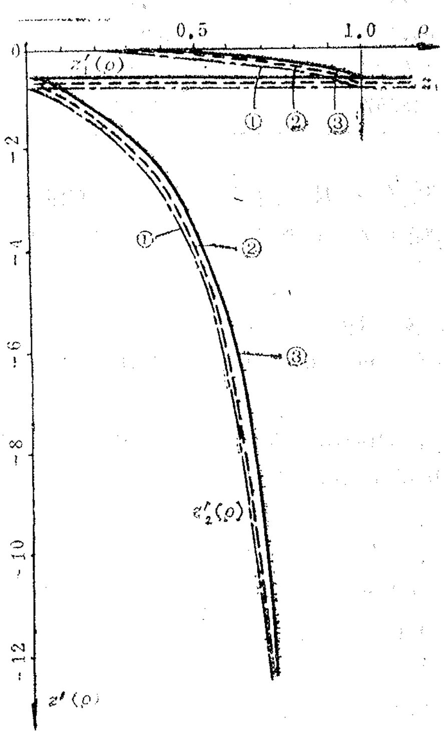

图 1　①$a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{15}$；

②$a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{10}$；

③$a=\frac{1}{5}$，$b=\frac{1}{5.5}$

令$\rho=0$可以计算出b_1与b_2，容易验证当$\rho\to0$时有$b_1'(\rho)\to b_1$，$b_2'(\rho)\to b_2$及$b_3'(\rho)\to0$；当$\rho\to1$时有$b_1'(\rho)\to0$，$b_2'(\rho)\to b_1$及$b_3'(\rho)\to b_2$。

我们对多组a，b的值进行了计算，现列出其中两组的数值结果（见表1），在图1中给出了三组曲线。我们对于一阶与三阶系统进行了类似的计算。

表 1

	$a=\frac{1}{5}$ $T_0=4s$	$b=\frac{1}{15}$	$a=\frac{1}{5}$ $T_0=4s$	$b=\frac{1}{10}$
H(z)的根	0	$z_1=-0.7011$	0	$z_1=-0.6703$
H(z;ρ)的根	$z_1'(\rho)$	$z_2'(\rho)$	$z_1'(\rho)$	$z_2'(\rho)$
$\rho=0.0$	0	-.7011	0	-0.6703
0.1	-0.0059	-1.0201	-0.0056	-0.9752
0.2	-0.0212	-1.4359	-0.0203	-1.3726
0.3	-0.0447	-2.0076	-0.0428	-1.9191
0.4	-0.0766	-2.8401	-0.0734	-2.7151
0.5	-0.1185	-4.1447	-0.1134	-3.9623
0.6	-0.1730	-6.4067	-0.1655	-6.1252
0.7	-0.2448	-10.986	-0.2341	-10.504
0.8	-0.3423	-23.153	-0.3274	-22.139
0.9	-0.4818	-83.407	-0.4608	-79.836
0.95	-0.5775	-310.8	-0.5522	-297.3
0.999	-0.7078	-848357	-0.6718	-456613

上述两组结果的曲线示于图1.

注：在（1）中的延迟τ不仅表示系统的纯延迟，而且包括了系统的非线性误差，计算机采样与计算引入的时间延迟等。实际上（1）式是作为一个模型类提出的，将在另文分析这个问题。

参考文献

〔1〕 Åström, K. J., et al, Zeros of Sampled Systems, Automatica, 20:1, (1984), 31—38.

〔2〕 Kurz, K. and Goedecke, W., Digital Parameter-adaptive Control of Process with Unknown Dead time, Automatica, 17:3, (1981), 245—252.

〔3〕 Wong, K. Y. and Bayoumi, M. M., A Self-tuning Algorithm for Systems with Unknown Time Delay, Preprints of 6 th IFAC Iden. Symp., Washington, (1982), 1064—1069.

〔4〕 绪方胜彦著，卢伯英等译，现代控制工程，科学出版社，北京，(1976).

〔5〕 Åström, K. J., Theory and Applications of Adaptive Control-A Survey, Automatica, 19:6, (1983), 471—480.

〔6〕 Åström, K. J. and Wittenmark, B., The Self-tuning Regulators Revisited, Proceedings of 7th IFAC Iden. Symp., York, (1985).
〔7〕 Jury, E. I., Theory and Appticalion of the z-Transformation, John Wiley, New York, (1964).

Zeros of Sampled Systems Having Fractional Time Delay

Zhang Yongguang
(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)
Ma Runjin
(Northern China University of Technology, Beijing)

Abstract

Zeros of sampled systems of continuous systems with time deday τ were considered in this paper. Sampling the contnuous system under time interval T_0, then $\tau=(d+\rho)T_0$, where d is a integal and $0\leqslant\rho<1$. It was proved that the zeros of the sampled system is closly related to the fractional time delay ρ. As ρ changes from 0 to 1 the trajectories of the zeros presents a certain regularity.