第6卷 第2期　控制理论与应用　Vol. 6. No. 2
1989年6月　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　June, 1989

平衡系统的降阶准则

徐世杰　李　威　吴瑶华

（哈尔滨工业大学航天学院）

摘　要

本文讨论平衡系统的模型简化问题，给出了一个新的降阶准则，改进了 Moore 的结果，一个数值例子说明了所给方法的优越性。

一、引　言

Moore[1]采用系统脉冲响应主分量分析与矩阵的奇异值分解讨论了平衡状态空间模型的近似问题。通过比较可控可观性格拉姆算子阵的奇异值的大小来判断状态的可控可观程度，Moore 引入了优势子系统和内部优势子系统的概念，并推荐采用内部优势子系统作为原系统的近似。但文献[2,3]指出，Moore 的方法不是普遍适用的，一些情况下可能导致错误的结论。本文提出了一个新的降阶准则，以系统降阶前后脉冲响应矩阵的接近程度来评价降阶模型的优劣，从而改进了 Moore 已有的结果，一个算例被给出，充分说明了所给方法的优点。

二、Moore 方法的回顾[1]

考虑渐近稳定的线性时不变系统（A,B,C）为

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx\end{aligned} \qquad (1)$$

其中，$x\in R^n$；$u\in R^p$；$y\in R^l$；A、B、C 是相应维数的系数矩阵。

其能控性及能观性格拉姆算子阵W_c^2、W_o^2定义为

$$W_c^2 \triangleq \int_0^\infty e^{At}BB^Te^{A^Tt}\,\mathrm{d}t \qquad (2)$$

$$W_o^2 \triangleq \int_0^\infty e^{A^Tt}C^TCe^{At}\,\mathrm{d}t \qquad (3)$$

且W_c^2、W_o^2满足如下 Lyapunov方程

$$AW_c^2 + W_c^2A^T + BB^T = 0 \qquad (4)$$

本文于1987年9月29日收到。1988年6月21日收到修改稿。

$$A^TW_o^2+W_o^2A+C^TC=0 \tag{5}$$

定义 1　$W_c^2=W_o^2=\mathrm{diag}\{\sigma_1^2\ \ \sigma_2^2\cdots\ \sigma_n^2\}$，则称系统(1)为输入输出平衡的（简称平衡的）。其中 $\sigma_i^2(i\in\underline{n})$称为系统（1）的能控能观奇异值。

记 $H(t)$和 $H_R(t)$为系统（1）及其降阶模型（A_R，B_R，C_R）的脉冲响应矩阵，则降阶误差脉冲响应矩阵$H_e(t)$可写为

$$H_e(t)=Ce^{At}B-C_Re^{A_Rt}B_R \tag{6}$$

定义 2　称 m阶子系统（A_R，B_R，C_R）为优势子系统，若满足

$$\left\|\int_0^\infty H_e(t)\,H_e^T(t)\,\mathrm{d}t\right\|_2^{\frac{1}{2}}\ll\min_{\|v\|=1}\left(v^T\int_0^\infty H(t)H^T(t)\,\mathrm{d}tv\right)^{\frac{1}{2}} \tag{7}$$

其中，$v\in R^l$是标模化向量；$\|\ \ \|_2$表谱范数。

若系统（1）的能控能观奇异值按降序排列，则有

定义 3　称前 K个状态对应的子系统是内部优势的，若满足

$$\left(\sum_{i=1}^{K}\sigma_i^4\right)^{\frac{1}{2}}\gg\left(\sum_{i=K+1}^{n}\sigma_i^4\right)^{\frac{1}{2}} \tag{8}$$

Moore 证明，任何渐近稳定的系统都可经相似变换化成平衡系统，其能控能观奇异值即为其脉冲响应主分量的幅值。Moore 指出定义 2 无法直接使用，建议用内部优势子系统代替优势子系统作为原系统的近似。

三、本文的主要结果

设平衡系统及其降阶系统的脉冲响应矩阵的平方积分为

$$J\triangleq\int_0^\infty Ce^{At}BB^Te^{A^Tt}C^T\mathrm{d}t \tag{9}$$

$$J_R\triangleq\int_0^\infty C_Re^{A_Rt}B_RB_R^T\ e^{A_R^Tt}\ C_R^T\mathrm{d}t \tag{10}$$

定理　若平衡系统（A，B，C）有相异的能控能观奇异值，则

1）这些奇异值可表为

$$\sigma_i^2=-\frac{\sum_{j=1}^{p}b_{ij}^2}{2a_{ii}}=-\frac{\sum_{j=1}^{l}c_{ji}^2}{2a_{ii}}\quad(i\in\underline{n}) \tag{11}$$

2）B和C的元素间满足

$$\sum_{j=1}^{p}b_{ij}^2=\sum_{j=1}^{l}c_{ji}^2\ (i\in\underline{n}) \tag{12}$$

3）原系统和降阶系统的能控能观奇异值σ_i^2和δ_i^2满足

$$\sigma_i^2=\delta_i^2 \quad (i\in \underline{m}) \tag{13}$$

4）记$E=J-J_R$，则E可表为

$$E=\sum_{i=m+1}^{n}\sigma_i^2 c_i c_i^T \tag{14}$$

其中，c_i是C的第i列；b_{ij}、c_{ij}是B、C的元素。

证 由（4）、（5），考虑到矩阵的对角线形式及定义1，有

$$a_{ii}\sigma_i^2+\sigma_i^2 a_{ii}+\sum_{j=1}^{P}b_{ij}^2=0$$

$$a_{ii}\sigma_i^2+\sigma_i^2 a_{ii}+\sum_{j=1}^{l}c_{ji}^2=0$$

可得

$$\sigma_i^2=-\frac{\sum_{j=1}^{P}b_{ij}^2}{2a_{ii}}=-\frac{\sum_{j=1}^{l}c_{ji}^2}{2a_{ii}}$$

1）得证；2）显然；由于σ_i^2只和A的第i个对角线元素及B的第i行或C的第i列有关，故σ_i^2是降阶不变量，从而3）得证；对于4），考虑到（2）、定义1及3有

$$E=CW_c^2C^T-C_RW_{Rc}^2C_R^T=\sum_{i=1}^{n}c_ic_i^T\sigma_i^2-\sum_{i=1}^{m}c_ic_i^T\delta_i^2=\sum_{i=m+1}^{n}c_ic_i^T\sigma_i^2$$ 证毕。

本文提出如下降阶准则：

降阶准则 若平衡系统（A，B，C）与其一子系统（A_R，B_R，C_R）间满足

$$\frac{\|E\|}{\|J\|}\ll 1 \tag{15}$$

则可用（A_R，B_R，C_R）作为（A，B，C）的近似。

利用Frobienus范数，（15）可改写为

$$\left(\frac{\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=m+1}^{n}c_{ik}c_{ij}\sigma_i^2\right)^2}{\sum_{k=1}^{l}\sum_{j=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}c_{ik}c_{ij}\sigma_i^2\right)^2}\right)^{\frac{1}{2}}\ll 1 \tag{16}$$

对单输入单输出情况，上式成为

$$\sum_{i=m+1}^{n}\sigma_i^2c_i^2\Big/\sum_{i=1}^{n}\sigma_i^2c_i^2\ll 1 \tag{17}$$

由（14）式，

$$\|E\|_F \leqslant \sum_{i=m+1}^{n} \sigma_i^2 \|c_i c_i^T\|_F \tag{18}$$

上式给出了脉冲响应平方积分误差范数的上界，其中，$\|c_i c_i^T\|_F$ 表 证了系统在外加脉冲作用下，第 i 个状态被激励的程度。这表明降阶时不但要考虑 σ_i^2 的大小，也 要 考 虑 $\|c_i c_i^T\|_F$ 的大小。据此有

定义 4 称前 m 个状态对应的子系统为相对优势子系统，若满足

$$\sum_{i=1}^{m} \sigma_i^2 \|c_i c_i^T\|_F \gg \sum_{i=m+1}^{n} \sigma_i^2 \|c_i c_i^T\|_F \tag{19}$$

则可用相对优势子系统作为原系统的近似。可以证明，在单输入单输出情况下，相对优势子系统比 Moore 的内部优势子系统更接近原模型。

四、数 值 算 例

例 设有平衡系统（A，B，C），其中，

$$A = \begin{bmatrix} -0.005 & -0.99 \\ -0.99 & -5000 \end{bmatrix}; \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 100 \end{bmatrix}; \quad C = [1 \quad 100];$$

$$W_c^2 = W_o^2 = \mathrm{diag}\{100 \quad 1\} \tag{20}$$

由Moore 方法，$\sigma_2^2 = 1 \ll \sigma_1^2 = 100$，故$(-0.005,1,1)$是内部优势子系统，可用作降阶模型；由本文的方法，$c_1^2\ \sigma_1^2 = 100 \ll c_2^2\ \sigma_2^2 = 10000$，故$(-5000,100,100)$是相对优势子系统，可用作原系统的近似。记上述两个系统的脉冲响应为$H_1(t)$和$H_2(t)$，可求得

$$H_1(t) = e^{-0.005t} \tag{21}$$

$$H_2(t) = 10000e^{-5000t} \tag{22}$$

而原系统的脉冲响应$H(t)$为

$$H(t) = 0.9614e^{-0.004851t} + 10000e^{-5000t} \tag{23}$$

由此得相对误差

$$e_1 = \frac{\|H(t) - H_1(t)\|}{\|H(t)\|} = 0.99$$

$$e_2 = \frac{\|H(t) - H_2(t)\|}{\|H(t)\|} = 0.098$$

可见内部优势子系统不是实际优势的，而相对优势子系统则是实际优势的。因此Moore 方法对本例导致了错误的结论。

参考文献

〔1〕 Moore, B. C., Principal Component Analysis in Linear System: Cotrollability, Observability and Model Reduction, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-26:1, (1981), 17—31.

〔2〕 Therapos, C. P., On the Selection of the Reduced Order Via Balanced State Representations, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-29:11, (1984), 1019—1021.

〔3〕 徐世杰、吴瑶华，挠性飞行器状态方程的平衡化和降阶问题的研究，哈尔滨工业大学科学研究报告，105，(1985).

〔4〕 Mahil, S. S., etc., Some Integral Properties for Balanced Realizations of Scalar Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-29:2 (1984), 181—183.

The Reduced Order Criterion of Balanced System

Xu Shijie, Li Wei, Wu Yaohua

(Aerospace College, Harbin Institute of Technology)

Abstract

In this paper, the reduction of a balanced system is investigated and a new reduction criterion is given. A Moore's result is improved. A numerical example shows the advantage of the given method.