第6卷 第2期　　控制理论与应用　　Vol.6, No.2
1989年6月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　June, 1989

线性系统稳定性实时新判据

凌　勃
（哈尔滨工业大学自动控制系）

张　捍　东
（黑龙江大学应用数学研究所，哈尔滨）

摘　　要

本文提出一种判别系统稳定性的实时新判据．它推理严谨，计算简单，不占机时，只通过分析一个与系统有关的简单数列的变化趋势就能判定系统的稳定性以及稳定性能的优劣．它适用于在线判别系统的稳定性，具有理论和实际价值．仿真结果表明，此方法在计算速度及稳定裕度判别方面明显优于其它方法．

一、引　　言

在所有控制问题中，系统的稳定性是最基本的问题．连续系统控制中稳定性的解析判别方法，主要是劳斯－胡尔维茨法[1]．与之相对应，在离散系统控制中，主要采用舒尔－柯恩法作为判别稳定性的解析方法．它们的共同特点是根据一定形式的行列式的计算来判定系统是否稳定．舒尔－柯恩法所需计算的行列式的阶数为系统特征方程阶数的两倍，当系统阶次增大，它就不再具有实用性．

目前，普遍采用的稳定设计方法是零极点配置法．在实时控制中，模型参数实时辨识[2]，按所辨识的参数直接设计的系统，它的稳定性依赖于这些参数，因而稳定性也实时变化．如果它们构成的系统稳定，则它们全部参予控制将是十分理想的．应该说，控制系统的设计有两类：一是把系统设计成稳定的，二是实时判定稳定性，采用参数补偿或模型切换来处理不稳定情况．无疑，后者将比前者控制效果更好．

线性离散系统的稳定性归结为系统特征方程的根在单位圆内．求解特征方程的根以及用舒尔－柯恩法解高阶行列式，都不能实现实时判定稳定性．针对这一问题，本文提出一种用计算机实时判别任意阶线性离散系统稳定性的新方法．它经过严格的理论证明，概念上直观，计算方便，不占机时，使在线判别实时控制系统的稳定性成为可能，同时还可分析系统稳定性能的好坏．此方法的研究为控制系统的设计开辟了一个新领域，具有广泛的实用性．

本文于1987年12月12日收到．1988年6月29日收到修改稿．

二、稳定性分析

现在我们考虑单输入单输出线性定常离散系统

$$x(k+1)=G(k)x(k)+H(k)u(k) \tag{1}$$

$$y(k)=C(k)x(k)+D(k)u(k) \tag{2}$$

其中，$x(k)$为状态，$u(k)$为输入，$y(k)$为输出。
系统的特征多项式可写成

$$\Delta(z)=z^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0 \tag{3}$$

它对应的能控矩阵为 $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

不妨把 A 记成 $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \cdots & \beta_n \end{pmatrix} \tag{4}$$

其中，$\beta_1=-a_0$，$\beta_2=-a_1,\cdots,\beta_n=-a_{n-1}$。

系统的渐近稳定等价于$\Delta(z)=0$的每一个根都在单位圆内：$|z_i|\leqslant 1$（z_i是$\Delta(z)=0$的根），$i=1,2,\cdots,n$。$|z_i|=1$对应于临界稳定，在实际控制中，不希望出现这种情况，而是要求$|z_i|<1$，$i=1,2,\cdots,n$。根据矩阵幂级数收敛理论，$|z_i|<1$又是矩阵幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$收敛的充要条件，所以系统稳定性可以转化为数项级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(A^k)_{ij}$的收敛性的讨论，其中$(A^k)_{ij}$表示$A^k$的第$i$行，第$j$列的元素。而能控阵$A$又是一种特殊形式的矩阵，它有一些重要性质，下面先给出定理1、2，证明从略。

定理 1 若能控矩阵$A\in R^{n\times n}$具有形式（4），$A^k\triangleq\overbrace{A\cdot A\cdots A}^{k\text{个}}$，用$a_{ij}^k$表示乘积矩阵$A^k$的第$i$行，第$j$列元素$(i,j=1,2,\cdots,n)$，则$A^k$的元素与$A^{k-1}$的元素之间有下列递推关系式：

$$\begin{cases} a_{i1}^k=\beta_1 a_{in}^{k-1} \\ a_{i2}^k=a_{i1}^{k-1}+\beta_2 a_{in}^{k-1} \\ \vdots \\ a_{i\,n-1}^k=a_{i\,n-2}^{k-1}+\beta_{n-1}a_{in}^{k-1} \\ a_{in}^k=a_{i\,n-1}^{k-1}+\beta_n a_{in}^{k-1} \end{cases} \tag{5}$$

$i=1,2,\cdots,n$

且 $$a_{ij}^k=\beta_j a_{in}^{k-1}+\beta_{j-1}a_{in}^{k-2}+\cdots+\beta_1 a_{in}^{k-j},\quad i,j=1,2,\cdots,n \tag{6}$$

特别，当 $j=n$ 时，有

$$a_{in}^k=\beta_n a_{in}^{k-1}+\beta_{n-1}a_{in}^{k-2}+\cdots+\beta_1 a_{in}^{k-n},\quad i=1,2,\cdots,n \tag{7}$$

初始值为 $$\begin{cases} a_{n1}^1=\beta_1,\quad a_{n2}^1=\beta_2,\cdots,a_{nn}^1=\beta_n \\ a_{ij}^1=\begin{cases}1 & j=i+1\\ 0 & j\neq i+1\end{cases}\quad i=1,2,\cdots n-1,j=1,2,\cdots,n\end{cases}$$

定理1说明，A^k 的第 $j(j=1,2,\cdots,n)$ 列元素完全由 $A^{k-1},\cdots,A^{k-j}$ 的第 n 列元素决定。特别地，a_{in}^k 完全由 a_{in}^{k-1}，a_{in}^{k-2}，$\cdots$，a_{in}^{k-n} 决定。且

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty} a_{ij}^k&=\beta_j\lim_{k\to\infty}a_{in}^{k-1}+\beta_{j-1}\lim_{k\to\infty}a_{in}^{k-2}+\cdots+\beta_1\lim_{k\to\infty}a_{in}^{k-j}\\ &=(\beta_j+\beta_{j-1}+\cdots+\beta_1)\lim_{k\to\infty}a_{in}^k.\quad(i,j=1,2,\cdots,n)\end{aligned}$$

定理 2 乘积矩阵 A^k 随 k 的增大，A^k 的元素具有上移性，即：$a_{i-1,j}^k=a_{ij}^{k-1}$ $(i=2,3,\cdots,n,j=1,2,\cdots,n)$。

由此定理不难看出，A^k 与 A^{k-1} 之间除最后一行不同，A^k 的前 $n-1$ 行均可由 A^{k-1} 的后 $n-1$ 行确定。所以，矩阵序列 $\{A^k\}$ 当 $k\to\infty$ 的过程完全可以由 A^k 的最后一行构成的序列(记作 $\{A^k\}_n$)决定，且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{ij}^k=\lim\limits_{k\to\infty} a_{nj}^k$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 故级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 的收敛性又归结到第 n 行元素构成的级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nj}^k$ 的收敛性 $(j=1,2,\cdots,n)$。又由(5)式，把 i 用 n 代替，便得 A^k 的第 n 行元素为

$$\begin{cases} a_{n1}^k=\beta_1 a_{nn}^{k-1}\\ a_{n2}^k=\beta_2 a_{nn}^{k-1}+\beta_1 a_{nn}^{k-2}\\ \cdots\\ a_{nn}^k=\beta_n a_{nn}^{k-1}+\beta_{n-1}a_{nn}^{k-2}+\cdots+\beta_1 a_{nn}^{k-n}\end{cases} \tag{8}$$

即 A^k 的第 n 行元素只依赖于 $A^{k-1},\cdots,A^{k-n}$ 的最后一行最后一列的元素 a_{nn}^{k-1}，a_{nn}^{k-2}，$\cdots$，a_{nn}^{k-n}。所以，矩阵级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}A^k$ 的收敛性最终归结为数项级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_{nn}^k$ 的收敛性，而 a_{nn}^k 由简单的递推公式(8)获得。

三、稳定性的充要条件

既然矩阵级数 $\sum_{k=0}^{\infty} A^k$ 的收敛性完全由一个数项级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{nn}^k$ 的收敛性决定，我们只须考虑级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nn}^k$。下面给出系统稳定性的必要条件。

定理 3 系统稳定的必要条件是

$$\lim_{k\to\infty} a_{nn}^k = 0$$

由此定理我们就可以判断系统的不稳定性，即通过计算 a_{nn}^k，如果发现 a_{nn}^k 不趋于零，或发散，就可断定系统是不稳定的。

定理 4 系统稳定的充分条件是存在常数 $p(>1)$，使当 k 充分大时，有

$$a_{nn}^k = O\left(\frac{1}{k^p}\right)，或 \quad a_{nn}^k = O^*\left(\frac{1}{k^p}\right)$$

记号 O 表示 a_{nn}^k 是不低于 $\frac{1}{k^p}$ 的阶数的无穷小；O^* 表示 a_{nn}^k 是与 $\frac{1}{k^p}$ 同阶的无穷小。

证 若存在常数 p，使得当 k 充分大时，$a_{nn}^k = O\left(\frac{1}{k^p}\right)$，则 $\overline{\lim_{k\to\infty}} |a_{nn}^k| \Big/ \left(\frac{1}{k^p}\right) = \gamma(0 \leqslant \gamma < +\infty)$。则存在 N，当 $k>N$ 时，$|a_{nn}^k| \leqslant \gamma\frac{1}{k^p}$。而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\gamma\frac{1}{k^p}$ 收敛，所以级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nn}^k$ 也收敛。从而系统稳定。

有了定理 4，就可以得到本文的中心结果——判别系统稳定性的新判据：

定理 5 通过适当选择一个常数 $c(>0)$，如果 $\lim_{k\to\infty}(\ln c - \ln|a_{nn}^k|)/\ln k > 1$，则系统稳定。

证 因为如果已选 $c(>0)$，使得

$$\lim_{k\to\infty}(\ln c - \ln|a_{nn}^k|)/\ln k = p > 1$$

则 $\exists N$，使当 $k>N$ 时，有

$$(\ln c - \ln|a_{nn}^k|)/\ln k \triangleq p(k) \geqslant p_0 > 1$$

这里 p_0 是 p 与 1 之间的一个数，所以，

$p_0 \ln k \leqslant \ln \dfrac{c}{|a_{nn}^k|}$，即 $k^{p_0} \leqslant \dfrac{c}{|a_{nn}^k|}$ 或 $|a_{nn}^k| \leqslant \dfrac{c}{k^{p_0}}$ 而 $\sum_{k=1}^{\infty} \dfrac{c}{k^{p_0}}$ 是收敛的，所以 $\sum_{k=1}^{\infty}$

a_{nn}^k 也收敛，系统稳定。

此定理可以作为充要条件来使用。

四、应　用　实　例

我们对具体的实例进行了模似计算。由于整个计算只是递推公式的简单乘法，故不占机时。而且当特征根越接近原点，a_{nn}^k 收敛于零的速度越快，$(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$ 越大于1。当特征根越接近于单位圆，a_{nn}^k 趋于零的速度越慢，$(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$ 大于1的速度也越慢。这与系统特征值越接近单位圆，对应系统稳定性越坏的结论相吻合。常数 c 的选取只须充分大即可。

1．二阶系统模似结果

（1）考虑具有如下特征方程的二阶系统：

$$\Delta(z)=z^2-1.7z+0.72=0$$

它的根分别为 $z_1=0.8$，$z_2=0.7$

选常数 $c=100$（只须充分大即可），$\{a_{nn}^k\}$ 及 $(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$ 的计算结果见表1（只列出部分结果）。

表 1

k	a_{nn}^k	$(\ln c-\ln\|a_{nn}^k\|)/\ln k$
2	2.17	5.52616
5	2.69297	2.24583
20	1.001957	1.53659
40	0.131945	1.7974
60	0.016161	2.13229
80	0.001966	2.47302
100	0.000239	2.81075

表 2

k	a_{nn}^k	$(\ln c-\ln\|a_{nn}^k\|)/\ln k$
3	1.0103	4.18239
20	1.01212	1.53322
50	1.015162	1.17334
80	1.01821	1.04680
100	1.02025	0.99565

由表中的数据可以看出，当 k 增大时，$a_{nn}^k \to 0$，且 $(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$ 大于1，由新判据定理5知系统稳定。因根在单位圆内此系统确实稳定。

（2）二阶系统的特征方程 $\Delta(z)=z^2-1.0101z+0.01001=0$，它的两个根 $z_1=0.01$；$z_2=1.001$，计算结果见表2。

可见当$k\to\infty$时a_{nn}^k将大于1，不趋于零。由定理3知系统不稳定。而此系统确实是不稳定的。

2。五阶系统的模拟结果

（1）特征方程$\Delta(z)=z^5-1.7z^4+0.17z^3+1.193z^2-0.7914z+0.1512=0$。根$z_1=0.5$；$z_2=-0.9$；$z_3=0.7$；$z_4=0.6$；$z_5=0.8$，取$c=100$，得到结果见表3。可见$k\to\infty$时，$a_{nn}^k\to 0$，$(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$大于1。由定理5知系统稳定。因$|z_i|<1(i=1,2,\cdots,5)$，此系统确实稳定。

（2）特征方程$\Delta(z)=(z-1.001)^5=0$。重根$z_i=1.001$，$i=1,2,\cdots,5$，得到结果见表4。因$a_{nn}^k\to\infty$，且$(\ln c-\ln|a_{nn}^k|)/\ln k$为负，由定理3或5系统不稳定。因根在单位圆外，此系统确实不稳定。

表 3

k	a_{nn}^k	$(\ln c-\ln\|a_{nn}^k\|)/\ln k$
10	2.48637	1.604435
30	0.0529	2.218184
70	0.0000786	3.308599
100	0.0000031	3.757203

表 4

k	a_{nn}^k	$(\ln c-\ln\|a_{nn}^k\|)/\ln k$
2	15.03002	2.734082
10	1011.073	-1.004782
50	338647.1	-2.077581

即使系统的特征根为复根，此新判据仍成立。在计算速度及稳定裕度判别上实时新判据明显优于其它方法。

参 考 文 献

〔1〕 上瀧致孝等著，张洪钺译，自动控制理论，国防工业出版社，北京，（1979）。

〔2〕 张捍东，森林系统树木生长的数学模型及辨识，控制理论与应用，3:4，（1986），122—127。

A New On-line Criterion of Linear System Stability

Ling Bo

(Deptment of Automatic Control, Harbin Institute of Technology)

Zhang Handong

(Institute of Applied Mathematics Heilongjiang University)

Abstract

This paper proposed a new on-line criterion, based on exact theoretical analyses, to determine the system stability and its margin by analysing the varying tendency of a relative series. Simulatin has shown that less computation is required in comparison with other criterions.