第6卷 第3期
1989年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.6, No.3
Sept., 1989

非部分嵌套信息结构的LQG动态队决策问题的可解性(Ⅱ)*

曾晓军 郑应平

(厦门大学计算机与系统科学系) (中国科学院自动化研究所，北京)

摘 要

本文讨论非嵌套信息结构的递阶队决策问题和控制均享信息结构的LQG分散控制问题，文中首先证明这两类问题的信息结构都是“部分控制嵌入”的，进而给出最优策略（或控制）存在的充要条件和当此条件成立时最优策略（或控制）的表达式。

关键词：队论；递阶队决策；非嵌套信息结构；分散LQG决策问题；控制均享信息结构

一、引 言

文〔1〕讨论了一般的非部分嵌套信息结构的LQG动态队决策问题，提出了“部分控制嵌入”信息结构模式，给出当信息结构为“部分控制嵌入”时最优策略存在的充要条件及这一条件不成立时目标函数的下确界。本文将应用上述结果来求解两类特殊的具有“部分控制嵌入”信息结构的动态队决策问题，即具有递阶结构的队决策问题和具有控制均享信息结构的LQG分散控制问题。这两类问题，前一类在文〔2〕中被认为一般是不可解的，然而本文将通过验证这类队问题具有“部分控制嵌入”信息结构并用上述结果给出最优策略存在的充要条件和表达式；后一类问题到目前已得到结果是文〔3〕给出了目标函数的下确界，但这一下确界是否可达？何时可达？可达时最优控制具有何种形式及如何计算都没有得到解决。本文将给出这些问题的明确答案。

二、递阶结构的队决策问题**

1．问题的描述

设有N个决策者，决策者DM_k的决策变量$u_k \in U_k = R^{m_k}(k=1, 2, \cdots, N)$，决策者们共同的目标函数为

---

* 国家自然科学基金资助的课题。

** 为简单计，本文中所用概念和记号请参见文〔1〕。

本文于1987年6月15日收到。1988年4月9日收到修改稿。

$$J=E\left[\frac{1}{2}(u_1^\tau\cdots u_N^\tau)\begin{pmatrix}Q_{11}&\cdots&Q_{1N}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{N1}&\cdots&Q_{NN}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_N\end{pmatrix}+(u_1^\tau\cdots u_N^\tau)\begin{pmatrix}S_1\\ \vdots\\ S_N\end{pmatrix}\xi+(u_1^\tau\cdots u_N^\tau)\begin{pmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_N\end{pmatrix}\right]$$

其中Q_{kj}是$m_k\times m_j$矩阵（k，$j=1$，2，…，N），S_k是$m_k\times p$矩阵，C_k是$m_k\times 1$向量($k=1$，2，…N)，随机向量$\xi\in R^p$定义于概率空间(Ω，F，P)且遵从Gaussian分布$N(0, X)(X>0)$，矩阵$Q=(Q_{kj})$是对称正定的，τ表示转置。

设DM_k的信息为$z_k\in Z_k=R^{n_k}$(z_k的具体形式将在后面具体给出）（$k=1$，2，…，N），容许策略空间为

$\Gamma_k=\{\gamma_k(z_k)\,|\gamma_k$是$R^{n_k}\to R^{m_k}$的Borel可测函数$\}$，$k=1$，2，…，$N$。
$\Gamma=\Gamma_1\times\cdots\times\Gamma_N$为该队的容许策略空间，所要讨论的问题是：寻找使得$J(\gamma_1$，…，$\gamma_N)$达到极小的最优策略$(\gamma_1^*,\cdots,\gamma_N^*)$。

2．线性递阶结构情形

考虑如下线性递阶信息结构

$$z_1=y_1=H_1\xi,\ z_k=\begin{pmatrix}y_k\\ u_1\\ \vdots\\ u_{k-1}\end{pmatrix},\ y_k=H_k\xi,\ k=2,\ \cdots,\ N \tag{1}$$

其中H_k是矩阵且不失一般性设其满行秩。

设信息结构（1）是非部分嵌套的（即至少存在$j_0<i_0$使得$\sigma(H_{j_0}\xi)\not\subset\sigma(H_{i_0}\xi)$）。显然信息结构（1）是"部分控制嵌入"的，于是可用文[1]结果求解。

首先部分嵌套化信息结构（1）得如下信息结构

$$\hat z_1=\hat H_1\xi\triangleq\hat y_1,\ \text{这里}\hat H_1=H_1 \tag{2}$$

$$\hat z_k=\begin{pmatrix}\hat H_k\xi\\ u_1\\ \vdots\\ u_{k-1}\end{pmatrix},\ \text{这里}\hat H_k=\begin{pmatrix}H_k\\ H_{kk-1}\end{pmatrix}\text{且记}\hat y_k=\hat H_k\xi,k=2,\ \cdots,\ N \tag{3}$$

其中H_{kk-1}是$\hat H_{k-1}$中的某些行向量构成，它使得$\hat H_k$满行秩且$\hat H_{k-1}$的行向量皆可由$\hat H_k$的行向量线性表出。由归纳法易证信息结构（2）、（3）是部分嵌套的。

其次，用动态规划和配平方法可得以（2）、（3）为信息结构的动态队问题的最优策略为

$$u_1=\hat\gamma_1^*(\hat z_1)=\hat\gamma_1^*(\hat y_1)=-Q_{11}^{-1}(1)S_1(1)X\hat H_1^\tau(\hat H_1X\hat H_1^\tau)^{-1}\hat y_1-Q_{11}^{-1}(1)C_1(1) \tag{4}$$

$$u_k=\hat{\gamma}_k^*(\hat{z}_k)=\hat{\gamma}_k^*(\hat{y}_k,u_1,\cdots,u_{k-1})=-Q_{kk}^{-1}(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}Q_{ik}^{\tau}(k)u_i\right]-Q_{kk}^{-1}(k)S_k(k)$$

$$\cdot X\hat{H}_k^{\tau}(\hat{H}_kX\hat{H}_k^{\tau})^{-1}\hat{y}_k-Q_{kk}^{-1}(k)C_k(k),\quad k=2,\ \cdots,\ N \tag{5}$$

其中 $Q_{ik}(k)(i=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$，$S_k(k)$，$C_k(k)$ 由下列反向递推公式给出：

$$\begin{pmatrix} Q_{11}(k-1) & \cdots & Q_{1k-1}(k-1) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k-11}(k-1) & \cdots & Q_{k-1k-1}(k-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_{11}(k) & \cdots & Q_{1k-1}(k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{k-11}(k) & \cdots & Q_{k-1k-1}(k) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} Q_{1k}(k) \\ \vdots \\ Q_{k-1k}(k) \end{pmatrix}$$

$$\cdot Q_{kk}^{-1}(k)(Q_{1k}^{\tau}(k)\cdots Q_{k-1k}^{\tau}(k))$$

$$\begin{pmatrix} S_1(k-1) \\ \vdots \\ S_{k-1}(k-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1(k) \\ \vdots \\ S_{k-1}(k) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} Q_{1k}(k) \\ \vdots \\ Q_{k-1k}(k) \end{pmatrix}Q_{kk}^{-1}(k)S_k(k)$$

$$\begin{pmatrix} C_1(k-1) \\ \vdots \\ C_{k-1}(k-1) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1(k) \\ \vdots \\ C_{k-1}(k) \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} Q_{1k}(k) \\ \vdots \\ Q_{k-1k}(k) \end{pmatrix}Q_{kk}^{-1}(k)C_k(k),\quad k=N,N-1,\cdots,2$$

终值条件为

$$\begin{pmatrix} Q_{11}(N) & \cdots & Q_{1N}(N) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1}(N) & \cdots & Q_{NN}(N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q_{11} & \cdots & Q_{1N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ Q_{N1} & \cdots & Q_{NN} \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} S_1(N) \\ \vdots \\ S_N(N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} S_1 \\ \vdots \\ S_N \end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix} C_1(N) \\ \vdots \\ C_N(N) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_N \end{pmatrix}$$

于是最优策略轨迹为

$$\hat{u}_k^*(\xi)=\hat{L}_k^*\xi+\hat{b}_k^*,\quad k=1,2,\cdots,N$$

其中 $\hat{L}_k^*$，$\hat{b}_k^*$ 由如下递推公式给出：

$$\hat{L}_1^*=-Q_{11}^{-1}(1)S_1(1)X\hat{H}_1^{\tau}(\hat{H}_1X\hat{H}_1^{\tau})^{-1}\hat{H}_1,\quad \hat{b}_1^*=-Q_{11}^{-1}(1)C_1(1)$$

$$\hat{L}_k^*=-Q_{kk}^{-1}(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}Q_{ik}^{\tau}(k)\hat{L}_i^*\right]-Q_{kk}^{-1}(k)S_k(k)X\hat{H}_k^{\tau}(\hat{H}_kX\hat{H}_k^{\tau})^{-1}\hat{H}_k$$

$$\hat{b}_k^*=-Q_{kk}^{-1}(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}Q_{ik}^{\tau}(k)\hat{b}_i^*\right]-Q_{kk}^{-1}(k)C_k(k),\quad k=2,\ \cdots,\ N$$

其相应的目标函数最小值为

$$J_{PN}^*=\frac{1}{2}\{\mathrm{tr}[(L^{\tau}QL+L^{\tau}S+S^{\tau}L)X]+b^{\tau}Qb+2b^{\tau}C\} \tag{6}$$

这里 $\mathrm{tr}(A)$ 表矩阵 A 的迹，而

$$L=\begin{pmatrix}\hat{L}_1^*\\ \vdots\\ \hat{L}_N^*\end{pmatrix},\ b=\begin{pmatrix}\hat{b}_1^*\\ \vdots\\ \hat{b}_N^*\end{pmatrix},\ Q=\begin{bmatrix}Q_{11}&\cdots&Q_{1N}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ Q_{N1}&\cdots&Q_{NN}\end{bmatrix},\ S=\begin{bmatrix}S_1\\ \vdots\\ S_N\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}C_1\\ \vdots\\ C_N\end{bmatrix}$$

记 $H_1^*=H_1,\ a_1^*=0$

$$H_k^*=\begin{pmatrix}H_k\\ \hat{L}_1^*\\ \vdots\\ \hat{L}_{k-1}^*\end{pmatrix},\quad a_k^*=\begin{pmatrix}0\\ \hat{b}_1^*\\ \vdots\\ \hat{b}_k^*\end{pmatrix},\ k=2,\cdots,N$$

注意到这里$\hat{L}_k^*$，$H_k^*(k=1,2,\cdots,N)$的具体形式由文〔1〕定理3立得如下结论。

命题 1 对信息结构为（1）的线性递阶结构的队决策问题，最优策略存在的充要条件是存在（K_2，…，K_N）使得

$$Q_{kk}^{-1}(k)S_k(k)X\hat{H}_k^{\tau}(\hat{H}_kX\hat{H}_k^{\tau})^{-1}\hat{H}_k=K_k\begin{pmatrix}H_k\\ \hat{L}_1^*\\ \vdots\\ \hat{L}_{k-1}^*\end{pmatrix},\ k=2,\cdots,N \tag{7}$$

当这一条件成立时，最优策略为

$$u_1=\gamma_1^*(z_1)=\gamma_1^*(y_1)=-Q_{11}^{-1}(1)S_1(1)XH_1^{\tau}(H_1XH_1^{\tau})^{-1}z_1-Q_{11}^{-1}(1)C_1(1)$$

$$u_k=\gamma_k^*(z_k)=\gamma_k^*(y_k,u_1,\cdots,u_{k-1})$$

$$=-Q_{kk}^{-1}(k)\left[\sum_{i=1}^{k-1}Q_{ik}^{\tau}(k)u_i\right]-K_k\begin{pmatrix}y_k\\ u_1\\ \vdots\\ u_{k-1}\end{pmatrix}-\left(Q_{kk}^{-1}(k)C_k(k)-K_k\begin{pmatrix}0\\ \hat{b}_1^*\\ \vdots\\ \hat{b}_{k-1}^*\end{pmatrix}\right),$$

$$k=2,\cdots,N$$

且最优目标函数J_{PN}^*由（6）给出。

当（7）不成立时，由〔1〕定理2，可根据（6）式所给出的J_{PN}^*选取次优策略。

3．多人二级递阶结构情形

考虑如下多人二级递阶信息结构为

$$z_i=H_i\xi, i=1,2,\cdots,N-1, z_N=\begin{pmatrix}H_N\xi\\u_1\\\vdots\\u_{N-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y_N\\u_1\\\vdots\\u_{N-1}\end{pmatrix} \tag{8}$$

且设信息结构（8）是非部分嵌套的（也即存在 $i_0<N$ 使得 $\sigma(H_{i_0}\xi)\not\subset\sigma(H_N\xi)$）．此外不失一般性，设矩阵 $H_i(i=1,2,\cdots,N)$ 满行秩．

容易看出信息结构（8）是"部分控制嵌入"的，因此可用文[1]的结果求解．

首先部分嵌套化信息结构（8）得如下信息结构

$$\hat z_i=z_i=H_i\xi, i=1,2,\cdots,N-1, \hat z_N=\begin{pmatrix}\hat H_N\xi\\u_1\\\vdots\\u_{N-1}\end{pmatrix}, \hat H_N=\begin{pmatrix}H_N\\H\end{pmatrix}, \text{记}\ \hat y_N=\hat H_N\xi \tag{9}$$

其中 H 是 $H_1,\cdots,H_{N-1}$ 的某些行向量所构成的矩阵，它使得 $\hat H_N$ 满行秩且使得 $H_1,\cdots,H_{N-1}$ 的行向量皆可由 $\hat H_N$ 的行向量表示，因此立得（9）是部分嵌套的．

其次，由动态规划和静态队问题的求解方法[4]可得最优策略为

$$u_k=\hat\gamma_k^*(\hat z_k)=\hat A_k\hat z_k+\hat b_k,\quad k=1,2,\cdots,N-1$$

$$u_N=\hat\gamma_N^*(\hat z_N)=\hat\gamma_N^*(\hat y_N,u_1,\cdots,u_{N-1})$$

$$=-Q_{NN}^{-1}\left[\sum_{i=1}^{N-1}Q_{iN}^\tau u_i\right]-Q_{NN}^{-1}S_NX\hat H_N^\tau(\hat H_NX\hat H_N^\tau)^{-1}\hat y_N-Q_{NN}^{-1}C_N$$

而 $\hat A_k$，$\hat b_k$ 由如下方程组的解给出（解的存在见[4]）：

$$(\hat b_1^\tau,\cdots,\hat b_{N-1}^\tau)=C_{(N-1)}^\tau Q_{(N-1)}^{-1}$$

$$\sum_{j=1}^{N-1}Q_{kj}(N-1)\hat A_j(H_jXH_j^\tau)=-S_k(N-1)XH_k^\tau, k=1,2,\cdots,N-1$$

其中 $$Q(N-1)=\begin{pmatrix}Q_{11}(N-1)&\cdots&Q_{1N-1}(N-1)\\\vdots&\ddots&\vdots\\Q_{N-11}(N-1)&\cdots&Q_{N-1N-1}(N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}Q_{11}&\cdots&Q_{1N-1}\\\vdots&\ddots&\vdots\\Q_{N-11}&\cdots&Q_{N-1N-1}\end{pmatrix}$$

$$-\begin{pmatrix}Q_{1N}\\\vdots\\Q_{N-1N}\end{pmatrix}Q_{NN}^{-1}(Q_{1N}^\tau\cdots Q_{N-1N}^\tau)$$

$$S(N-1)=\begin{pmatrix}S_1(N-1)\\\vdots\\S_{N-1}(N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1\\\vdots\\S_{N-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}Q_{1N}\\\vdots\\Q_{N-1N}\end{pmatrix}Q_{NN}^{-1}S_N$$

$$C(N-1)=\begin{pmatrix} C_1(N-1)\\ \vdots \\ C_{N-1}(N-1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} C_1\\ \vdots \\ C_{N-1}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix} Q_{1N}\\ \vdots \\ Q_{N-1\,N}\end{pmatrix}Q_{NN}^{-1}C_N$$

由此得最优策略轨迹为

$$\hat{u}_k^*(\xi)=\hat{A}_kH_k\xi+\hat{b}_k\triangleq\hat{L}_k^*\xi+\hat{b}_k^*,\quad k=1,2,\cdots,N-1$$

$$\hat{u}_N^*(\xi)=\hat{L}_N^*\xi+\hat{b}_N^*$$

其中 $$\hat{L}_N^*=-Q_{NN}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}Q_{iN}^{\tau}\hat{L}_i^*\right)-Q_{NN}^{-1}S_NX\hat{H}_N^{\tau}(\hat{H}_NX\hat{H}_N^{\tau})^{-1}\hat{H}_N$$

$$\hat{b}_N^*=-Q_{NN}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}Q_{iN}^{\tau}\hat{b}_i\right)-Q_{NN}^{-1}C_N$$

最优目标函数值由（6）给出。

记 $$H_k^*=H_k,\ a_k^*=0,k=1,2,\cdots,N-1$$

$$H_N^*=\begin{pmatrix} H_k\\ \hat{L}_1^*\\ \vdots\\ \hat{L}_{N-1}^*\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} H_k\\ \hat{A}_1H_1\\ \vdots\\ \hat{A}_{N-1}H_{N-1}\end{pmatrix},\quad a_N^*=\begin{pmatrix} 0\\ \hat{b}_1\\ \vdots\\ \hat{b}_{N-1}\end{pmatrix}$$

注意到$\hat{L}_k^*$、$H_k^*(k=1,2,\cdots,N)$的具体形式由文[1]定理3得：

命题 2　对信息结构为（8）的多人二阶递阶队决策问题，最优策略存在的充要条件是存在矩阵 K 使得

$$Q_{NN}^{-1}S_NX\hat{H}_N^{\tau}(\hat{H}_NX\hat{H}_N^{\tau})^{-1}\hat{H}_N=K\begin{pmatrix} H_N\\ \hat{A}_1H_1\\ \vdots\\ \hat{A}_{N-1}H_{N-1}\end{pmatrix}\tag{10}$$

当这一条件成立时，最优策略为

$$u_k=\gamma_k^*(z_k)=\hat{A}_kz_k+\hat{b}_k,k=1,2,\cdots,N-1$$

$$u_N=\gamma_N^*(z_N)=\gamma_N^*(y_N,u_1,\cdots,u_{N-1})$$

$$=-Q_{NN}^{-1}\left(\sum_{i=1}^{N-1}Q_{iN}^{\tau}u_i\right)-K\begin{pmatrix} y_N\\ u_1\\ \vdots\\ u_{N-1}\end{pmatrix}-\left(Q_{NN}^{-1}C_N-K\begin{pmatrix} 0\\ \hat{b}_1\\ \vdots\\ \hat{b}_N\end{pmatrix}\right)$$

且最优目标函数值由（6）给出。

类似地，当（10）无解时，可根据（6）给出的J_{PN}^*选取次优策略。

注　在这一节里所讨论的递阶结构队决策问题，不仅作为一类队决策问题有其自身的意义，而且还为鼓励性（Incentive）对策[2]问题的求解提供了基础，使得处于高层的决策者搞清了对自己最为有利的行动如何获得的问题。

三、控制均享信息结构的LQG分散控制问题

1. 问题的描述

设系统的动态方程为

$$x(k+1)=A(k)x(k)+B_1(k)u_1(k)+B_2(k)u_2(k)+v(k),x(0)=x_0$$

观测方程为

$$y_i(k)=C_i(k)x(k)+w_i(k),i=1,2,\ k=0,1,\cdots,\ N-1$$

其中 $x(k)\in R^n$，$y_i(k)\in R^{n_i}$，$u_i(k)\in R^{m_i}$表示控制站 i 在时刻 k 的控制，$A(k)$、$B_i(k)$、$C_i(k)$是适当阶数的矩阵，随机向量序列 $v(k)$、$w_i(k)$和 x_0 皆相互独立且遵从Gaussian分布，$v(k)$、$w_i(k)$均值为零，$i=1,\ 2,\ k=0,\ 1,\ \cdots,\ N-1$。

设控制站 i 在时刻 k 的信息集为

$$z_i(k)=\{y_i(0),\cdots,y_i(k);\ u_1(0),\cdots,u_1(k-1);\ u_2(0),\cdots,u_2(k-1)\}$$
$$i=1,2,k=0,1,\cdots,N-1 \tag{11}$$

这样的信息结构称为是控制均享(control－sharing)的。

现在的问题是：寻找 Borel 可测函数$\{\gamma_1[k,z_1(k)],\gamma_2[k,z_2(k)]|k=0,1,\cdots,N-1\}$极小化目标函数。

$$J=E\left[\sum_{k=0}^{N-1}\{x^\tau(k)Q_kx(k)+u^\tau(k)R_ku(k)\}+x^\tau(N)S_Nx(N)\right]$$

其中$u^\tau(k)=(u_1^\tau(k)',u_2^\tau(k))$，矩阵 $Q_k\geqslant 0,R_k>0,S_N\geqslant 0,k=0,1,\cdots,N-1$。

容易验证：信息结构（11）不是部分嵌套的，但却是“部分控制嵌入”的。

2. 嵌套化信息结构与相应的最优控制

将信息结构（11）部分嵌套化得

$$\hat{z}_i(k)=\{y_i(k),\ \delta(k)\},\ i=1,2,k=0,1,\cdots,N-1$$

这里 $\delta(k)=\{y_i(\tau),\ u_i(\tau)|i=1,2;\ \tau=0,1,\cdots,k-1\}$

由此立得结论：控制均享信息结构的部分嵌套化信息结构是一步时滞均享(one－step－delay sharing)信息结构。

由文[5]知一步时滞均享信息结构的 LQG 分散控制问题的最优策略为

$$u_i(k)=\hat{\gamma}_i^*[k,\hat{z}_i(k)]=F_i(k)y_i(k)+G_i(k)\hat{x}(k),i=1,2,k=0,1,\cdots,N-1 \tag{12}$$

其中　$\hat{x}(k)=E[x(k)|\delta(k)]$，它由如下差分方程确定

$$\hat{x}(k+1)=A(k)\hat{x}(k)+B_1(k)u_1(k)+B_2(k)u_2(k)+K_1(k)[y_1(k)-C_1(k)\hat{x}(k)]$$
$$+K_2(k)[y_2(k)-C_2(k)\hat{x}(k)],\hat{x}(0)=Ex_0=\bar{x}_0 \qquad (13)$$

而增益矩阵 $K_i(k)$、$F_i(k)$、$G_i(k)(i=1,2)$ 的计算公式和最优化目标函数值 J^*_{PN} 由〔5〕给出。

3. 最优控制的存在条件和表达式

由于控制均享信息结构是“部分控制嵌入”的，故由文〔1〕定理2、定理3可得如下结论。

命题 3 对具有控制均享信息结构的 LQG 分散控制问题，最优策略的存在性可由一组矩阵方程是否有解来判别。当最优控制存在时，它可表为信息的线性函数且最优目标函数值为 J^*_{PN}。当最优控制不存在时，目标函数的下确界等于 J^*_{PN}。

以下讨论如何得到判别最优控制是否存在的矩阵方程，和怎样给出最优控制的具体表达式。为了能更清楚地说明推导过程和给出结果，避免过于繁杂的运算，以下给出 $N=2$ 情形下的结果。对 $N>2$ 的情形完全类似推导也可得结果。

命题 4 当 $N=2$ 时，最优控制存在的充要条件是存在 $K_1(1,0)$、$K_2(1,0)$ 使得

$$G_1(1)[B_2(0)F_2(0)+K_2(0)]=K_1(1,0)F_2(0),$$
$$G_2(1)[B_1(0)F_1(0)+K_1(0)]=K_2(1,0)F_1(0)$$

当这一条件成立时，最优控制可表为

$$u_1(0)=\gamma_1^*[0,z_1(0)]=F_1(0)y_1(0)+G_1(0)\bar{x}_0,\quad u_2(0)=\gamma_2^*[0,z_2(0)]=F_2(0)y_2(0)+G_2(0)\bar{x}_0$$

$$u_1(1)=\gamma_1^*[1,z_1(1)]=F_1(1)y_1(1)+G_1(1)K_1(0)y_1(0)+G_1(1)B_1(0)u_1(0)+K_1(1,0)u_2(0)+b_1(1)$$

$$u_2(1)=\gamma_2^*[1,z_2(1)]=F_2(1)y_2(1)+G_2(1)K_2(0)y_2(0)+G_2(1)B_2(0)u_2(0)+K_2(1,0)u_1(0)+b_2(1)$$

其中 $b_i(1)=\hat{b}_i(1)-[G_i(1)B_j(0)G_j(0)+K_i(1,0)G_j(0)]\bar{x}_0, i\neq j, i,j=1,2$

$$\hat{b}_i(1)=\left\{\sum_{j=1}^{2}[B_j(0)G_j(0)-K_j(0)C_j(0)]\bar{x}_0+A(0)\bar{x}_0\right\}G_i(1),i=1,2$$

证 记最优控制(12)的轨迹为 $\hat{u}_i^*(k)$，其相应的状态和输出轨迹为 $\hat{x}^*(k)$ 和 $\hat{y}_i^*(k)$ $(i=1,2;\ k=0,1)$，则

$$\hat{y}_i^*(0)=C_i(0)x_0+w_i(0),\hat{u}_i^*(0)=F_i(0)\hat{y}_i^*(0)+G_i(0)\bar{x}_0,i=1,2 \qquad (14)$$

$$\hat{x}^*(1)=A(0)x_0+\sum_{i=1}^{2}[B_i(0)(F_i(0)\hat{y}_i^*(0)+G_i(0)\bar{x}_0)]+v(0)$$

$$\hat{y}_i^*(1)=C_i(1)\hat{x}^*(1)+w_i(1),\ i=1,2$$

$$\hat{u}_i^*(1)=F_i(1)\hat{y}_i^*(1)+G_i(1)\left[\sum_{j=1}^{2}(B_j(0)F_j(0)+K_j(0))\hat{y}_j^*(0)\right]+\hat{b}_i(1),$$

$$i=1,2 \tag{15}$$

必要性 设最优控制存在，则由命题3知它可表为信息的线性函数，故可设最优控制为

$$u_i(0)=\gamma_i^*[0,z_i(0)]=\tilde{F}_i(0)y_i(0)+\tilde{b}_i(0),i=1,2 \tag{16}$$

$$u_i(1)=\gamma_i^*[1,z_i(1)]=\tilde{F}_i(1)y_i(1)+\tilde{G}_i(0)y_i(0)+\tilde{K}_i(0)u_i(0)+\tilde{K}_i(1,0)u_j(0)$$
$$+\tilde{b}_i(1),i\neq j,\ i,j=1,2 \tag{17}$$

设其轨迹为$u_i^*(k)$，相应的状态和输出轨迹为$x^*(k)$和$y_i^*(k)$（$i=1$，2；$k=0$，1）。因为由命题3知上述最优控制与控制（12）有相同的目标函数值，故由文[1]引理3有$\hat{u}_i^*(k)=u_i^*(k)(i=1,2;\ k=0,\ 1)$，由此立得

$$\hat{x}^*(1)=x^*(1),\ \hat{y}_i^*(k)=y_i^*(k),i=1,2;\ k=0,1 \tag{18}$$

注意式（14）和（16），由$\hat{u}_i^*(0)=u_i^*(0)$及上式立得

$$[\tilde{F}_i(0)-F_i(0)]\hat{y}_i^*(0)+[\tilde{b}_i(0)-G_i(0)\overline{x}_0]=0$$

再注意$\hat{y}_i^*(0)=C_i(0)x_0+w_i(0)$和$w_i(0)$与$x_0$相互独立且遵从Gaussian分布，于是可得上式中$w_i(0)$的系数应为零，也即

$$\tilde{F}_i(0)=F_i(0),\tilde{b}_i(0)=G_i(0)\overline{x}_0,i=1,2 \tag{19}$$

同理，注意式（15）和（17），由$\hat{u}_i^*(1)=u_i^*(1)$及（18）（19）式得

$$[\tilde{F}_i(1)-F_i(1)]\hat{y}_i^*(1)+[(\tilde{G}_i(0)+\tilde{K}_i(0)F_i(0))-G_i(1)(B_i(0)F_i(0)+K_i(0))]$$
$$\cdot\hat{y}_i^*(0)+[\tilde{K}_i(1,0)F_j(0)-G_i(1)(B_j(0)F_j(0)+K_j(0))]\hat{y}_j^*(0)+[\tilde{b}_i(1)+(\tilde{K}_i(0)$$
$$\cdot G_i(0)+\tilde{K}_i(1,0)G_j(0))\overline{x}_0-\hat{b}_i(1)]=0,\ i\neq j,\ i,j=1,2 \tag{20}$$

再注意到$\hat{y}_i^*(1)=C_i(1)\hat{x}^*(1)+w_i(1)$和$w_i(1)$与$\hat{x}^*(1)$、$\hat{y}_1^*(0)$、$\hat{y}_2^*(0)$相互独立且遵从Gaussian分布得（20）中$w_i(1)$的系数应为零，即

$$\tilde{F}_i(1)=F_i(1),i=1,2$$

又因为$i\neq j$时，$y_j^*(0)=C_j(0)x_0+w_j(0)$，$w_j(0)$与$w_i(0)$、$x_0$相互独立且遵从Gaussian

分布得(20)中$w_j(0)$的系数应为零，即

$$\tilde{K}_i(1,0)F_j(0)=G_i(1)[B_j(0)F_j(0)+K_j(0)],i\neq j,i,j=1,2$$

充分性　直接计算不难验证命题中所给出控制的轨迹与控制(12)的轨迹相等，从而有相同的目标函数值J^*_{PN}，由此立得充分性成立。

参考文献

[1] 曾晓军、郑应平，非部分嵌套信息结构的LQG动态队决策问题的可解性(Ⅰ)，控制理论与应用，6，2，(1989) 8—16

[2] Ho, Y. C., Luh, P. B., and Olsder, G. J., A Control-Theoretic View on Incentives, Automatica, 18, 2, (1982), 167—179.

[3] Sandell, N. R., and Athans, A., Solution of Some Nonclassical LQG Stochastic Decision Problems, IEEE Trans. Automatic Control, AC-19, 2, (1974), 108—116.

[4] Ho, Y. C., and Chu, K. C., Team Decision Theory and Information Structure in Optimal Control Problems-Part I, IEEE Trans. Automatic Control, AC-17, 1, (1972), 22—28.

[5] Singh, M. G., Decentralised Control, North-Holland Publishing Company, Amsterdam. New York. Oxford, (1981), 145—151.

The Solvability of Dynamic LQG Team Decision Problems with Nonnested Information Structure (Ⅱ)

Zeng Xiaojun

(Department of Computer and System Science, Xiamen University, Xiamen)

Zheng Yingping

(Institute of Automation, Academic Sinica, Beijing)

Abstract

This paper discusses the hierarchical team decision problems with nonnested information structure and the LQG decentralized control problem with the control-sharing information pattern. At first, it is shown that the information structure of the above two classes of problems is "Partial control nested", then the necessary and sufficient conditions for the existence of optimal strategies (or control laws) are obtained and the explicit expressions of optimal strategies (or control laws) are given.

Key words——Team theory; Hierarchical team decision; Nonnested information structure; Decentralized LQG decision problem, Control-sharing information pattern.