第6卷 第3期
1989年9月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol. 6, No. 3
Sept., 1989

不确定性线性多变量系统的鲁棒分散控制

黄 战　　戴冠中

（西北工业大学计算机系，西安）

摘　要

本文首先给出了被给定控制器所稳定的系统的（自由）参数化表达式，接着探讨了三类不确知线性多变量系统的鲁棒分散控制器存在的充分及必要条件。

关键词：线性多变量系统；分散控制；鲁棒性；稳定性

一、引　言

最初由 Youla等[2] 引入的能稳定给定系统的所有补偿器集合的自由参数化表达式（常称 Youla 参数化）在现代鲁棒控制理论中起了关键的作用[1]. 本文第三部分探讨了与此相反的问题，给出了被给定控制器所稳定的受控对象集合的自由参数化表达式，并由此得出了确知系统情况下一种分散镇定控制器存在的充分必要条件. 以往的鲁棒分散控制大多用状态变量法研究，本文第四部分在第三部分基础上用互质矩阵分式分解方法[3,5] 按三类系统不确定性（加法扰动、乘法扰动及稳定因子扰动）探讨了鲁棒分散镇定问题，给出了能稳定在不确定域内的所有系统的一种鲁棒分散控制器存在的充分必要条件，另外给出了一种充分条件. 三类不确定性分别叙述如下：

假设$P_0(s)$是给定的标称系统，在加法扰动情况下，设P_0在虚轴上无极点，$A(P_0, r)$表示所有与P_0有相同开右半平面（ORHP）极点数的$P(s)$的集合，并满足

$$\|P(j\omega)-P_0(j\omega)\|<|r(j\omega)|, \ \forall\omega \tag{1.1}$$

其中$r(s)$是一个预先规定的稳定有理函数.

乘法扰动的情况下，设 P_0 在虚轴上无极点，$M(P_0, r)$ 表示所有与 $P_0(s)$ 有同样ORHP极点数的 $P(s)$ 的集合，并满足

$$P(s)=(I+L(s))P_0(s) \tag{1.2}$$

其中

$$\|L(j\omega)\|<|r(j\omega)|, \ \forall\omega$$

$r(s)$的定义同（1.1）式.

在稳定因子扰动情况下，$P_0(s)$作右互质分解：$P_0(s)=N_0(s)D_0^{-1}(s)$，$N_0(s)$、$D_0(s)$是右互质稳定有理矩阵[3]，则$S(N_0, D_0, r)$表示所有$P(s)$的集合，$P(s)=N(s)D^{-1}(s)$，

本文于1988年4月18日收到，1989年1月16日收到修改稿。

且满足

$$\left\|\begin{bmatrix} N-N_0 \\ D-D_0 \end{bmatrix}(s)\right\| < |r(s)|, \quad \forall s, \ \mathrm{Re}s \geqslant 0 \tag{1.3}$$

其中 $r(s)$ 定义同（1.1）式。

二、基础知识

在本文叙述中，S表示实系数正则稳定有理函数的集合，$M(S)$表示元素属于S的所有矩阵（阶数不论）的集合。S是H_∞空间的子集，而H_∞由ORHP中解析的所有复变函数组成并满足

$$\lim_{\sigma\to\infty} \sup_{\mathrm{Re}s>\sigma} |f(s)| < \infty$$

若$f(s)\in H_\infty$的范数定义为

$$\|f(s)\|_\infty = \sup_{\sigma>0} \sup_{\mathrm{Re}s>\sigma} |f(s)|$$

则有[3]

$$\|f(s)\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} |f(j\omega)| \tag{2.1}$$

若$F\in M(H_\infty)$，即矩阵F的所有元素皆为H_∞函数，则定义

$$\|F\|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{\omega} \bar{\sigma}(F(j\omega)) \tag{2.2}$$

其中$\bar{\sigma}(\cdot)$表示矩阵的最大奇异值。$M(R(s))$表示元素属于$R(s)$（实系数有理函数）的矩阵的集合，若$M\in M(R(s))$，则$\|M\|$表示其最大奇异值。

设一个系统$P\in M(R(s))$，其反馈控制器为$C\in M(R(s))$，则闭环传递函数阵为[3]

$$H(P, C) = \begin{bmatrix} (I+PC)^{-1} & -P(I+CP)^{-1} \\ C(I+PC)^{-1} & (I+CP)^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

我们称（P, C）稳定，或者称C稳定P，若$H(P, C)\in M(S)$。称（N, D）是P的一个右互质分解（r. c. f.），如果

（1）N, $D\in M(S)$且$P=ND^{-1}$.

（2）存在X、$Y\in M(S)$使得$XN+YD=I$.

左互质分解（l. c. f.）可作类似定义[3].

设$S(P)$表示能稳定P的所有C的集合，下面定理将给出$S(P)$的参数化表示式。

定理 1　（参见[3]，定理5.2.1）设$P\in M(R(s))$，（N, D），（$\tilde{D}$, $\tilde{N}$）为P的任意的r. c. f. 及l. c. f.，X, Y, $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$是

$$XN+YD=I \qquad \tilde{N}\tilde{X}+\tilde{D}\tilde{Y}=I \tag{2.4}$$

的解，则

$$S(P)=\{(Y-R\widetilde{N})^{-1}(X+R\widetilde{D}):R\in M(S),\ |Y-R\widetilde{N}|\neq 0\}$$
$$=\{(\widetilde{X}+DR)(\widetilde{Y}-NR)^{-1}:R\in M(S),\ |\widetilde{Y}-NR|\neq 0\}\tag{2.5}$$

三、被稳对象参数化与分散稳定

我们用 $P(C)$ 表示能被补偿器 C 稳定的所有系统 P 的集合，那么下面定理2将给出 $P(C)$ 的参数化表达式。

定理 2 设补偿器 $C\in M(R(s))$，设 (N_c, D_c)，$(\widetilde{D}_c, \widetilde{N}_c)$ 为 C 的任意 r.c.f. 及 l.c.f.，选择 X_c，Y_c，$\widetilde{X}_c$，$\widetilde{Y}_c$ 满足

$$X_cN_c+Y_cD_c=I,\ \widetilde{N}_c\widetilde{X}_c+\widetilde{D}_c\widetilde{Y}_c=I\tag{3.1}$$

则
$$P(C)=\{(Y_c-R\widetilde{N}_c)^{-1}(X_c+R\widetilde{D}_c):R\in M(S)\text{且}|Y_c-R\widetilde{N}_c|\neq 0\}$$
$$=\{(\widetilde{X}_c+D_cR)(\widetilde{Y}_c-N_cR)^{-1}:R\in M(S)\text{且}|\widetilde{Y}_c-N_cR|\neq 0\}\tag{3.2}$$

证　从 $H(P, C)$ 阵可知 P 和 C 的稳定条件是对称的，因此 (P, C) 稳定当且仅当 (C, P) 稳定，可把 P 当作 C 的补偿器，由定理1的结论即得到本定理结论。　　**证毕。**

下面我们引入一种分散镇定控制器，设 $P_0\in M(R(s))$，$n\times n$ 维，且

$$P_0=\begin{pmatrix}P_{11} & \cdots\cdots & P_{1m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \vdots & P_{kk} & \vdots\\ \vdots & & \ddots & \\ P_{m1} & \cdots\cdots & P_{mm}\end{pmatrix}\tag{3.3}$$

其中 P_{kk} 为 $n_k\times n_k$ 阵，$\sum_{k=1}^{m}n_k=n$，选择

$$T=\text{Block diag}(T_{11},\ \cdots T_{kk},\ \cdots,\ T_{mm})\tag{3.4}$$

其中 T_{kk} 为 $n_k\times n_k$ 阵，$\sum_{k=1}^{m}n_k=n$，作为一种特殊情况，可选择 T 为

$$T=\text{Block diag}(P_{11},\ \cdots,\ P_{kk},\ \cdots,\ P_{mm})\tag{3.5}$$

将块对角阵作稳定互质分解 $T=N_TD_T^{-1}=\widetilde{D}_T^{-1}\widetilde{N}_T$，其中 N_T，D_T，$\widetilde{D}_T$，$\widetilde{N}_T$ 是适当维数的稳定块对角阵，则由定理1，T 的块对角镇定控制器的集合可参数化为

$$\hat{S}(T)=\{(Y_T-R_T\widetilde{N}_T)^{-1}(X_T+R_T\widetilde{D}_T),\ R_T\in M(S),\ \text{且}|Y_T-R_T\widetilde{N}_T|\neq 0\}\tag{3.6}$$
$$=\{(\widetilde{X}_T+D_TR_T)(\widetilde{Y}_T-N_TR_T)^{-1},R_T\in M(S),\ \text{且}|\widetilde{Y}_T-N_TR_T|\neq 0\}\tag{3.7}$$

其中 R_T 为适当维数的块对角阵，且块对角阵 X_T，Y_T，$\widetilde{X}_T$，$\widetilde{Y}_T$ 满足

$$X_T N_T + Y_T D_T = I, \qquad \widetilde{N}_T \widetilde{X}_T + \widetilde{D}_T \widetilde{Y}_T = I \tag{3.8}$$

我们的思路是：选择 $\hat{C} \in \hat{S}(T)$，且 $\hat{C}$ 能稳定 P_0，以及 $A(P_0, r)$ 或者 $M(P_0, r)$ 或者 $S(N_0, D_0, r)$ 中所有元素 P，$\hat{C}$ 就是我们所求的分散控制器。

引理 1 设 $\hat{C} \in \hat{S}(T)$，$\hat{C}$ 稳定 P_0 当且仅当

$$(\widetilde{N}_T - \widetilde{N}_0)\hat{C} = (\widetilde{D}_0 - \widetilde{D}_T) \tag{3.9}$$

或者

$$\hat{C}(N_0 - N_T) = (D_T - D_0) \tag{3.10}$$

证 设 (N_C, D_C) 及 $(\widetilde{D}_C, \widetilde{N}_C)$ 是 $\hat{C} \in \hat{S}(T)$ 的任意的 r.c.f. 及 l.c.f.，由文献[3]的推论5.1.30，有

$$\widetilde{D}_T D_C + \widetilde{N}_T N_C = I \tag{3.11}$$

换句话即 $X_C = \widetilde{N}_T$，$Y_C = \widetilde{D}_C$ 是(3.1)的解，因此由定理2可得

$$P(C) = \{(\widetilde{D}_T - R\widetilde{N}_C)^{-1}(\widetilde{N}_T + R\widetilde{D}_C) : R \in M(S) \text{且} |\widetilde{D}_T - R\widetilde{N}_C| \neq 0\}$$

则 $\hat{C} \in \hat{S}(T)$ 稳定 $P_0 = \widetilde{D}_0^{-1}\widetilde{N}_0$ 当且仅当存在 $R \in M(S)$ 满足

$$\widetilde{D}_0 = \widetilde{D}_T - R\widetilde{N}_C \qquad \widetilde{N}_0 = \widetilde{N}_T + R\widetilde{D}_C \tag{3.12}$$

合并(3.12)中二式可得

$$(\widetilde{N}_T - \widetilde{N}_0)\widetilde{D}_C^{-1}\widetilde{N}_C = \widetilde{D}_0 - \widetilde{D}_T$$

即

$$(\widetilde{N}_T - \widetilde{N}_0)\hat{C} = \widetilde{D}_0 - \widetilde{D}_T$$

这就证明了(3.9)式，(3.10)式可由类似过程证明。 证毕。

从(3.11)及(3.9)或(3.10)可推得以下式子

$$\widetilde{D}_C D_0 + \widetilde{N}_C N_0 = I \tag{3.13}$$

或者

$$\widetilde{D}_0 D_C + \widetilde{N}_0 N_C = I \tag{3.14}$$

引理1在下节里经常用到。

下面定理3将给出能稳定给定系统 P_0 的分散控制器存在的充要条件。

定理 3 令 (N_0, D_0)，$(\widetilde{D}_0, \widetilde{N}_0)$ 是 P_0 的任意的 r.c.f. 及 l.c.f.，设 $\widetilde{N}_T$，$\widetilde{D}_T$，D_T，N_T，$\widetilde{X}_T$，$\widetilde{Y}_T$，X_T，Y_T 的含义同(3.8)。那么存在 $\hat{C} \in \hat{S}(T)$ 能稳定 P_0 的充分必要条件是存在一个块对角阵 $R_T \in M(S)$ 满足

$$A + R_T B = I \tag{3.15}$$

其中

$$A = Y_T D_0 + X_T N_0 \qquad B = \widetilde{D}_T N_0 - \widetilde{N}_T D_0$$

证 由引理1并将 $\widetilde{D}_C = Y_T - R_T\widetilde{N}_T$，$\widetilde{N}_C = X_T + R_T\widetilde{D}_T$ 代入(3.13)即可得到结论。证毕。

四、鲁棒分散控制器

本节里我们将讨论不确知系统的鲁棒分散控制器的设计问题. 设$P_0\in M(R(s))$为标称系统, $r\in S$且$A(P_0, r)$, $M(P_0, r)$及$S(N_0, D_0, r)$与引论中的定义相同. 引理2及引理3给出了给定控制器$C\in S(P_0)$能稳定上述集合中所有系统的充要条件.

引理 2[3]　$C\in S(P_0)$能稳定$A(P_0, r)$中的所有系统

$$\|C(I+P_0C)^{-1}r\|\leqslant 1 \tag{4.1}$$

$C\in S(P_0)$能稳定$M(P_0, r)$中的所有系统当且仅当

$$\|P_0C(I+P_0C)^{-1}r\|\leqslant 1 \tag{4.2}$$

引理 3[3]　设$P_0\in M(R(s))$, 给定一个P_0的$r.c.f.$ (N_0, D_0)以及$r\in S$. 设$C\in S(P_0)$, 选择C的一个$l.c.f.$ $(\widetilde{D}_C, \widetilde{N}_C)$满足$\widetilde{D}_CD_0+\widetilde{N}_CN_0=I$. 则$C$能稳定$S(N_0, D_0, r)$中所有系统$P$, 当且仅当

$$\|[\widetilde{D}_C\quad \widetilde{N}_C]r\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.3}$$

下面的定理4、定理5给出了上述情况下的鲁棒分散控制器存在的充分必要条件.

定理 4　设(N_0, D_0)及$(\widetilde{D}_0, \widetilde{N}_0)$是$P_0$任意的$r.c.f.$及$l.c.f.$, T的含义同(3.4)、(3.5), D_T, N_T, $\widetilde{D}_T$, $\widetilde{N}_T$, X_T, Y_T, $\widetilde{X}_T$, $\widetilde{Y}_T$含义同(3.8). 则存在分散控制器$\hat{C}\in\hat{S}(T)$能稳定P_0及$A(P_0, r)$中所有系统, 当且仅当

$$\min_{R_T\in M(S)}\|(\widetilde{X}_T+D_TR_T)\widetilde{D}_0r\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.4}$$

其中R_T是适当维数的块对角阵且满足(3.15).

存在$\hat{C}\in\hat{S}(T)$能稳定P_0及$M(P_0, r)$中的所有系统, 当且仅当

$$\min_{R_T\in M(S)}\|N_0(X_T+R_T\widetilde{D}_T)r\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.5}$$

其中R_T是适当维数的块对角阵且满足(3.15).

证　由 $P_0=\widetilde{D}_0^{-1}\widetilde{N}_0$, 则

$$\hat{C}(I+P_0\hat{C})^{-1}=\hat{C}(\widetilde{D}_0+\widetilde{N}_0\hat{C})^{-1}\widetilde{D}_0 \tag{4.6}$$

又因$\hat{C}\in S(P_0)$, 由引理1

$$\widetilde{N}_0\hat{C}=\widetilde{D}_T+\widetilde{N}_T\quad\hat{C}-\widetilde{D}_0 \tag{4.7}$$

又$\hat{C}\in\hat{S}(T)$, 有

$$\hat{C}=(\widetilde{X}_T+D_TR_T)(\widetilde{Y}_T-N_TR_T)^{-1} \tag{4.8}$$

将(4.7)、(4.8)代入(4.6)可得

$$\hat{C}(I+P_0\hat{C})^{-1}=(\widetilde{X}_T+D_TR_T)\widetilde{D}_0 \tag{4.9}$$

因此，存在$\hat{C}\in\hat{S}(T)$满足（4.1）当且仅当存在一个块对角阵$R_T\in M(S)$满足

$$\|(\widetilde{X}_T+D_TR_T)\widetilde{D}_0 r\|_\infty\leqslant 1$$

也即

$$\min_{R_T\in M(S)}\|(\widetilde{X}_T+D_TR_T)\widetilde{D}_0 r\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.10}$$

其中R_T是适当维数的块对角阵，由定理3，R_T要满足（3.15）；（4.5）式的证明过程与上述过程类似。　　证毕。

定理 5　存在分散控制器$\hat{C}\in\hat{S}(T)$稳定P_0及$S(N_0, D_0, r)$中所有系统，当且仅当

$$\inf_{R_T\in M(S)}\|A-R_TB\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.11}$$

其中　$A=[Y_T\quad X_T]r\qquad B=[-\widetilde{N}_T\quad \widetilde{D}_T]r$

R_T是适当维数块对角阵且满足（3.15）。

证　$\hat{C}\in\hat{S}(T)$，$\hat{C}=\widetilde{D}_C^{-1}\widetilde{N}_C$

其中

$$\widetilde{D}_C=Y_T-R_T\widetilde{N}_T\qquad \widetilde{N}_C=X_T+R_T\widetilde{D}_T \tag{4.12}$$

由（3.13）式$N_CN_0+D_CD_0=I$以及引理3，将（4.12）代入（4.3）

$$\|[Y_T\quad X_T]r-R_T[-\widetilde{N}_T\quad \widetilde{D}_T]r\|_\infty\leqslant 1$$

亦即

$$\inf_{R_T\in M(S)}\|A-R_TB\|\leqslant 1$$

由定理3，块对角阵R_T需满足（3.15）。　　证毕。

下面两个定理给出的是一种充分条件。

定理 6　将P_0分解为$P_0=Q+T$，T是块对角阵，且设T与P_0具有相同的ORHP极点数，T在虚轴上无极点。设$r\in S$，定义集合$A(P_0, r)$如（1.1）式。设r_1，$\bar{r}\in S$，使得$\|Q(j\omega)\|\leqslant r_1(j\omega)$，$|\bar{r}(j\omega)|\geqslant|r_1(j\omega)|+|r(j\omega)|$，$\forall\omega$。那么，存在$\hat{C}\in\hat{S}(T)$稳定$A(P_0, r)$中所有系统，如果

$$\min_{R_T\in M(S)}\|(\widetilde{X}_T+D_TR_T)\widetilde{D}_T\bar{r}\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.13}$$

其中R_T是一个块对角阵。

证　$P=P_0+\Delta P=T+Q+\Delta P=T+\Delta P'$

其中　$\Delta P'=Q+\Delta P$

我们有

$$\|\Delta P'(j\omega)\|\leqslant\|Q(j\omega)\|+\|\Delta P(j\omega)\|<|r_1(j\omega)|+|r(j\omega)|$$
$$\leqslant|\bar{r}(j\omega)|,\ \forall\omega \tag{4.14}$$

我们可定义集合$A(T, \bar{r})$如（1.1）式。从（4.14）可知

$$A(T,\ \bar{r})\supseteq A(P_0,\ r)$$

换而言之，$\hat{C}\in\hat{S}(T)$稳定$A(T,\ \bar{r})$中所有系统，则也稳定$A(P_0,\ r)$中所有系统，反之不一定成立。因此(4.13)可由引理2推得。

定理 7　$P\in S(N_0,\ D_0,\ r)$，T的含义同定理6，给定T的一个$r.c.f.(N_T,\ D_T)$，N_T、D_T为块对角阵。设$r_1\in S$使得

$$\left\|\begin{bmatrix}N_0-N_T\\D_0-D_T\end{bmatrix}\right\|\leqslant|r_1(s)|,\ \forall s,\ \mathrm{Re}\,s\geqslant 0$$

$\bar{r}\in S$使得

$$|\bar{r}(s)|\geqslant|r(s)|+|r_1(s)|,\ \forall s,\ \mathrm{Re}s\geqslant 0$$

则存在$\hat{C}\in\hat{S}(T)$稳定$S(N_0,\ D_0,\ r)$中所有系统，如果

$$\min_{R_T\in M(S)}\ \|A-R_TB\|_\infty\leqslant 1 \tag{4.15}$$

其中　$A=[Y_T\ \ X_T]\bar{r}$，　$B=[-\tilde{N}_T\ \ \tilde{D}_T]\bar{r}$，

R_T为块对角阵。

证
$$\left\|\begin{bmatrix}N-N_T\\D-D_T\end{bmatrix}(s)\right\|\leqslant\left\|\begin{bmatrix}N-N_0\\D-D_0\end{bmatrix}(s)\right\|+\left\|\begin{bmatrix}N_0-N_T\\D_0-D_T\end{bmatrix}(s)\right\|$$
$$<|r(s)|+|r_1(s)|$$
$$\leqslant|\bar{r}(s)|,\ \forall s,\ \mathrm{Re}s\geqslant 0$$

定义　$S(N_T,\ D_T,\ \bar{r})$如(1.3)式，我们有

$$S(N_T,\ D_T,\ \bar{r})\supseteq S(N_0,\ D_0,\ r)$$

亦即$\hat{C}\in\hat{S}(T)$稳定$S(N_T,\ D_T,\ \bar{r})$中所有系统一定能稳定$S(N_0,\ D_0,\ r)$中所有系统，反之不一定成立。因此，(4.15)可由引理3导出。

五、讨　论

定理4、定理5中的充要条件还是一种有条件的H_∞范数极小化问题，有待于完善成无条件的H_∞范数极小化问题。用状态变量法得到的结论与本文的结论之间的关系也是一个有待于探讨的有意义的问题。

致谢　王礼全同志对本文提出了不少非常有益的意见，在此表示衷心的感谢！

参 考 文 献

[1]　Dorato, Peter, A Historical Review of Robust Control, IEEE Control Systems Magazine, April, (1987).

〔2〕 Youla, D.C., Jabr, H.A., and Bongiorno, J.J., Jr., Modern Wiener-Hopf Design of Optimal Controller-Part Ⅱ: The Multivariable Case, IEEE Trans., AC-25, (1976), 75—93.

〔3〕 Vidyasagar, M., Control System Synthesis: A Factorization Approach, MIT Press, Cambrige MA, (1985).

〔4〕 Francis, B.A., A Course in H_∞ Control Theory, Springer-Verlag, New York, (1987).

〔5〕 Vidyasagar, M., Kimura, H., Robust Controllers for Uncertain Multivariable Systems, Automatica, 22, 1, (1986), 85—94.

Robust Decentralised Controllers for Uncertain Linear Multivariable Systems

Huang Zhan, Dai Guanzhong

(Department of Computer Science and Engineering, Northwestern polytechnical University, Xian)

Abstract

This paper deals with two distinct yet related topics in the design of robust controllers for imprecisely known linear Multivariable systems. 1) Parameterization of plants stabilized by a given controller is derived. 2) Necessary and sufficient conditions for the existence of robust decentralised controllers to achieve stabilization in the face of plant uncertainties are presented. In addition, sufficient conditions are given.

Key words——Linear multivariable system; Decentralised control; Robustness; Stability