

故障检测及状态偏差估计的二级分解算法*

戴文战 刘鸿强 潘日芳

(华东化工学院自动化研究所, 上海)

摘 要

本文首先推导证明当参考模型和实际系统不相吻合时, 根据参考模型建立的Kalman滤波器所产生的估计残差将与模型的偏离程度成正比, 据此给出故障检测方法; 其次推导出状态偏差形式的系统方程; 最后将B. Friedland提出的分离估计法推广到状态偏差估计中, 并进一步提出状态偏差估计的二级分解算法。

关键词: 故障检测; 故障诊断; 可靠性; 滤波理论; 分解估计

一、引 言

提高系统的可靠性包括两个方面, 一是在设计系统的过程中考虑到系统的可靠性指标, 另一是在系统运行过程中及时地对系统进行故障检测与诊断。故障检测与诊断的研究工作国外始于七十年代中期, 国内始于八十年代初期, 目前已成为自动控制领域的一个新的研究方向。

本文分四节。第二节给出故障检测方法, 第三节推导出状态偏差形式的系统方程和状态偏差估计二级分解算法, 最后是仿真和结语。

二、故 障 检 测

设如下线性定常时间离散状态方程和量测方程精确地描述了正常情况下的实际系统:

$$X_n(k+1) = A_n \cdot X_n(k) + B_n \cdot U(k) + \xi(k) \quad (1)$$

$$Z(k) = C_n \cdot X_n(k) + \theta(k) \quad (2)$$

这里, $X_n \in R^n$ 是系统状态向量, $Z \in R^r$ 是系统的量测向量, $U \in R^m$ 是系统的确定性输入向量, A_n 、 B_n 、 C_n 均为维数适当的常数阵, $\xi(k)$ 和 $\theta(k)$ 为零均值、协方差矩阵分别为 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 的高斯白噪声, 彼此互不相关, 它们分别表示系统噪声和量测噪声。

进一步假设: 系统 (1)、(2) 是完全可观测的, 且 A_n 的所有特征根均位于单位圆

*国家自然科学基金资助的课题。

本文于1987年11月30日收到。1989年2月27日收到修改稿。

内。

由(1)、(2)知, $\{A_n, B_n, C_n\}$ 及 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 完全确定了正常情况下的实际系统, 式(1)、(2)叫做系统的参考模型。对参考模型(1)(2)可构造如下Kalman滤波器:

$$\hat{X}_n(k+1|k) = A_n \cdot \hat{X}_n(k|k) + B_n \cdot U(k) \quad (3)$$

$$\hat{X}_n(k+1|k+1) = \hat{X}_n(k+1|k) + K_n(k+1)r_n(k+1) \quad (4)$$

$$r_n(k) = Z(k) - C_n \hat{X}_n(k|k-1) \quad (5)$$

$$K_n(k) = P_n(k)C_n^T [C_n P_n(k)C_n^T + R(k)]^{-1} \quad (6)$$

$$P_n(k+1) = A_n [I - K_n(k)C_n] P_n(k) A_n^T + Q(k) \quad (7)$$

$$V_n(k) = C_n P_n(k) C_n^T + R(k) \quad (8)$$

式中 $\hat{X}_n(k+1|k)$ 是状态 X_n 在 k 时刻的一步预估, $\hat{X}_n(k|k)$ 是状态 X_n 在 k 时刻的滤波估计, $r_n(k)$ 为该滤波器在 k 时刻的估计残差, $K_n(k)$ 为Kalman滤波器的增益矩阵, $P_n(k)$ 为 $X_n(k)$ 的进一步预估误差协方差阵, $V_n(k)$ 为 $r_n(k)$ 的协方差矩阵。

如果(1)(2)完全精确地刻划了实际系统, 由Kalman滤波器的性质知, $\hat{X}_n(k)$ 为 $X_n(k)$ 的最优估计, $r_n(k)$ 服从零均值、协方差矩阵为 $V_n(k)$ 的高斯分布。现假设系统由于某种原因发生了故障, 显然式(1)、(2)已不再是实际系统的精确模型了。假设在故障情况下实际系统可用如下模型表示:

$$X(k+1) = AX(k) + B \cdot U(k) + \xi(k) \quad (9)$$

$$Z(k) = C \cdot X(k) + \theta(k) \quad (10)$$

$$A = A_n + \Delta A, B = B_n + \Delta B, C = C_n + \Delta C \quad (11)$$

$$\text{其中} \quad \tilde{X}_n(k) \triangleq X(k) - \hat{X}_n(k|k-1) \quad (12)$$

$$\text{令} \quad \bar{X}_n(k) = X(k) - \hat{X}_n(k|k) \quad (13)$$

$\tilde{X}_n(k)$ 称为状态偏差, $\hat{X}_n(k)$ 叫做准状态偏差。

联立(1)~(12), 整理后得

$$\tilde{X}_n(k+1) = G_n(k) \tilde{X}_n(k) + \Delta A \cdot X(k) + \Delta B \cdot U(k) - A_n K_n(k) \Delta C \cdot X(k) + \zeta^*(k) \quad (14)$$

$$\text{其中} \quad G_n(k) = A_n - A_n K_n(k) C_n \quad (15)$$

$$\zeta^*(k) = \zeta(k) - A_n K_n(k) \theta(k) \quad (16)$$

对式(9)两边取数学期望, 得

$$E\{X(k)\} = \sum_{\tau=k_0}^k [A^{k-\tau} B \cdot u(\tau)] \quad (17)$$

对式(14)两边取数学期望, 并联立(17), 经整理后得

$$E\{\tilde{X}_n(k)\} = \sum_{s=k_0}^k \left\{ [G_n(k)]^{k-s} \left\{ [\Delta A - A_n K_n(k) \Delta C] \cdot \left[\sum_{\tau=k_0}^k [A^{s-\tau} \cdot B u(\tau)] \right] + \Delta B \cdot u(s) \right\} \right\} \quad (18)$$

将式(10)、(12)代入到(5), 并取数学期望

$$E\{r_n(k)\} = C_n \cdot E\{\tilde{X}_n(k)\} + \Delta C \cdot E\{X(k)\} \quad (19)$$

显然, 只要 ΔA 、 ΔB 、 ΔC 中至少有一个不为零阵, 则一般而言, 由式(18)知, $E\{\tilde{X}_n(k)\} \neq 0$, 进而由(19)知, $E\{r_n(k)\} \neq 0$, 利用这个特点, 可进行故障检测。^[1]

三、状态偏差二级分解估计

$$\text{令} \quad \alpha(k) \triangleq \Delta A \cdot X(k) + \Delta B \cdot u(k) \quad (20)$$

$$\beta(k) \triangleq \Delta C \cdot X(k) \quad (21)$$

$$D_n(k) \triangleq A_n K_n(k) \quad (22)$$

代入(14), 得

$$\tilde{X}_n(k+1) = G_n(k) \tilde{X}_n(k) + \alpha(k) - D_n(k) \beta(k) + \zeta^*(k) \quad (23)$$

将(10)、(12)、(21)代入式(5), 整理后得

$$r_n(k) = C_n \cdot \tilde{X}_n(k) + \beta(k) + \theta(k) \quad (24)$$

显然, 在系统正常情况下, 由于 $\Delta A = 0$, $\Delta B = 0$, $\Delta C = 0$, 因而 $\alpha(k) = 0$, $\beta(k) = 0$ 。 $\alpha(k)$ 、 $\beta(k)$ 的大小反映系统故障的大小。 $\beta(k)$ 表征传感器故障, $\alpha(k)$ 表征 ΔA 、 ΔB 的大小。

当系统发生故障时, 据文献[1], 可认为

$$\alpha(k+1) = \alpha(k) \quad (25)$$

$$\beta(k+1) = \beta(k) \quad (26)$$

将式(23)~(26)改写成增广形式如下:

$$\begin{bmatrix} \tilde{X}_n(k+1) \\ \alpha(k+1) \\ \beta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_n(k) & I_{n \times n} & -D_n(k) \\ 0 & I_{n \times n} & 0 \\ 0 & 0 & I_{r \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{X}_n(k) \\ \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta^*(k) \quad (27)$$

$$r_n(k) = [C_n \quad 0 \quad I_{r \times r}] \begin{bmatrix} \tilde{X}_n(k) \\ \alpha(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} + \theta(k) \quad (28)$$

根据(27)、(28)式可以直接构造增广系统的 Kalman 滤波器以直接估计出 $\tilde{X}_n(k+1)$ 、 $\alpha(k+1)$ 、 $\beta(k+1)$ 。但是由于增广系统的维数一般较高, 直接求解这样高维的 Kalman 滤波器将存在计算上的困难。注意到增广系统(27)、(28)中其系统矩阵

是分块的上三角阵且 $\alpha(k)$ 、 $\beta(k)$ 均为静态的非随机向量,故可采用分解估计方法^[2]。

对(27)、(28)式,令

$$Y_2 \triangleq \begin{pmatrix} \tilde{X}_n \\ \alpha \end{pmatrix} \in R^{2n \times 1} \quad (29)$$

则(27)、(28)式可改写为

$$\begin{bmatrix} Y_2(k+1) \\ \beta(k+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{11}(k) & H_{12}(k) \\ 0 & I_{r \times r} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_2(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ 0 \end{bmatrix} \zeta^*(k) \quad (30)$$

$$r_n(k) = [J_{11} \quad I] \begin{bmatrix} Y_2(k) \\ \beta(k) \end{bmatrix} + \theta(k) \quad (31)$$

式中

$$H_{11}(k) = \begin{bmatrix} G_n(k) & I_{n \times n} \\ 0 & I_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad H_{12}(k) = \begin{bmatrix} -D_n(k) \\ 0_{n \times r} \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} I_{n \times n} \\ 0_{n \times n} \end{bmatrix}, \quad J_{11} = [C_n \quad 0_{r \times n}]$$

根据文献[2],系统(30)、(31)的最优状态估计 $\hat{Y}_2(k)$ 和 $\hat{\beta}(k)$ 可由如下估计器1给出。

估计器1: ((33) — (39))

$$\hat{Y}_2(k) = \tilde{Y}_2(k) + V_2(k) \hat{\beta}(k) \quad (33)$$

$$\hat{\beta}(k) = [I - K_\beta(k) S_2(k)] \hat{\beta}(k-1) + K_\beta(k) r_2^*(k) \quad (34)$$

$$K_\beta(k) = M_2(k+1) [J_{11}(k) V_2(k) + I_{r \times r}]^T R^{-1}(k) \quad (35)$$

$$S_2(k) = J_{11}(k) U_2(k) + I_{r \times r} \quad (36)$$

$$V_2(k) = U_2(k) - K_2^*(k) S_2(k) \quad (37)$$

$$U_2(k) = H_{11}(k) V_2(k) + H_{12}(k), \quad U_2(0) = 0, M_2(0) = M_0 \quad (38)$$

$$M_2^{-1}(k+1) = M_2^{-1}(k) + S_2^T(k) [J_{11}(k) P_2^*(k) J_{11}^T(k) + R(k)]^{-1} \cdot S_2(k) \quad (39)$$

这里 $\tilde{Y}_2(k)$ 、 $r_2^*(k)$ 、 $K_2^*(k)$ 、 $P_2^*(k)$ 分别为系统(30)、(31)中令 $\beta(k)=0$ 时所构成的Kalman滤波器的最优状态滤波估计、估计残差、增益矩阵和进一步预估误差协方差矩阵。它们可由对如下的子系统进行估计求得

$$Y_2(k+1) = H_{11}(k) Y_2(k) + \Gamma_1 \zeta^*(k) \quad (40)$$

$$r_n(k) = J_{11} Y_2(k) + \theta(k) \quad (41)$$

同理,系统(40)、(41)的最优状态估计 $\tilde{Y}_2(k)$ 可由如下估计器2、估计器3求得

估计器2: ((42) — (48))

$$\hat{\tilde{X}}_n^*(k) = \tilde{X}_n(k) + V_1(k) \hat{\alpha}(k) \quad (42)$$

其中

$$\hat{\alpha}(k) = [I - K_{\alpha}(k)S_1(k)]\hat{\alpha}(k-1) + K_{\alpha}(k) \cdot r_1^*(k) \quad (43)$$

$$K_{\alpha}(k) = M_1(k+1)[C_n V_1(k)]^T R^{-1}(k) \quad (44)$$

$$S_1(k) = C_n u_1(k) \quad (45)$$

$$V_1(k) = U_1(k) - K_1^*(k)S_1(k) \quad (46)$$

$$U_1(k+1) = G_n(k)V_1(k) + I \quad u_1(0) = 0, M_1(0) = M_0 \quad (47)$$

$$M_1^{-1}(k+1) = M_1^{-1}(k) + S_1^T(k)[C_n P_1^*(k) C_n^T + R(k)]^{-1} S_1(k) \quad (48)$$

这里 $\tilde{X}_n(k)$ 、 $r_1^*(k)$ 、 $K_1^*(k)$ 、 $P_1^*(k)$ 分别为系统 (40)、(41) 中令 $\alpha(k) = 0$ 时的最优状态估计、估计残差、增益矩阵和进一步预估误差协方差矩阵, 可由如下估计器 3 给出。

估计器 3: ((49) — (53))

$$\tilde{X}_n(k+1) = G_n(k)\tilde{X}_n(k) + K_1^*(k+1)r_1^*(k+1) \quad (49)$$

$$r_1^*(k) = r_n(k) - C_n G_n(k-1)\tilde{X}_n(k-1) \quad (50)$$

$$K_1^*(k) = P_1^*(k) C_n^T [C_n P_1^*(k) C_n^T + R(k)]^{-1} \quad (51)$$

$$P_1^*(k+1) = G_n(k)[I - K_1^*(k)C_n]P_1^*(k)G_n^T(k) \quad (52)$$

$$+ Q(k) - D_n(k)R(k)D_n^T(k) \quad (53)$$

根据文献[2]有,

$$\tilde{Y}_2(k) = \begin{bmatrix} \tilde{X}_n^*(k) \\ \hat{\alpha}(k) \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$r_2^*(k) = r_2(k) - J_{11}\tilde{Y}_2(k) \quad (55)$$

$$K_2^*(k) = \begin{bmatrix} K_1^*(k) + V_1(k)K_{\alpha}(k) \\ K_{\alpha}(k) \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$P_2^*(k) = \begin{bmatrix} P_1^*(k) + U_1(k)M_1(k)U_1^T(k) & U_1(k)M_1(k) \\ [U_1(k)M_1(k)]^T & M_1(k) \end{bmatrix} \quad (57)$$

为便于应用, 现将以上推得的状态偏差二级分解算法归纳如下:

1. 根据估计器 3, 求出 $\tilde{X}_n(k)$ 、 $r_1^*(k)$ 、 $K_1^*(k)$ 及 $P_1^*(k)$; 2. 根据估计器 2, 求出

$\tilde{X}_n^*(k)$ 、 $\hat{a}(k)$ 及 $K_a(k)$; 3. 根据式(54) — (57), 求出 $\tilde{Y}_2(k)$ 、 $r_2^*(k)$ 、 $K_2^*(k)$ 及 $P_2^*(k)$; 4. 根据估计器1, 求出 $\hat{Y}_2(k)$ 、 $\hat{\beta}(k)$.

四、仿真实例及结语

为了说明分解估计算法的有效性, 作者在计算机上作了一系列数字仿真, 限于篇幅, 仅举一例.

设某控制系统在正常情况下的系统方程如下:

$$X(k+1) = A_n X(k) + B_n U(k) + \zeta(k) \quad (58)$$

$$Y(k) = C_n X(k) + \theta(k) \quad (59)$$

式中 $A_n = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$, $B_n = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C_n = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^T$, $U(k) = 1$ (60)
 $\zeta(k)$ 、 $\theta(k)$ 均为零均值、协方差矩阵分别为 $Q(k)$ 和 $R(k)$ 的高斯白噪声, $Q(k) = \text{diag}(10^{-3}, 10^{-3})$, $R(k) = \text{diag}(10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4}, 10^{-4})$.

假设系统由于某种原因, 在 $K=80$ 时控制矩阵由正常情况下的 B_n 变到 $B_{\text{真}} = (2.2, 1.4)^T$, 即 $\Delta B = (1.2, 0.4)^T$. 应用分解估计算法, 得到仿真结果如图1. 仿真结果说明,

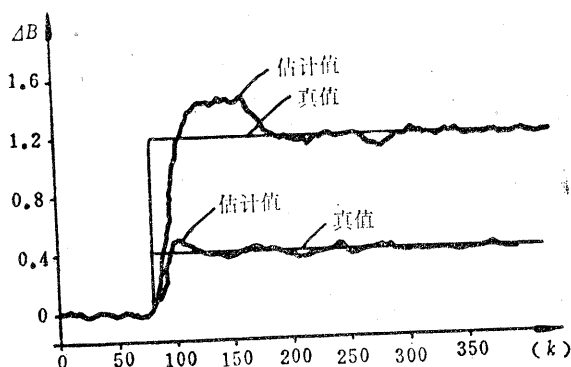


图 1 仿真结果

本方法不仅能判断系统是否发生故障, 而且能估计出故障的大小, 由于采用了分解估计, 从而将一个高维的Kalman滤波器分解成二级, 提高了估计的精度和速度, 如果对式(20)、(29)的定义略加修改, 这里介绍的方法很容易推广到三级分解算法.

参 考 文 献

- [1] Willsky, A.S., A Survey of Design Methods for Failure Detection in Dynamics Systems, Automatica, 12, (1976), 601—611.
- [2] Friedland, B., Treatment of Bias in Recursive Filtering, IEEE Trans. Aut. Control, 14, (1969), 359—367.

Fault Detection and Two-decomposition Algorithm for State-error Estimation

Dai Wenzhan, Liu Hongjiang, Pan Rifang

(East China University of Chemical Technology, Shanghai)

Abstract

In this paper, it is shown that the residual process produced by kalman's filter which is based on the reference system is directly proportional to the mismatch degree of model, and a method of fault detectoon is presented. In addition, system equation in state error form is given. For simplifying estimation, the two-decomposition algorithm for state error estimation is also proposed. By various simulations, it is shown that using this method we not only can judge whether there are fault but also can effectively estimate the process state, state error, and fault variables in system.

Key words—Fault detection; Fault diagnosis; Reliability; Filtering theory; Decomposition estimation