第6卷 增刊1 控制理论与应用 Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月 CONTROL THEORY AND APPLICATIONS Jan., 1989

椭圆型方程的最优控制与区域扰动*

冯德兴 张秉钰

（中国科学院系统科学研究所，北京）

摘 要

本文讨论扰动区域上椭圆型方程的最优控制问题。应用区域扰动下Sobolev空间的理论证明了，当微分算子的定义域在一定意义下逼近于某个固定的区域时，相应的最优控制和最优解也按某种扑拓收敛。

一、引 言

设$\{\Omega_\varepsilon\}$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$为$R^n$中一族有界开区域，$\Gamma_\varepsilon=\partial\Omega_\varepsilon$足够光滑，且$\Omega_\varepsilon$局部地位于$\Gamma_\varepsilon$的一侧。考虑如下最优控制问题：

$$-\Delta y(x)=v(x),\ x\in\Omega_\varepsilon;\ y|_{\Gamma_\varepsilon}=0, \tag{1.1}$$

$$J_\varepsilon(v)=\|y_\varepsilon(v)-z_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+N\|v\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}, \tag{1.2}$$

其中 $y_\varepsilon(v)$为（1.1）的对应于$v\in L^2(\Omega_\varepsilon)$的解，$N$为给定正数，而$z_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon)$为指定元。最优控制问题是，对于给定的闭凸子集$U_\varepsilon\subset L^2(\Omega_\varepsilon)$，寻找$v_\varepsilon^*\in U_\varepsilon$使

$$J_\varepsilon(v_\varepsilon^*)=\inf J_\varepsilon(v),v\in U_\varepsilon. \tag{1.3}$$

熟知[1]上述问题有唯一解$v_\varepsilon^*\in U_\varepsilon$,$v_\varepsilon^*$叫做最优控制，而$y_\varepsilon^*=y_\varepsilon(v_\varepsilon^*)$则叫做最优轨线或最优解。

这里我们把Ω_ε看作Ω_0的某种小扰动。人们自然指望相应的最优控制v_ε^*和v_0^*也很接近，否则这样的最优控制将失去实用价值，因为实际中定义域要么无法确切给出，要么会经受某种不可预料的微扰动。因此研究区域扰动对于最优控制的影响从理论上和应用上都是有意义的。我们将采用Stummel[2]研究的扰动区域上的Sobolev空间理论，在对扰动区域Ω_ε作相当一般的假设下给出最优控制v_ε^*和最优解y_ε^*关于Ω_ε的连续依赖性。

二、扰动区域上的Sobolev空间

本节先简单回顾一下扰动区域上Sobolev空间的有关事实。下面证明的引理对于后面的讨论是重要的。

---

*中国科学院科学基金资助的课题。

本文于1986年5月28日收到。1986年10月17日收到修改稿。

设H为一实Hilbert空间，$\{E_k\}$，$k\in N$为H中一列子集（N为自然数集）。仿照〔10〕定义$\{E_k\}$按某拓扑τ（强拓扑s或弱拓扑w）的上、下极限：

$$\tau-\lim\inf E_k=\{u\in H \mid \exists u_k\in E_k,\ k\in N,\ \text{使}\ \tau-\lim u_k=u\},$$

$$\tau-\lim\sup E_k=\{u\in H \mid \exists \text{子列}\{k'\}\subset N,\ u_{k'}\in E_{k'},\ \text{使}\ \tau-\lim u_{k'}=u\},$$

当 $\tau-\lim\inf E_k=\tau-\lim\sup E_k\triangleq E_0$ 时，称$\{E_k\}\tau-$收敛于E_0，记作$\tau-\lim E_k=E_0$。在〔2〕中证明了

引理 1 设E_0，$E_k(k\in N)$为H中闭线性子空间，P_k为H到E_k之上的直交投影，那么为了

$$s-\lim E_k=w-\lim E_k=E_0,$$

必须且只须

$$s-\lim P_kv=P_0v,\quad \forall v\in H.$$

下面的引理2把引理1的结果部分地推广到E_k为一般闭凸子集的情形.

引理 2 设E_0，$E_k(k\in N)$为H中闭凸子集，P_k为H到E_k的投影。设$\{E_k\}$ Mosco收敛于E_0，即

$$s-\lim E_k=w-\lim E_k=E_0,$$

那么

1） $\forall v\in H$，$s-\lim P_kv=P_0v$；

2） $\forall \{v_k\}\subset H$，$s-\lim v_k=v_0 \Longrightarrow s-\lim P_kv_k=P_0v_0$。

证 1）任取$v^*\in E_0$，依假设，$\exists v_k^*\in E_k$使$s-\lim v_k^*=v^*$。于是$\forall v\in H$，

$$\|P_kv-v_k^*\|=\|P_kv-P_kv_k^*\|\leqslant\|v-v_k^*\|,\quad k\in N$$

所以$\{P_kv\}$在H中有界，可以选出一子列$\{P_{k'}v\}$使$w-\lim P_{k'}v=h$。从假设可知$h\in E_0$。对于任意$v\in H$，显然$P_0v\in E_0$，并且$\exists h_{k'}\in E_{k'}$，使$s-\lim h_{k'}=P_0v$。因此

$$\inf_{w\in E_0}\|w-v\|=\|P_0v-v\|=\lim\|h_{k'}-v\|$$

$$\geqslant\lim_{k'\to\infty}\inf_{w\in E_{k'}}\|w-v\|=\lim_{k'\to\infty}\|P_{k'}v-v\|=\|h-v\|,$$

这表明$h=P_0v$，并且

$$\lim_{k'\to\infty}\|P_{k'}v-v\|=\|P_0v-v\|.$$

另一方面，由于$\|P_{k'}v-v\|\leqslant\|h_{k'}-v\|$，显然有

$$\lim_{k'\to\infty}\|P_{k'}v-v\|\leqslant\|P_0v-v\|,$$

因此$s-\lim P_{k'}v=P_0v$。但$w-\lim P_{k'}v=P_0v=h$，所以$s-\lim P_kv=P_0w$。

2）设$v_k\in E_k$，$s-\lim v_k=v_0$。我们有

$$\|P_kv_k-P_0v_0\|\leqslant\|P_kv_k-P_kv_0\|+\|P_kv_0-P_0v_0\|$$
$$\leqslant\|v_k-v_0\|+\|P_kv_0-P_0v_0\|.$$

由此依已证的1）得知$s-\lim P_kv_k=P_0v_0$。 证毕.

设 $\{\Omega_\varepsilon\}$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，为 R^n 中一族开子集，并有一有界开集 $\Omega\subset R^n$ 使 $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$，$\forall 0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，设 $H^m(\Omega_\varepsilon)$ 和 $H_0^m(\Omega_\varepsilon)$ 为通常的 m 阶 Sobolev 空间（例如见[1]）。令 $L^{m,2}(\Omega)=\prod_{|\sigma|\leqslant m}(L^2(\Omega))_\sigma$，其中标号 $\sigma=(\sigma_1,\cdots,\sigma_n)$ 的分量为非负整数，$|\sigma|=\sigma_1+\cdots+\sigma_n$。$L^{m,2}(\Omega)$ 中内积为

$$(u,v)_m=\sum_{|\sigma|\leqslant m}\int_\Omega u^\sigma(x)\overline{v^\sigma}(x)dx,\ u=(u^\sigma),\ v=(v^\sigma)\text{，特别 }L^{0,2}(\Omega)=L^2(\Omega)\text{。}$$

而对于 $u=(u^0,u^1,\cdots,u^n)$，$v=(v^0,v^1,\cdots,v^n)\in L^{1,2}(\Omega)$，

$$(u,v)_1=\sum_{k=0}^n\int_\Omega u^k(x)\overline{v}^k(x)dx\text{。}$$

定义 $L^{m,2}(\Omega)$ 的子空间 $L_0^{m,2}(\Omega_\varepsilon)$：

$$L_0^{m,2}(\Omega_\varepsilon)=\{u\in L^{m,2}(\Omega)\,|\,u(x)=0,\ a.e.\,x\in\Omega\setminus\Omega_\varepsilon\},$$

利用零延拓可以定义 $H^m(\Omega_\varepsilon)$ 到 $L^{m,2}(\Omega)$ 的嵌入映象 J_ε^m 如下：对于 $u\in H^m(\Omega_\varepsilon)$，

$$(J_\varepsilon^m u)(x)=\begin{cases}(D^\alpha u(x))_{|\alpha|\leqslant m}, & x\in\Omega_\varepsilon\\ 0, & x\in\Omega\setminus\Omega_\varepsilon\end{cases}$$

另外，我们还要用到 $L_0^{m,2}(\Omega_\varepsilon)$ 的子空间 $E_\varepsilon^m=J_\varepsilon^m H_0^m(\Omega_\varepsilon)$。

今利用映射 J_ε^m 定义 $H^m(\Omega_\varepsilon)$ 中元列的收敛。

定义 3 设 $u_\varepsilon\in H^m(\Omega_\varepsilon)$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$。我们说 u_ε 为 m－强（相应地 m－弱）收敛于 u_0，是指在 $L^{m,2}(\Omega)$ 中 $J_\varepsilon^m u_\varepsilon$ 强（相应地弱）收敛于 $J_0^m u_0$，并记作

$$s^m-\lim u_\varepsilon=u_0\ \text{（相应地 } w^m-\lim u_\varepsilon=u_0\text{）。}$$

对于 $\mathbf{R}^n$ 中的任意紧子集 K，记

$$C_1^\infty(K)=\{\phi\in C_0^\infty(R^n)\,|\,\phi\text{ 在 }K\text{ 的一个（依赖于 }\phi\text{ 的）邻域中为1}\}.$$

K 的关于 $H^m(R^n)$ 的容度是指

$$\mathrm{cap}_m(K)=\inf\{\|\phi\|^2_{H^m(R^n)}\,|\,\phi\in C_1^\infty(K)\}.$$

设 Ω 为 R^n 中有界开子集，G 为 $\partial\Omega$ 的某子集。我们称 G 具有线段性质，是指存在 G 的局部有穷开复盖 $\{O_k\}$ 和 R^n 中相应的一列元 $\{a_k\}$ 使

$$\overline{G\cap O_k}+ta_k\subset\Omega,\quad\forall k\geqslant1,\ 0<t<1.$$

我们说开集族 $\{\Omega_\varepsilon\,|\,0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0\}$ 满足条件 (Ω)，是指

i） $\exists$ 有界开集 $\Omega\subset R^n$ 使 $\Omega_\varepsilon\subset\Omega$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，

ii）$\forall$ 紧集 $K\subset\Omega_0$，$\lim\limits_{\varepsilon\to0}\mathrm{cap}_m(K\setminus\Omega_\varepsilon)=0$；

iii) $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}$ mes $(\Omega_\varepsilon\setminus\Omega_0)=0$;

iV) $\overline{\lim\limits_{\varepsilon\to 0}}\sup(\partial\Omega_0\cap\Omega_\varepsilon)$具有线段性质，其中

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\sup(\Omega_\varepsilon\cap\partial\Omega_\varepsilon)=\bigcap_{0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0}\ \bigcup_{\varepsilon\leqslant\alpha\leqslant\varepsilon_0}(\Omega_\alpha\cap\partial\Omega_0).$$

在[3]中证明了

引理 4 设$\{\Omega_\varepsilon\}$满足条件(Ω)，设P_ε^m为$L^{m,2}(\Omega)$到E_ε^m上的直交投影。那么按算子强拓扑有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}P_\varepsilon^m=P_0^m,$$

而且当$m\geqslant 1$时$(\cdot,\cdot)_0|_{E_\varepsilon^m}$是弱总体紧的，即对于任意$v_\varepsilon\in H_0^m(\Omega_\varepsilon)$，$0\leqslant\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，

$$w^m-\lim v_\varepsilon=v_0\Longrightarrow s^0-\lim v_\varepsilon=v_0.$$

下面考虑扰动区域Ω_ε上的Dirichlet问题，

$$-\Delta y_\varepsilon=v_\varepsilon,\quad x\in\Omega_\varepsilon;\quad y_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}=0.\tag{2.1}$$

设$\partial\Omega_\varepsilon=\Gamma_\varepsilon$足够光滑，于是$\forall v_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon)$，(2.1)有唯一解$y_\varepsilon=y_\varepsilon(v_\varepsilon)\in H_0^1(\Omega_\varepsilon)$。

定理 5 设$\{\Omega_\varepsilon\}$足够光滑，满足条件(Ω)，则

$$s^0-\lim v_\varepsilon=v_0\Longrightarrow s^1-\lim y_\varepsilon(v_\varepsilon)=y_0(v_0),$$

这里$y_\varepsilon(v_\varepsilon)$表示(2.1)的对应于$v_\varepsilon\in L^2(\Omega_\varepsilon)$的解。

这个定理的证明可以从[3]的定理1.4得到。

三、最优控制的收敛性质

现在考虑引言中提出的扰动区域$\Omega_\varepsilon\subset R^n$上的如下形式的最优控制问题，

$$-\Delta y_\varepsilon=v,\quad x\in\Omega_\varepsilon;\qquad y_\varepsilon|_{\Gamma_\varepsilon}=0,\tag{3.1}$$

$$\inf_{v\in U_\varepsilon}J_\varepsilon(v),\quad J_\varepsilon(v)=\|y_\varepsilon(v)-z_\varepsilon\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)}+N\|v\|^2_{L^2(\Omega_\varepsilon)},\tag{3.2}$$

式中记号同前。

问题(3.1)(3.2)的最优控制记作v_ε^*，相应的最优解为$y_\varepsilon^*=y_\varepsilon(v_\varepsilon^*)$。

今把(3.1)写成变分形式，于是最优控制问题(3.1)(3.2)变成

$$a(\tilde{y}_\varepsilon,\ P_\varepsilon^1 w)=(P_\varepsilon^1 w,\ \tilde{v})_0,\qquad \forall w\in L^{1,2}(\Omega),\tag{3.3}$$

$$\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v}),\quad \tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v})=(\tilde{y}_\varepsilon(\tilde{v})-\tilde{z}_\varepsilon,\ \tilde{y}_\varepsilon(\tilde{v})-\tilde{z}_\varepsilon)_0+N(\tilde{v},\ \tilde{v})_0,\tag{3.4}$$

其中　$\tilde{y}_\varepsilon=J_\varepsilon^1 y_\varepsilon$，$\tilde{v}=J_\varepsilon^0 v$，$\tilde{z}_\varepsilon=J_\varepsilon^0 z_\varepsilon$，而

$$a(u,v)=\sum_{k=0}^{n}\int_{\Omega}u^{k}(x)\overline{v^{k}}(x)dx,\quad u,\ v\in L^{1,2}(\Omega),$$

$$\widetilde{U}_{\varepsilon}=\{\widetilde{v}\in L^{2}(\Omega)\mid\exists v\in U_{\varepsilon}\text{使}\widetilde{v}=J_{\varepsilon}^{0}v\},$$

显然$\widetilde{U}_{\varepsilon}$是$L^{2}(\Omega)$中的闭凸集，并且

$$\inf_{v\in\widetilde{U}_{\varepsilon}}J_{\varepsilon}(v)=\inf_{v\in\widetilde{U}_{\varepsilon}}\widetilde{J}_{\varepsilon}(\widetilde{v}).\tag{3.5}$$

当讨论 y_{ε}^{*}和v_{ε}^{*}的收敛性质时，不难理解必须对U_{ε}加上相应的收敛条件。

引理 6 设R_{ε}是$L^{2}(\Omega)$到U_{ε}上的投影，如果

$$s-\lim\widetilde{U}_{\varepsilon}=w-\lim\widetilde{U}_{\varepsilon}=\widetilde{U}_{0},$$

那么 1) $s-\lim R_{\varepsilon}w=R_{0}w,\ \forall w\in L^{2}(\Omega)$;

2) $\forall\}w_{\varepsilon}\}\subset L^{2}(\Omega),\ s-\lim w_{\varepsilon}=w_{0}\Longrightarrow s-\lim R_{\varepsilon}w=R_{0}w_{0}$.

证 直接从引理2推出。

下面转到讨论最优控制的收敛性。

定理 7 设$\{\Omega_{\varepsilon}\}$为R^{n}中满足条件(Ω)的有界开区域族，并设最优控制问题(3.1)(3.2)满足

$$s-\lim z_{\varepsilon}=z_{0},\ s-\lim\widetilde{U}_{\varepsilon}=w-\lim\widetilde{U}_{\varepsilon}=\widetilde{U}_{0},$$

那么

$$\lim_{\varepsilon\to0}\inf_{v\in U_{\varepsilon}}J_{\varepsilon}(v)=\inf_{v\in U_{0}}J_{0}(v).$$

证 依据(3.5)，只须证明在定理的假设下有

$$\lim_{\varepsilon\to0}\inf_{\widetilde{v}\in\widetilde{U}_{\varepsilon}}\widetilde{J}_{\varepsilon}(\widetilde{v})=\inf_{\widetilde{v}\in\widetilde{U}_{0}}\widetilde{J}_{0}(\widetilde{v}).$$

首先显然有

$$\inf_{\widetilde{v}\in\widetilde{U}_{\varepsilon}}\widetilde{J}_{\varepsilon}(\widetilde{v})\leqslant\widetilde{J}_{\varepsilon}(R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*})$$

$$=(\widetilde{y}_{\varepsilon}(R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*})-\widetilde{z}_{\varepsilon},\ \widetilde{y}_{\varepsilon}(R_{\varepsilon}v_{\varepsilon}^{*})-\widetilde{z}_{\varepsilon})_{0}+N(R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*},\ R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*})_{0},$$

其中 v_{0}^{*}为(3.1)(3.2)的$\varepsilon=0$时的最优控制，而$\widetilde{y}_{\varepsilon}(R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*})$为(3.3)的对应于$\widetilde{v}_{\varepsilon}=R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*}$的解。依引理6和定理5，可知在$L^{1,2}(\Omega)$中

$$s-\lim_{\varepsilon\to0}\widetilde{y}_{\varepsilon}(R_{\varepsilon}\widetilde{v}_{0}^{*})=\widetilde{y}_{0}(R_{0}\widetilde{v}_{0}^{*})=\widetilde{y}_{0}(\widetilde{v}_{0}^{*})=\widetilde{y}_{0}^{*}.$$

因此

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_q}\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v})\leqslant(\tilde{y}_0^*-\tilde{z}_0,\ \tilde{y}_0^*-\tilde{z}_0)_0+N(R_0\tilde{v}_0^*,\ R_0\tilde{v}_0^*)_0$$

$$=\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_0}\tilde{J}_0(\tilde{v}).$$

剩下要证的是

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v})\geqslant\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_0}\tilde{J}_0(\tilde{v}).$$

为此我们利用对偶方法．定义 Hilbert 空间 $E_\varepsilon^0=J_\varepsilon^0L^2(\Omega_\varepsilon)$ 上的真凸泛函 F_ε 和 G_ε 如下

$$F_\varepsilon(q)=\begin{cases}N\|q\|_0^2, & q\in\tilde{U}_\varepsilon\\ +\infty, & q\in E_\varepsilon^0\setminus\tilde{U}_\varepsilon\end{cases}$$

$$G_\varepsilon(q)=\|q-\tilde{z}_\varepsilon\|_0^2,$$

其中 $\|\cdot\|_0$ 表示 $L^2(\Omega)$ 中范数．设 L_ε 为 E_ε^0 到 E_ε^1 的线性算子．

$$L_\varepsilon\tilde{v}=\tilde{y}_\varepsilon(\tilde{v}),\ \forall\ \tilde{v}\in E_\varepsilon^0$$

式中 $\tilde{y}_\varepsilon(\tilde{v})$ 是变分方程

$$a(\tilde{y}_\varepsilon,w)=(\tilde{v},w)_0,\ \forall w\in E_\varepsilon^1$$

的解，使用上述记号，我们有

$$\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v})=\inf_{\tilde{v}\in E_\varepsilon^0}\{F_\varepsilon(\tilde{v})+G_\varepsilon(L_\varepsilon\tilde{v})\}.$$

一般地对于真凸泛函 ϕ: $H\to(-\infty,+\infty]$，定义其共轭函数为

$$\phi^*(v^*)=\sup_{v\in H}\{(v^*,v)-\phi(v)\},\ \forall v^*\in H.$$

在目前情况下，

$$F_\varepsilon^*(q)=-N\|R_\varepsilon(q/2N)\|_0^2+\|q\|_0^2/4N,$$

$$G_\varepsilon^*(q)=\|q\|_0^2+(\tilde{z}_\varepsilon,q)_0,\ q\in E_\varepsilon^0.$$

根据 Rockafellar 对偶性定理（见[7]），

$$\inf_{\tilde{v}\in\tilde{U}_\varepsilon}\tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v})=-\inf_{q\in E_\varepsilon^0}M_\varepsilon(q),$$

其中

$$M_\varepsilon(q)=F_\varepsilon^*(L_\varepsilon^*q)+G_\varepsilon^*(-q).$$

对于任意$q\in E_0^0$，显然 $P_\varepsilon^0 q\in E_\varepsilon^0$，并且从引理 4 可知

$$s-\lim_{\varepsilon\to 0} P_\varepsilon^0 q=P_0^0 q. \tag{3.6}$$

另一方面，依定理 5 有

$$s-\lim L_\varepsilon(P_\varepsilon^0 q)=L_0(q),\quad \forall q\in E_0^0. \tag{3.7}$$

又依引理 8，对任意$q\in E_0^0$，有

$$\lim F_\varepsilon^*(L_\varepsilon P_\varepsilon^0 q)=F_\varepsilon^*(L_0 q), \tag{3.8}$$

$$\lim G_\varepsilon^*(P_\varepsilon^0 q)=G_0^*(q), \tag{3.9}$$

注意对任意 $\delta>0$，必有$q_0^*\in E_0^0$使

$$M_0(q_0^*)<\delta+\inf_{q\in E_0^0} M_0(q).$$

于是从(3.6)～(3.9)可得

$$\inf_{q\in E_\varepsilon^0} M_\varepsilon(q)\leqslant M_\varepsilon(P_\varepsilon^0 q_0^*)=F_\varepsilon^*(L_\varepsilon P_\varepsilon^0 q_0^*)+G_\varepsilon^*(-P_\varepsilon^* q_0^*),$$

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\inf_{q\in E_\varepsilon^0} M_\varepsilon(q)\leqslant F_0^*(L_0 q_0^*)+G_0^*(-q_0^*)=M_0(q_0^*)$$

$$<\delta+\inf_{q\in E_0^0} M_0(q).$$

由于 $\delta>0$ 的任意性可知

$$\overline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\inf_{q\in E_\varepsilon^0} M_\varepsilon(q)\leqslant\inf_{q\in E_0^0} M_0(q).$$

由此可见

$$\underline{\lim_{\varepsilon\to 0}}\inf_{\tilde v\in\tilde U_\varepsilon}\tilde J_\varepsilon(\tilde v)\geqslant-\lim_{\varepsilon\to 0}\inf_{q\in E_\varepsilon^0} M_\varepsilon(q)$$

$$\geqslant\inf_{q\in E_0^0} M_0(q)=J_0(v_0^*)=\inf_{v\in U_0} J_0(v).$$

定理证毕。

定理 8 设$\{\Omega_\varepsilon\}$为 R^m 中一族满足条件(Ω)的有界开子集，v_ε^* 和 y_ε^* 如上述．假定

$$s^0-\lim z_\varepsilon=z_0,$$

$$s-\lim\tilde U_\varepsilon=w-\lim\tilde U_\varepsilon=\tilde U_0.$$

那么

$$s^0-\lim v_\varepsilon^*=v_0^*,\quad s^1-\lim y_\varepsilon^*=y_0^*.$$

证　依定理7，$\{\tilde{v}_\varepsilon^*\}$和$\{y_\varepsilon^*\}$分别在$L^2(\Omega)$和$L^{1,2}(\Omega)$中有界，从而在各自空间中相对弱紧，设$\{\varepsilon'\}$为收敛于0的正数列，使得

$$w-\lim \tilde{y}_{\varepsilon'}^*=w_0^*,\ \text{在}L^{1,2}(\Omega)\text{中}$$

$$w-\lim \tilde{v}_\varepsilon^*=h_0^*,\ \text{在}L^2(\Omega)\text{中}$$

由$w-\lim \tilde{U}_\varepsilon=\tilde{U}_0$ 知 $h_0^*\in\tilde{U}_0$，在变分方程

$$a(\tilde{y}_{\varepsilon'}^*,\ P_{\varepsilon'}^1 w)=(\tilde{v}_{\varepsilon'}^*,\ P_{\varepsilon'}^1 w)_0,\quad \forall w\in L^{1,2}(\Omega)$$

中让$\varepsilon'\to 0$取极限，得到

$$a(w_0^*,\ P_0^1 w)=(h_0^*,\ P_0^1 w)_0,\forall w\in L^{1,2}(\Omega).$$

因此h_0^*和w_0^*分别是(3.3)(3.4)的$\varepsilon=0$时的最优控制和最优解。依解的唯一性，

$$h_0^*=\tilde{v}_0^*,\quad w_0^*=\tilde{y}_0^*.$$

由此可见

$$w^0-\lim v_\varepsilon^*=v_0^*,\quad w^1-\lim y_\varepsilon^*=y_0^*.$$

又从引理4可知$s^0-\lim y_\varepsilon^*=y_0^*$。因此根据

$$\lim \tilde{J}_\varepsilon(\tilde{v}_\varepsilon^*)=\tilde{J}_0(\tilde{v}_0^*),$$

可推出$\lim\|\tilde{v}_\varepsilon^*\|_0^2=\|\tilde{v}_0^*\|_0^2$。从而

$$s^0-\lim v_\varepsilon^*=v_0^*.$$

而从定理5又能推出

$$s^1-\lim y_\varepsilon^*=y_0^*.$$

至此定理证毕。

最后我们指出，本文结果对于具有光滑系数的一致椭圆型偏微分方程仍然成立。

参考文献

[1] Lions, J. L., Optimal Control of Systems Governed by Partial Differential Equations, Springer, (1971).

[2] Stummel, F., Perturbation Theory for Sobolev Spaces, Proc. Royal Soc, Edinbergh, 75A, 5-49 (1974/1975),

〔3〕 Stummel, F., Singular Perturbation of elliptic sesquilinear forms, Lecture Notes in Math. 280, 155-180, Springer, (1972).
〔4〕 Stummel, F., Perturbations of domains in elliptic boundary value problems, Lecture Notes in Math. 503, 110-136, Springer, (1976).
〔5〕 Stummel, F., Perurbation theory for elliptic sesquilinear forms and boundary value problems in mathematical physics, Lecture Notes, March 1975, Inst. for Fluid Dynamics and Applied Mathematics, College Park, Univ. of Maryland.
〔6〕 Lebovitz, N. P., Perurbation expansions on perturbed domains, SIAM Review, 24: 4 (1982), 381-400.
〔7〕 Lions, J. L., Some Methods in the Mathematical Analysis of Systems and their Control, Science Press, Beijing, (1981).
〔8〕 冯德兴、 张秉钰，扰动区域上最优控制的收敛性质，系统科学与数学，7,1,(1987).
〔9〕 Rockafellar, T. R., Duality and stability in extremum problems involving convex fuctions, Pac. J. Math. 21 (1967), 167-187.
〔10〕 Mosco, U., Convergence of convex sets and of solutions of variational inequalities, Advances in Math., 31, (1969), 510-585.

Optimal Control of Elliptic Equation and Domain Perturbation

Feng Dexing, Zhang Bingyu

(Institute of Systems Science, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

This paper is concerned with the optimal control of systems decribed by an elliptic partial differential equation under perturbation of domains. By using the Sobolev space theory under perturbed domains, it is shown that the optimal control and corresponding optimal solution depend continuously on the domain under certain conditions.