第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

线性SISO系统辨识的线性规划法

郭 圣 权
（太原机械学院自控系）

摘　要

对于线性SISO系统，文献〔1〕给出了参数估计的线性规划方法．在此基础上，本文论证了用线性规划法辨识系统，可用较少的试探次数确定系统模型的阶和参数．

一、引　　言

应用参数模型描述系统时，我们常用的系统辨识方法是最小二乘法．此时，辨识系统的步骤是由低阶到高阶逐个模型的试探，计算量较大．用线性规划法辨识系统，可一开始就选一个较高阶的模型试算．如果入选模型的阶大于系统的阶，则一次试算即可确定（或预报）真实阶．然后据此进行参数估计，会得到较好的辨识结果．就这个意义上讲，用线性规划法辨识系统比用最小二乘法好．

二、化参数估计问题为线性规划问题

线性SISO定常系统的输入（$u(t)$）－输出（$y(t)$）关系，在不考虑噪声时，可写成

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0 y=b_0 u+b_1\dot{u}+\cdots+b_r u^{(r)}. \tag{1}$$

若用估计参数$\hat{a}_i, i=0, n$和$\hat{b}_j, j=1, r$代替真实参数a_i和b_j，则方程（1）改写成

$$\hat{a}_n y^{(n)}+\hat{a}_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+\hat{a}_0 y=b_0 u+\hat{b}_1\dot{u}+\cdots+\hat{b}_r u^{(r)}+e, \tag{2}$$

式中的$e(t)$是由于用估计参数代替真实参数后引入的方程误差．

基于式（2）的参数估计问题，由文献〔1〕和〔2〕可得如下的标准线性规划方程：

求

$$\min Z=\sum_{k=1}^{M}\left|e_n(t_k)\right| \tag{3}$$

满足

$$[Y \,\vdots\, \mathrm{I}_n \,\vdots\, -\mathrm{I}_n]\begin{pmatrix}\hat{\beta}\\ \hdashline E_n^-\\ \hdashline E_n^+\end{pmatrix}=b_0 U_n \tag{4}$$

本文于1986年2月1日收到．1986年12月4日收到修改稿．

和

$$\begin{cases} \hat{\beta}_i \geqslant 0 & i=1,n+r+1 \\ e_n^+(t_k), e_n^-(t_k) \geqslant 0 & K=1,M \end{cases} \tag{5}$$

式中，

I_n 是n维单位矩阵，

$\hat{\boldsymbol{\beta}}=[\hat{\beta}_1 \cdots \hat{\beta}_{n+r+1}]^T=[\hat{a}_n\hat{a}_{n-1}\cdots\hat{a}_0\hat{b}_1\cdots\hat{b}_r]^T$,

$E_n^-=[e_n^-(t_1)e_n^-(t_2)\cdots e_n^-(t_M)]^T$,

$E_n^+=[e_n^+(t_1)e_n^+(t_2)\cdots e_n^+(t_M)]^T$,

$U_n=[u_n(t_1)u_n(t_2)\cdots u_n(t_M)]^T$,

$$Y=\begin{bmatrix} y(t_1)y_1(t_1)\cdots y_n(t_1) - u_{n-1}(t_1)\cdots - u_{n-r}(t_1) \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ y(t_M)y_1(t_M)\cdots y_n(t_M) - u_{n-1}(t_M)\cdots - u_{n-r}(t) \end{bmatrix}.$$

y_i、u_i 和 e_n 分别表示 $y(t)$、$u(t)$和 $e(t)$对 t的i次和n次积分。$e_n(t_k)=e_n^+(t_k)-e_n^-(t_k)$，$e_n^+(t_k)=\max(e_n(t_k),0)$，$e_n^-(t_k)=\max(0,-e_n(t_k))$。$T$表示向量转置。

三、模型阶的确定

确定模型的阶（式(2)中的n和r）是系统辨识的一个关键问题。用线性规划法辨识系统，这个问题却较易解决。

下面，我们先证明一个定理。

定理 1　如果描述某系统输入－输出关系的真实方程是式（1）

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_0 y=b_0 u+b_1\dot{u}+\cdots+b_r u^{(r)}, \tag{1}$$

而用于线性规划估计参数的模型方程是

$$\hat{a}_p y^{(p)}+\hat{a}_{p-1}y^{(p-1)}+\cdots+\hat{a}_{n+1}y^{(n+1)}+\hat{a}_n y^{(n)}+\cdots+\hat{a}_0 y$$
$$=b_0 u+\hat{b}_1\dot{u}+\cdots+\hat{b}_r u^{(r)}+\hat{b}_{r+1}u^{(r+1)}+\cdots+\hat{b}_q u^{(q)}+e, \tag{6}$$

则估计结果在理论上恒有

$$\begin{cases} \hat{a}_p=\hat{a}_{p-1}=\cdots=\hat{a}_{n+1}=0, \\ \hat{b}_q=\hat{b}_{q-1}=\cdots=\hat{b}_{r+1}=0. \end{cases}$$

证　根据方程（6），构造方程

$$[Y \mid I_p \mid -I_p]\begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\beta}} \\ \hline E_p^- \\ \hline E_p^+ \end{bmatrix}=b_0 U_p, \tag{7}$$

式中，

I_p是p维单位矩阵，

$$\hat{\beta}=[\hat{a}_p\cdots\hat{a}_{n+1}\,\hat{a}_n\cdots\hat{a}_0\,\hat{b}_1\cdots\hat{b}_r\cdots\hat{b}_q]^T, \tag{8}$$

$$\mathbf{E}_p^-=[e_p^-(t_1)\,e_p^-(t_2)\cdots e_p^-(t_M)]^T,$$

$$\mathbf{E}_p^+=[e_p^+(t_1)\,e_p^+(t_2)\cdots e_p^+(t_M)]^T,$$

$$U_p=[u_p(t_1)\,u_p(t_2)\cdots u_p(t_M)]^T,$$

$$Y=\begin{bmatrix} y(t_1)\;y_1(t_1)\cdots y_p(t_1) & -u_{p-1}(t_1)\cdots-u_{p-q}(t_1)\\ \vdots\quad\vdots\qquad\vdots & \vdots\qquad\vdots\\ y(t_M)\;y_1(t_M)\cdots y_p(t_M) & -u_{p-1}(t_M)\cdots-u_{p-q}(t_M)\end{bmatrix}. \tag{9}$$

y_i、u_i和e_p分别表示$y(t)$、$u(t)$和$e(t)$对t的i次和p次积分。$e_p^+(t_k)=\max(e_p(t_k),0)$，$e_p^-(t_k)=\max(0,-e_p(t_k))$。

调换式（8）和（9）中某些元素和列的位置，使式（8）和（9）变成下列形式：

$$\hat{\beta}=[\hat{a}_p\cdots\hat{a}_{n+1}\,\hat{b}_{r+1}\cdots\hat{b}_q\;\vdots\;\hat{a}_n\cdots\hat{a}_0\,\hat{b}_1\cdots\hat{b}_r]^T$$
$$=[\hat{\beta}_1\;\vdots\;\hat{\beta}_2]^T,$$

$$Y=\left[\begin{array}{c:c} y(t_1)\cdots y_{p-(n+1)}(t_1)-u_{p-(r+1)}(t_1)\cdots-u_{p-q}(t_1) & y_{p-n}(t_1)\cdots y_p(t_1)-u_{p-1}(t_1)\cdots-u_{p-q}(t_1)\\ \vdots & \vdots\\ y(t_M)\cdots y_{p-(n+1)}(t_M)-u_{p-(r+1)}(t_M)\cdots-u_{p-q}(t_M) & y_{p-n}(t_M)\cdots y_p(t_M)-u_{p-1}(t_M)\cdots-u_{p-q}(t_M)\end{array}\right]=\left[\,Y_1\;\vdots\;Y_2\,\right].$$

从而式（7）也相应变成

$$[Y_1\;\vdots\;Y_2\;\vdots\;I_p\;\vdots\;-I_p]\begin{bmatrix}\hat{\beta}_1\\ \hdashline \hat{\beta}_2\\ \hdashline \mathbf{E}_p^-\\ \hdashline \mathbf{E}_p^+\end{bmatrix}=b_0U_p. \tag{10}$$

显然，由实际系统（1）产生的输入－输出数据仅仅支持下面的方程：

$$[Y_2\;\vdots\;I_p\;\vdots\;-I_p]\begin{bmatrix}\hat{\beta}_2\\ \hdashline \mathbf{E}_p^-\\ \hdashline \mathbf{E}_p^+\end{bmatrix}=b_0U_p. \tag{11}$$

为此，根据线性规划求解规则[2]，应用单纯形法在式(10)中搜索最优解类同在式

（11）中搜索最优解，即最优解的基底中不会含Y_1的列．与此对应，最优解的基变量中也不会含$\hat{\beta}_1$的元素．因此

$$\hat{\beta}_1 = O.$$

也就是

$$\begin{cases} \hat{a}_p = \hat{a}_{p-1} = \cdots = \hat{a}_{n-1} = 0, \\ \hat{b}_q = \hat{b}_{q-1} = \cdots = \hat{b}_{r+1} = 0. \end{cases}$$

定理1证毕．

由定理1我们得到两点启示：第一，用线性规划法辨识系统时，初选模型的阶应稍高一点；第二，当分析结果

$$\hat{\beta} = [\hat{a}_p \cdots \hat{a}_{n+1}\ \hat{a}_n \cdots \hat{a}_0\ \hat{b}_1 \cdots \hat{b}_r \cdots \hat{b}_q]^T$$

时，如果发现首尾的一些元素为零，如$\hat{a}_p = \cdots = \hat{a}_{n+1} = 0$，$\hat{b}_q = \cdots \hat{b}_{r+1} = 0$，则可根据$\hat{\beta}$中不等于零的元素的序号$a_n$，$b_r$确定出该系统模型的阶是$n$和$r$．

当然，若$\hat{\beta}$中首尾的元素不为零，那就必须适当加大模型的阶，再次试算．

四、举　例

考察线性SISO系统

$$10\dddot{y} + 30\ddot{y} + 40\dot{y} + 20y = 10u(t).$$

当$u(t)$为单位阶跃函数时，它在零初始状态下的理论解是

$$y(t) = 0.5 - e^{-t} + 0.707e^{-t}\cos(t + 0.785). \tag{12}$$

按式（12），选$t = 0, 0.2, \cdots, 4.8$秒，求出$y(t)$，再用前述方法做数字仿真，结果如下表：

表1　数字仿真结果

假定值 p	估计值 q	$\hat{a}_4$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_0$	$\hat{b}_1$	$\hat{b}_2$	z_{min}
4	0	0	8.568	31.763	37.758	21.046	/	/	0.071
3	2	/	9.594	30.099	39.727	20.109	0	0.018	0.975
3	0	/	10.157	30.274	40.323	19.977	/	/	0.059

分析上述仿真结果，我们可以看出：

（1）如定理1所述，当入选模型的阶p和q大于真实系统的阶时，则经一次试算就可定出系统的阶和参数．但参数估计的精度差一些．此后，若按已定下（或预报）的阶再

构造模型，重作估计，参数估计的结果会更好。

（2）当选$p=3$，$q=2$估计参数时，得到$b_2=0.018\neq0$，这是数字运算的误差造成的。

五、结　　论

用线性规划法辨识系统，是一种可行且有效的方法。若使用得当，可用较少的试算次数获得较为满意的辨识果结。

参 考 文 献

〔1〕 Brogan, W.L., Modern Control Theory, New York, QPI, (1974).

〔2〕 李维铮等，运筹学，清华大学出版社，北京，（1982）。

Linear Programming Method for Identifying Linear SISO Systems

Guo Shengquan

(Department of Automatic Control,

Taiyuan Institute of Machinery)

Abstract

It is shown in this paper that when identifying systems by linear programming method, we can determine both parameters and orders of the system through fewer times for probing in comparison with the least squares technique.