第6卷 增刊1　　控制理论与应用　　Vol.6 Suppl.I. 1
1989年1月　　CONTROL THEORY AND APPLICATIONS　　Jan., 1989

脉冲传递函数等价的模型及其统一实现的方法

韩光文
（华中工学院自控系，武汉）

摘　要

噪声存在时，模型结构难以精确辨识，因此就不易获得与系统代数等价的模型．本文的讨论表明，可以用脉冲传递函数等价的模型描述系统．并以简例说明了用有限的马尔可夫参数实现状态模型和差分模型的统一方法．

一、引　言

由于噪声的存在，模型结构难以精确地确定．可是，只要模型与其描述的系统的结构之间稍有偏差，其间就不可能存在代数等价．这时，即使系统是完全能控完全能观的，其模型的完全能控完全能观性质，甚至其稳定性，均不能被保证．因为，只有模型具备（i）"是完全能控完全能观的"，或者（ii）"是完全能观的，虽不是完全能控的，但其状态的不可控部分是稳定的"的性质之一时，闭环控制系统的最优控制律及其稳定性才能被保证[1]．这就是以代数等价为理论基础辨识的模型，有时应用得不好的原因之一．脉冲传递函数(ITF)等价的模型，其结构可以与其描述的系统不同，这就容许在确定模型结构时出现偏差．文中讨论了具有上述性质（ii）的ITF等价的模型获得的方法．

二、线性随机系统的等价性

考虑线性随机系统 $S(A,B,K,C,D)$[2,3]

$$\hat{x}(k+1|k)=A\hat{x}(k|k-1)+Bu(k)+k\varepsilon(k), \qquad (2.1a)$$

$$y(k)=C\hat{x}(k|k-1)+Du(k)+\varepsilon(k), \qquad (2.1b)$$

式中，状态向量 $\hat{x}\in R^n$，输入向量 $u\in R^r$，输出向量 $y\in R^m$，新息序列 $\{\varepsilon(k)\}$ 是零均值同分布的白噪声序列；(A,B) 和 (A,K) 是两个能控对，(A,C) 是能观对；A,B,K,C,D 是维数相容的矩阵；n 是最小维，秩$[B]=r$，秩$[C]=m$．

若 $S'(A',B',K',C',D')$ 是S的另一实现，则有

定理1　若 S' 与 S 之间存在阵 T，使得

$$A'T=TA,\ B'=TB,\ K'=TK,\ C'T=C,\ D'=D, \qquad (2.2)$$

本文于1985年6月30收到．1987年11月13日收到修改稿．

那么，它们之间是 ITF 等价的，即有

$$C'(zI-A')^{-1}B'+D'=C(zI-A)^{-1}B+D \text{ 和 } C'(zI-A')^{-1}K'=C(zI-A)^{-1}K。$$

证　（见文献〔4〕中定理1的证明，其中式（2.3）应订正为 $\overline{\Phi}^kP=P\Phi^k$，$k=0$，1，2，…）。

注记　当 T 为非异阵时，式（2.2）可写成

$$A'=TAT^{-1},\ B'=TB,\ K'=TK,\ C'=CT^{-1},\ D'=D, \tag{2.3}$$

S' 与 S 就成为代数等价的了。可见代数等价是 ITF 等价的特例。

定理 2　若 S' 与 S 是 ITF 等价的，那么在 u 和 ε 的分别作用下，其相应离散时刻的马尔可夫参数相等，即

$$\overline{M}_0\triangleq D=D',\ \overline{M}_i\triangleq CA^{i-1}B=C'(A')^{i-1}B',\quad i=1,\ 2,\ \cdots; \tag{2.4}$$

$$\widetilde{M}_0\triangleq I,\qquad \widetilde{M}_i\triangleq CA^{i-1}K=C'(A')^{i-1}K',\quad i=1,\ 2,\ \cdots。 \tag{2.5}$$

证　观察定理1证明中的算式，便知式（2.4）和（2.5）是成立的。

三、变换阵T的结构特征

作为示例，这里仅介绍阵 T 的一个子类：T_0 和 T_0'。

由于 S 是完全能观的，构造

$$T_0=[C^T,A^TC^T,\cdots,(A^{p-1})^TC^T]^T_{mp\times n}, \tag{3.1}$$

那么，当 $mp=n$ 时，能观性条件：秩$[T_0]=n$ 成立。续定义 $C\triangleq[C_1,C_2,\cdots,C_m]^T$。并按照 T_0 所示的从上至下的顺序，挑选出 T_0 中的线性无关行[2]，继将挑选出的线性无关行排列成表：

$$\begin{matrix} C_1^T & C_2^T & \cdots & C_m^T \\ C_1^TA & C_2^TA & \cdots & C_m^TA \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_1^TA^{\nu_1-1} & C_2^TA^{\nu_2-1} & \cdots & C_m^TA^{\nu_m-1} \end{matrix} \tag{3.2}$$

其中，$\sum\limits_{i=1}^{m}\nu_i=n$；$T_0$ 中被舍弃的行满足

$$C_i^TA^{\delta_i}=\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{\nu_j-1}\alpha_{ijk}^{(\delta_i)}C_j^TA^k,\ \delta_i=\nu_i,\ \nu_i+1,\ \cdots,\ n;\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m, \tag{3.3}$$

式中，$\alpha_{ijk}^{(\delta_i)}$ 是非全为零的系数。令 $\nu=\max\limits_i \nu_i$，则有

引理 1　关于系统（2.1），为使能观性条件成立，T_0 在构造上应满足 $p\geqslant\nu\geqslant n/m$；而 T_0 中可能存在的其它子阵满足

$$CA^{\sigma}=-\sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_i CA^{\sigma-i},\ \sigma=p,p+1,\cdots,n, \tag{3.4}$$

式中，α_i 可以是(i)$m\times m$ 参数阵，或是(ii)纯量参数.

证 $\nu\geqslant n/m$ 是显然的. 当 $p\geqslant\nu$ 时，表(3.2)表明，T_0 中的 n 个线性无关行集中于前面的 p 个子阵 C, CA, $\cdots$, CA^{p-1} 中. 又因 T_0 是满秩阵，故知 α_i 为 $m\times m$ 阵下有式(3.4). 若 A 的特征多项式是 $|zI-A|=\alpha_n^*+\alpha_{n-1}^*z+\cdots+z^n=f_1(z)f_2(z)$，其中 $f_1(z)=\alpha_\rho+\alpha_{\rho-1}z+\cdots+z^\rho$ 为最小多项式；$f_2(z)$ 是 z 的 $n-\rho$ 次多项式，根据Cayley-Hamilton 定理，由 $f_1(z)$ 有

$$A^\rho=-\alpha_\rho-\alpha_{\rho-1}A-\cdots-\alpha_1A^{\rho-1},\ n\geqslant\rho\geqslant n/m.$$

以 CA^j 乘以上式，并简单地补充 $\alpha_{\rho+\omega}=0(\omega=1,2,\cdots,j)$，继令 $\rho+\omega=\sigma$，便得 $CA^\sigma=-\sum_{i=1}^{\sigma}\alpha_iCA^{\sigma-i}$，由表(3.2)知，$CA^\nu$ 是第一个出现的能由 $C,CA,\cdots,CA^{\nu-1}$ 线性组合表示的子阵，故知 σ 满足 $\sigma\geqslant p\geqslant\nu$. 于是在 α_i 为纯量时得到了式(3.4).

构造 $T_0'=[C_1,A^TC_1,\cdots,(A^{p_1-1})^TC_1,C_2,\cdots,(A^{p_m-1})^TC_m]^T$,则有

引理 2 关于系统(2.1)，为使能观性条件成立，T_0' 在结构上应满足 $p_i\geqslant\nu_i$，$i=1,2,\cdots,m$；而 T_0' 中可能存在的其它的行满足

$$C_i^TA^{p_i}=\sum_{j=1}^{i}\sum_{k=0}^{p_j-1}\alpha_{ijk}C_j^TA^k,\ i=1,2,\cdots,m. \tag{3.5}$$

证 表(3.2)表明，$p_i\geqslant\nu_i$ 是必需的. 只要简单地往式(3.3)中补充 $\alpha_{ijk}^{(p_i)}=0(k=\nu_j,\nu_j+1,\cdots,p_j-1;\ j=1,2,\cdots,i;\ i=1,2,\cdots,m)$，略去其上标，便得式(3.5).

四、ITF等价的状态模型和差分模型

变换 1 在ITF等价的条件下，方程(2.1)能变换成完全能观的稳定的随机状态方程(SSF1)：

$$z(k+1)=\overline{A}z(k)+\overline{B}u(k)+\overline{K}\varepsilon(k), \tag{4.1a}$$

$$y(k)=\overline{C}z(k)+\overline{D}u(k)+\varepsilon(k), \tag{4.1b}$$

式中

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} O_m & I_m & & \\ O_m & O_m & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & \\ O_m & O_m & O_m & I_m \\ -\alpha_p & -\alpha_{p-1} & \cdots-\alpha_2 & -\alpha_1\end{pmatrix},\quad \overline{B}=\begin{pmatrix} CB \\ CAB \\ \vdots \\ CA^{p-1}B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\overline{M}_1 \\ \overline{M}_2 \\ \vdots \\ \overline{M}_p\end{pmatrix},$$

$$\overline{K}=\begin{pmatrix} CK \\ CAK \\ \vdots \\ CA^{p-1}K \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \widetilde{M}_1 \\ \widetilde{M}_2 \\ \vdots \\ \widetilde{M}_p \end{pmatrix},\quad \overline{C}=[I_m\ O_m\cdots O_m],\ \overline{D}=D=\overline{M}_0;$$

其中，α_i 由式（3.4）定义；或由下式定义，即

$$\overline{M}_{p+1}=-\sum_{i=1}^{p}\alpha_i\overline{M}_{p-i+1},\quad p\geqslant\nu\geqslant n/m. \tag{4.2}$$

证　关于方程（2.1），引入变换 $z(k)=T_0\hat{x}(k|k-1)$，注意式（3.4）便有 $z(k+1)=T_0A\hat{x}(k|k-1)+T_0Bu(k)+T_0K\varepsilon(k)=\overline{A}T_0\hat{x}(k|k-1)+T_0B+T_0K\varepsilon(k)=\overline{A}z(k)+\overline{B}u(k)+\overline{K}\varepsilon(k)$，而 $y(k)=[I_mO_m\cdots O_m]T_0\hat{x}(k|k-1)+Du(k)+\varepsilon(k)=\overline{C}z(k)+\overline{D}u(k)+\varepsilon(k)$。由此即知，方程(2.1)和（4.1）之间有关系 $\overline{A}T_0=T_0A$，$\overline{B}=T_0B$，$\overline{K}=T_0K$，$\overline{C}T_0=C$，$\overline{D}=D$，由定理1，即知它们是ITF等价的。将式（3.4）后乘以 B，便得式（4.2）。因 $T_0^*=[\overline{C}^T,\ \overline{A}^T\overline{C}^T,\ \cdots,\ (\overline{A}^{p-1})^T\overline{C}^T]^T=I_{mp}$，若构造方程（4.1）的能观阵 $\overline{T}_0=[(T_0^*)^T,\ (\overline{A}^p)^T\overline{C}^T,\ \cdots,\ (\overline{A}^{mp-1})^T\overline{C}^T]^T$，则知秩$[\overline{T}_0]$ = 秩$[T_0^*]=mp$，而 $z\in R^{mp}$。故方程（4.1）是完全能观的。构造方程（4.1）的能控阵 $\overline{T}_C=[\overline{B},\ \overline{A}\,\overline{B},\ \cdots,\ \overline{A}^{mp-1}\overline{B}]=T_0[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{mp-1}B]$，由于 $mp\geqslant n$，所以秩$[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{mp-1}B]$ = 行秩$[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{mp-1}B]=n$，而秩$[T_0]$ = 列秩$[T_0]=n$，故知秩$[\overline{T}_c]=n$，而 $z\in R^{mp}$，此即表明，z 中只有 n 个分量是可控的，故方程（4.1）一般不是完全能控的。因 $\hat{x}$ 是完全能控的，即其 n 个分量都是稳定的。$z(k)=T_0\hat{x}(k|k-1)$ 表明，z 的每一个分量均由 $\hat{x}$ 的 n 个分量的线性组合构成，所以 z 的每一个分量必定是稳定的。

变换 2　在ITF等价的条件下，方程（2.1）能变换成完全能观的稳定的随机状态方程（SSF2）：

$$z(k+1)=A'z(k)+B'u(k)+K'\varepsilon(k), \tag{4.3a}$$

$$y(k)=C'z(k)+D'u(k)+\varepsilon(k) \tag{4.3b}$$

$$A'=\begin{pmatrix} A_{11} & & & \\ A_{21} & A_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mm} \end{pmatrix},\quad \underset{(p_i\times p_i)}{A_{ii}}=\left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix}0\\ \vdots\end{matrix} & I_{(p_i-1)} \\ \hline \alpha_{ii0} & \alpha_{ii1}\ \cdots\ \alpha_{ii(p_i-1)} \end{array}\right),$$

$$\underset{(p_i\times p_j)}{A_{ij}}=\left(\begin{array}{c} 0 \\ \hline \alpha_{ij0}\quad \alpha_{ij1}\cdots\alpha_{ij(p_i-1)} \end{array}\right),$$

$$C' = \left(\begin{array}{ccc} 1\ 0\cdots & \cdots & \cdots\ 0 \\ 0\ \cdots & 1\,0\cdots & \cdots\ 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\cdots & \cdots & 1\,0\cdots 0 \end{array}\right), \quad \begin{array}{ccc} \underbrace{}_{p_1} & \underbrace{}_{p_2} & \underbrace{}_{p_m} \end{array} \qquad B' = \begin{pmatrix} C_1^T B \\ \vdots \\ C_1^T A^{p_1-1}B \\ C_2^T B \\ \vdots \\ C_m^T A^{p_m-1}B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{M}^T_{11} \\ \vdots \\ \overline{M}^T_{p_1 1} \\ \overline{M}^T_{12} \\ \vdots \\ \overline{M}_{p_m m} \end{pmatrix},$$

$$K' = \begin{pmatrix} C_1^T K \\ \vdots \\ C_1^T A^{p_1-1}K \\ C_2^T K \\ \vdots \\ C_m^T A^{p_m-1}K \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}^T_{11} \\ \vdots \\ \widetilde{M}^T_{p_1 1} \\ \widetilde{M}^T_{12} \\ \vdots \\ \widetilde{M}^T_{p_m m} \end{pmatrix}, \quad D' = D = \overline{M}_0.$$

其中纯量参数由式(3.5)定义，或由下式定义，即

$$\overline{M}^T_{(p_i+1)i} = \sum_{j=1}^{i} \sum_{k=0}^{p_j-1} \alpha_{ijk} \overline{M}^T_{(k+1)j}, \quad p_i \geqslant \nu_i, \quad i = 1, 2, \cdots, m. \tag{4.4}$$

$\overline{M}^T_{ij}$ 和 $\widetilde{M}^T_{ij}$ 分别表示 $\overline{M}_i$ 和 $\widetilde{M}_i$ 的第 j 行。

证　利用引理2和变换 $z(k) = T_0'\hat{x}(k|k-1)$，注意到 A', B', K', C' 中相应的子阵和行向量与SSF1中的参数阵的类似，便知此证明类似于SSF1的证明。

变换 3　在ITF等价的条件下，方程(2.1)能变换成ARMAX方程：

$$\begin{aligned} y(k) + \alpha_1 y(k-1) + \cdots + \alpha_p y(k-p) &= \beta_0 u(k) + \beta_1 u(k-1) + \cdots + \beta_p u(k-p) \\ &\quad + \gamma_0 \varepsilon(k) + \gamma_1 \varepsilon(k-1) + \cdots + \gamma_p \varepsilon(k-p), \gamma_0 \equiv I_m, \end{aligned} \tag{4.5}$$

式中　$\boldsymbol{\beta} = \Theta \overline{M}$，$\boldsymbol{\Upsilon} = \Theta \widetilde{M}$

$$\Theta = \begin{pmatrix} I_m & & & \\ \alpha_1 & I_m & & \\ \alpha_2 & \alpha_1 & \ddots & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots \\ \alpha_p & \alpha_{p-1} & \cdots\alpha_1 & I_m \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\Upsilon} = \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_p \end{pmatrix}, \quad \overline{M} = \begin{pmatrix} \overline{M}_0 \\ \overline{M}_1 \\ \vdots \\ \overline{M}_p \end{pmatrix}, \quad \widetilde{M} = \begin{pmatrix} \widetilde{M}_0 \\ \widetilde{M}_1 \\ \vdots \\ \widetilde{M}_p \end{pmatrix},$$

α_i 由式(4.2)定义。

证　略(只需将 α_i 代换 $\alpha_i I_m$，则文献[2, pp48～52]中所示的证明，即成为此变换的证明)。

五、ITF等价的模型的有限马尔可夫参数实现简例

变换1，2，3均表明，SSF1，SSF2和ARMAX中的全部参数，都能用有限的马尔可夫参数序列$\{\overline{M}_i\}$和$\{\widetilde{M}_i\}$予以实现*；上述变换还从原则上取消了模型结构上限的约束；当模型结构达到最小时，即$p=\nu=n/m$或$p_i=\nu_i$时，ITF等价的模型变成代数等价的模型。

设S具有参数：

$$A=\begin{pmatrix}0.1 & 0 & 0\\ 0 & 0.2 & 0\\ 0 & 0 & 0.3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix},\quad K=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$D=0$。

求与其ITF等价（包括代数等价）的各种模型。

解　根据S的参数，可以计算出：

$$\begin{bmatrix}\overline{M}_0\\ \overline{M}_1\\ \overline{M}_2\\ \overline{M}_3\\ \overline{M}_4\\ \overline{M}_5\\ \overline{M}_6\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\\ \hline 1 & -1\\ 1 & 1\\ \hline 0.1 & -0.2\\ 0.1 & 0.1\\ \hline 0.01 & -0.04\\ 0.01 & 0.01\\ \hline 0.001 & -0.008\\ 0.001 & 0.001\\ \hline 0.0001 & -0.0016\\ 0.0001 & 0.0001\\ \hline 0.00001 & -0.00032\\ 0.00001 & 0.00001\end{array}\right],\quad \begin{bmatrix}\widetilde{M}_0\\ \widetilde{M}_1\\ \widetilde{M}_2\\ \widetilde{M}_3\\ \widetilde{M}_4\\ \widetilde{M}_5\\ \widetilde{M}_6\end{bmatrix}=\left[\begin{array}{cc}1 & 0\\ 0 & 1\\ \hline 0 & -1\\ 0 & 1\\ \hline -0.1 & -0.2\\ 0 & 0.1\\ \hline -0.03 & -0.04\\ 0 & 0.01\\ \hline -0.007 & -0.008\\ 0 & 0.001\\ \hline -0.0015 & -0.0016\\ 0 & 0.0001\\ \hline -0.00031 & -0.00032\\ 0 & 0.00001\end{array}\right]\tag{5.1}$$

（1）SSF1的实现（只实现$p=2$的模型）

---

* $\{\overline{M}_i\}$和$\{\widetilde{M}_i\}$根据描述系统的随机卷积方程，利用多步最小二乘法，就能获得其一致性估计[5]。

容易检验：$\overline{M}_3=0.3\overline{M}_2-0.02\overline{M}_1$ 及 $\overline{M}_3=\begin{bmatrix}0.3 & 0.2\\-0.1 & -0.1\end{bmatrix}\overline{M}_2$

$-\begin{bmatrix}-0.02 & -0.02\\0.015 & 0.015\end{bmatrix}\overline{M}_1$，由此即知 $p=2$，$pm=4$。于是有 α_i 分别为纯量参数和 2×2 矩阵的如下模型，即

$$\overline{A}=\left[\begin{array}{c|c}O_2 & I_2\\\hline -0.02\ I_2 & 0.3\ I_2\end{array}\right],\ \overline{B}=\begin{bmatrix}\overline{M}_1\\\overline{M}_2\end{bmatrix},\ \overline{K}=\begin{bmatrix}\widetilde{M}_1\\\widetilde{M}_2\end{bmatrix},$$

$\overline{C}=[I_2O_2]$，$\overline{D}=0$，

和 $$\overline{A}=\left(\begin{array}{cc|cc}\multicolumn{2}{c|}{O_2} & \multicolumn{2}{c}{I_2}\\\hline -0.02 & -0.02 & 0.3 & 0.2\\0.015 & 0.015 & -0.1 & -0.1\end{array}\right),\ \overline{B}=\begin{bmatrix}\overline{M}_1\\\overline{M}_2\end{bmatrix},\ \overline{K}=\begin{bmatrix}\widetilde{M}_1\\\widetilde{M}_2\end{bmatrix}$$

$\overline{C}=[I_2\quad O_2]$，$\overline{D}=0$。

（2）SSF2的实现（只计算 $p_1=\nu_1$，$p_2=\nu_2$ 的最小实现和 $p_1=p_2=2$ 的非最小实现）

（i）容易检验：$\overline{M}^T_{31}=0.3\overline{M}^T_{21}-0.02\overline{M}^T_{11}$ 和 $\overline{M}^T_{22}=0\times\overline{M}^T_{21}+0\times\overline{M}^T_{11}+0.1\overline{M}^T_{12}$，故知 $\nu_1=2$，$\nu_2=1$，便有如下代数等价的模型：

$$A'=\left(\begin{array}{cc|c}0 & & \\-0.02 & 0.3 & \\\hline 0 & 0 & 0.1\end{array}\right),\ B'=\begin{bmatrix}1 & -0.1\\0.1 & -0.2\\1 & 1\end{bmatrix},\ K'=\begin{bmatrix}0 & -1\\-0.1 & -0.2\\0 & 1\end{bmatrix},$$

$$C'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix},\ D'=0.$$

（ii）可以检验：$\overline{M}^T_{31}=0.3\overline{M}^T_{21}-0.02\overline{M}^T_{11}$ 和 $\overline{M}_{32}=0\times\overline{M}^T_{21}+0\times\overline{M}^T_{11}+0.02\overline{M}^T_{12}-0.1\overline{M}_{22}$，故知 $p_1=p_2=2$，于是ITF等价的模型为

$$A'=\left(\begin{array}{cc|cc}0 & 1 & & \\-0.02 & 0.3 & & \\\hline 0 & 0 & 0 & 1\\0 & 0 & -0.1 & 0.02\end{array}\right),\ B'=\begin{pmatrix}1 & -1\\0.1 & -0.2\\1 & 1\\0.1 & 0.1\end{pmatrix},$$

$$K'=\begin{pmatrix}0 & -1\\-0.1 & -0.2\\0 & 1\\0 & 0.1\end{pmatrix},\ C'=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\end{bmatrix},\ D'=0.$$

（3）ARMAX 的实现（只实现 $p=2$ 的模型）

利用本节（1）中的结果，立即可得如下两组参数的模型，即

（i）α_i 为纯量参数的模型（典范差分方程[2]）

$$
\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.02\\ -0.3\end{bmatrix},\quad
\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_2 & & \\ 0.02I_2 & I_2 & \\ -0.3I_2 & 0.02\,I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\overline{M}_0\\ \overline{M}_1\\ \overline{M}_2\end{pmatrix}
$$

$$
=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\\ \hline 1 & -1\\ 1 & 1\\ \hline 0.3 & 0\\ 0.3 & 0.3\end{array}\right),
$$

$$
\begin{pmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I_2 & & \\ 0.02I_2 & I_2 & \\ -0.3I_2 & 0.02I_2 & I_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\widetilde{M}_0\\ \widetilde{M}_1\\ \widetilde{M}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0.2 & -1\\ 0 & 1.2\\ -0.4 & -0.4\\ 0 & 0\end{pmatrix}.
$$

（ii）α_i 为2×2阵的模型（一般差分方程）

$$
\begin{bmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\end{bmatrix}=\left(\begin{array}{cc}-0.3 & -0.2\\ 0.1 & 0.1\\ \hline 0.02 & 0.02\\ -0.015 & -0.015\end{array}\right),\quad
\Theta=\left(\begin{array}{cc|cc|cc}1 & 0 & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ \hline -0.3 & -0.2 & 1 & 0 & & \\ 0.1 & 0.1 & 0 & 1 & & \\ \hline 0.02 & 0.02 & -0.3 & -0.2 & 1 & 0\\ -0.015 & -0.015 & 0.1 & 0.1 & 0 & 1\end{array}\right),
$$

$$
\begin{pmatrix}\beta_0\\ \beta_1\\ \beta_2\end{pmatrix}=\Theta\begin{pmatrix}\overline{M}_0\\ \overline{M}_1\\ \overline{M}_2\end{pmatrix}=\left(\begin{array}{cc}0 & 0\\ 0 & 0\\ \hline 1 & -1\\ 1 & 1\\ \hline -0.4 & -0.1\\ 0.3 & 0.1\end{array}\right),\quad
\begin{pmatrix}\gamma_0\\ \gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}=\Theta\begin{pmatrix}\widetilde{M}_0\\ \widetilde{M}_1\\ \widetilde{M}_2\end{pmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline -0.3 & -1.2 \\ 0.1 & 0.1 \\ \hline -0.08 & 0.12 \\ -0.015 & -0.015 \end{bmatrix}.
$$

参考文献

〔1〕 Kalman, R. E., Bol. Soc. Mat., (1960), 102-105.
〔2〕 韩光文，辨识与参数估计，国防工业出版社，北京，(1980).
〔3〕 Åström, K. J. and Ekhoff, P., Automatica, 7, (1971), 123-162.
〔4〕 韩光文，系统工程，2, 3, (1984), 26-35.
〔5〕 夏天长，系统辨识—最小二乘法，清华大学出版社，北京，(1983).

Impulse Transfer Function Equivalent Models and Its Unifying Realization

Han Guangwen

(Department of Automatic Control, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

In noisy Case, the model structure can not be exactly identified, and it is defficult to obtain the state space model in algebraic equivalence. For this reason, we suggest the model based on impulse transfer function eguivalence to describe the system. Simple examples for explaining the unifying realization methods of state space and difference equation model using finite markov parameters are also presented in this paper.