

递推自适应极点配置算法 —确定性控制问题

袁子扬 王忠玲

(上海机械学院计算机工程系)

摘 要

本文提出的递推自适应极点配置控制器算法是一种直接以系统闭环稳定性为目标的闭环参考模型逼近设计方法。对参数、延滞和结构变化的对象可用二个辨识器,也可以用一个辨识器来在线修正控制器使闭环极点仍收敛到期望的位置。文中还讨论了确定性控制问题下该算法的收敛性以及仿真实例。

一、引 言

基于最小方差策略的自校正控制器算法,在实际应用中往往受到一定的限制。主要原因是该算法不能明确保证得到一个稳定乃至鲁棒的控制系统,因为方差的极小化过程并不是一种基于稳定性理论的设计。继 Åström^[1]提出了自校正调节器并由 Clarke^[2]推广为自校正控制器后,极点配置自校正控制器也由 Åström^[4]和 Allidina^[3]等人分别作了推广。极点配置作为一种较为鲁棒的控制算法,近来越来越引起理论界和工业界的兴趣^[3-7,9,10]。

以往的大多数极点配置自校正控制器算法,实质上可以归结为每一步求解一个 n 维的线性方程组 (n = 控制器参数个数),其中主要的计算量在于要求一个 n 维矩阵的逆。

本文提出的算法 (RAPAC) 称为递推自适应极点配置控制器,是一种直接以系统的闭环稳定性为目标的闭环参数模型逼近方法。本算法对于目标对象的参数,延滞和结构发生变化时,仍能达到期望的控制效果。对于这种算法的稳定性分析 (确定性情况) 表明了这种算法是一致收敛的。

二、用两个辨识器的 RAPAC 算法

设确定性单变量对象

$$Ay(k) = z^{-1}Bu(k), \quad (2.1a)$$

其中,

$$A = 1 + \sum_{i=1}^n a_i z^{-i}, \quad a_n \neq 0, \quad (2.1b)$$

$$B = \sum_{i=0}^m b_i z^{-i} \quad (2.1c)$$

$y(k)$ 和 $u(k)$ 分别为对象的输出和输入(控制), 设对象(2.1)满足如下假设条件

A1 n 已知, 从而 $a_n \neq 0$,

A2 m 的上界已知,

A₃ A 和 B 互质.

这里我们对延滞没有提出任何要求. 它包含在 B 中, 延滞的变化表现在 B 多项式中低阶系数的变化. 对(2.1)构造控制器

$$Hu(k) + Gy(k) = k_0 w(k), \quad k_0 \neq 0 \quad (2.2a)$$

其中,

$$H \triangleq 1 + \sum_{i=1}^{m+1} h_i z^{-i}, \quad (2.2b)$$

$$G \triangleq \sum_{i=0}^{n-1} g_i z^{-i}. \quad (2.2c)$$

k_0 标量增益, $w(k)$ 为闭环输出的设定信号, H, G 满足

$$HA + z^{-1}BG = T, \quad (2.3)$$

其中,

$$T = 1 + \sum_{i=1}^{n_t} t_i z^{-i} \quad (2.4)$$

为期望的闭环极点多项式, $n_t \leq m + n + 1$, 且 H 和 T 都是首一多项式. 在一般情况下, 对(2.3)只要满足A₃和(2.2), HG 有唯一解. 但在自适应过程中, A, B 未知, 只能得到 A 和 B 的估计 $\hat{A}(k)$ 和 $\hat{B}(k)$. 设由此解(2.3)得到的控制器参数为 $\hat{H}(k)$ 和 $\hat{G}(k)$, 故有

$$\hat{H}(k) \hat{A}(k) + z^{-1} \hat{B}(k) \hat{G}(k) = T. \quad (2.5)$$

定义

$$\theta = [b_0, \dots, b_m, a_1, \dots, a_n]^T, \quad (2.6)$$

$$\eta = [h_1, \dots, h_{m+1}, g_0, \dots, g_{n-1}]^T. \quad (2.7)$$

两个 $m + n + 1$ 维向量. 其估计分别为 $\hat{\theta}(k)$ 和 $\hat{\eta}(k)$, 这里 k 为 θ 辨识器时标, 而 t 为 η 辨识器时标. 令

$$\varphi_{\theta}(k) = [u(k-1), \dots, u(k-m-1), -y(k-1), \dots, -y(k-n)]^T \quad (2.8)$$

则有

$$y(k) = \varphi_{\theta}^T(k) \hat{\theta}(k) + \varepsilon_{\theta}(k). \quad (2.9)$$

若用最小二乘法, 则有

$$\left. \begin{aligned} \hat{\theta}(k) &= \hat{\theta}(k-1) + K_{\theta}(k)[y(k) - \varphi_{\theta}^T(k) \hat{\theta}(k-1)], \\ K_{\theta}(k) &= P_{\theta}(k-1) \varphi_{\theta}(k) [1 + \varphi_{\theta}^T(k) P_{\theta}(k-1) \varphi_{\theta}(k)]^{-1}, \\ P_{\theta}(k) &= P_{\theta}(k-1) - K_{\theta}(k) \varphi_{\theta}^T(k) P_{\theta}(k-1), \\ \hat{\theta}(0) &= 0, P_{\theta}(0) = c^2 I, c^2 \gg 0. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

对于 η 辨识器, 可引入一个辨识激励信号 $\{r(t)\}$. 在时刻 k , 按 (2.10) 得到 $\hat{\theta}(k)$ 后, 即可以按图 2 开始对 η 作 k 时刻的若干步递推以得到其估计 $\hat{\eta}(k, t)$. 令

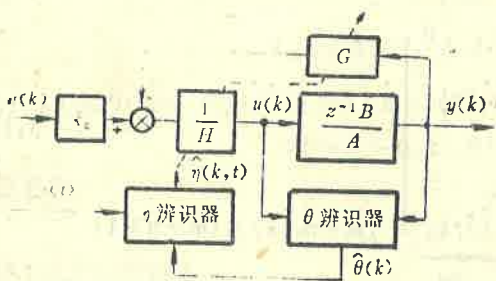


图 1 用两个辨识器的 RAPAC 系统结构

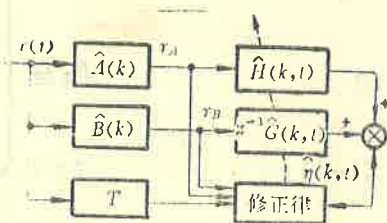


图 2 η 辨识器结构

$$r_A(k, t) = \hat{A}(k)r(t), \quad (2.11a)$$

$$r_B(k, t) = \hat{B}(k)r(t), \quad (2.11b)$$

$$z(k, t) = Tr(t) - r_A(k, t). \quad (2.12)$$

则

$$z(k, t) = \varphi_{\eta}^T(k, t) \eta^T(k, t) + \varepsilon_{\eta}(t). \quad (2.13)$$

η 的最小二乘估计 (也可使用其它辨识方法)

$$\left. \begin{aligned} \hat{\eta}(k, t) &= \hat{\eta}(k, t-1) + r\eta(t)[z(k, t) - \varphi_{\eta}^T(k, t) \hat{\eta}(k, t-1)], \\ P_{\eta}(k, t) &= P_{\eta}(k, t-1) - K_{\eta}(t) \varphi_{\eta}^T(k, t) P_{\eta}(k, t-1), \\ K_{\eta}(t) &= P_{\eta}(k, t-1) \varphi_{\eta}(k, t) [1 + \varphi_{\eta}^T(k, t) P_{\eta}(k, t-1) \varphi_{\eta}(k, t)]^{-1}, \\ t &= 1, 2, \dots, \hat{\eta}(k, 0) = \hat{\eta}(k-1), P_{\eta}(k, 0) = c^2 I \text{ 或 } P_{\eta}(k-1). \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

$\{r(t)\}$ 是人为给出的足够丰富的激励信号。对 η 的修改并不是每步都必须的, 可以隔若干步修改一次。

三、收敛性分析

本算法的收敛性关键是对象参数的收敛性。而控制器的辨识结果也将对对象参数的收敛

性产生影响。

定理 (参数阵满秩定理) 若 A, B 满足条件 A_1, A_2 , 则当且仅当 A, B 互质时 P_1 (或 P_2) 满秩。这里

$$P_1 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_0 & 0 \\ a_1 & \ddots & 1 & b_0 \\ \vdots & \ddots & a_1 & \vdots \\ a_n & \vdots & \vdots & b_m \\ 0 & \ddots & a_n & b_m \end{pmatrix} \quad (m+n+1) \times (m+n+1) \quad (3.1a)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m+1 \text{ 列}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ 列}}$

$$P_2 \triangleq \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & \ddots & 1 & b_0 \\ \vdots & \ddots & a_1 & \vdots \\ a_n & \vdots & \vdots & b_m \\ 0 & \ddots & a_n & b_m \end{pmatrix} \quad (m+n+1) \times (m+n+1) \quad (3.1b)$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m+1 \text{ 列}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{n \text{ 列}}$

证明见附录。

对给定的 T , 要求控制器满足 (2.3) 实际是求解

$$P_1 \eta = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \\ \vdots \\ t_{n+m+1} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

由于 P_1 满秩, 因而 η 唯一确定。又由于 $\{r(t)\}$ 是频率足够丰富的激励信号, 因而对固定的 $\bar{A}, \bar{B}$, 估计 $\bar{\eta}(k)$ 具有强一致性^[10]。即有 $\hat{H}(k) = \bar{H}$, $\hat{G}(k) = \bar{G}$, 且满足

$$\bar{H} \bar{A} + z^{-1} \bar{B} \bar{G} = T. \quad (3.3)$$

实际上的闭环特征多项式为 $\bar{T}$, 满足

$$\bar{H} A + z^{-1} B \bar{G} = \bar{T}. \quad (3.4)$$

(3.3) 减 (3.4), 记 $\Delta A \triangleq \bar{A} - A$, $\Delta B \triangleq \bar{B} - B$, $\Delta T \triangleq \bar{T} - T$, 得

$$\bar{H} \Delta A + z^{-1} \bar{G} \Delta B = -\Delta T. \quad (3.5)$$

由于控制器参数的估计也存在误差, 即有 $\Delta H \triangleq \bar{H} - H$ 和 $\Delta G \triangleq \bar{G} - G$, 且有

$$\Delta H \cdot A + z^{-1} \Delta G \cdot B = \Delta T, \quad (3.6)$$

由 (3.5) 和 (3.6) 得

$$\Delta H A + z^{-1} \Delta G B = - (\bar{H} \Delta A + z^{-1} \bar{G} \Delta B). \quad (3.7)$$

若参数 θ 收敛, 则表明 (2.10) 中

$$\Delta A \cdot y(k) - z^{-1} \Delta B u(k) = 0. \quad (3.8)$$

由于参数 η 也收敛, $u(k)$ 满足

$$\bar{H} u(k) = k_0 w(k) - \bar{G} y(k). \quad (3.9)$$

(3.9) 代入 (3.8), 考虑 (3.7),

$$[\Delta A \bar{H} + z^{-1} \Delta B \bar{G}] y(k) = z^{-1} k_0 \Delta B w(k), \quad (3.10)$$

利用 $y(k) = \frac{k_0 B}{T} w(k-1)$ 以及 (3.4) 得

$$k_0 \bar{H} [\Delta B A - \Delta A \cdot B] w(k) \equiv 0. \quad (3.11)$$

由 (2.26) 知 $\bar{H} \neq 0$, 若 $\{w(k)\}$ 为 $n+m+1$ 阶持续激励信号则

$$\Delta B \cdot A - \Delta A \cdot B = 0 \quad (3.12)$$

由定理必有

$$[-\Delta b_0, \dots, -\Delta b_m, \Delta a_1 \dots \Delta a_n]^T = 0. \quad (3.13)$$

进一步 (3.7) 可表成

$$\Delta H \cdot A + z^{-1} \Delta G \cdot B = 0. \quad (3.14)$$

由定理可知

$$[\Delta h_1 \dots \Delta h_{m+1} \Delta g_0 \dots \Delta g_{n+1}] = 0. \quad (3.15)$$

推论 本算法若满足条件 A_1, A_2 且 $\{r(t)\}$ 持续激励, 则对象参数和控制器参数都一致收敛。

四、仅用一个辨识器的算法

若 $\{u(t)\}$ 频率足够丰富, 则可以代替 $\{r(t)\}$, 从而得仅用一个辨识器的算法。现引入一个统一的 (θ, η) 辨识器。结构如图 4.1。若 A 稳定, 由 (2.3) 得

$$H + \frac{z^{-1} B}{A} G = \frac{T}{A}, \quad (4.1)$$

进一步有

$$H u(k) - (-G) y(k) = \frac{T}{A} u(k), \quad (4.2)$$

令

$$z(k) = \frac{T}{A} u(k) - u(k), \quad (4.3)$$

$$\eta = [h_1 \dots h_{m+1}, -g_1 \dots -g_{n+1} - g_0]^T, \quad (4.4)$$

$$\varphi_\eta = [u(k-1) \dots u(k-m+1) - y(k-1) \dots y(k-n+1) - y(k)]^T. \quad (4.5)$$

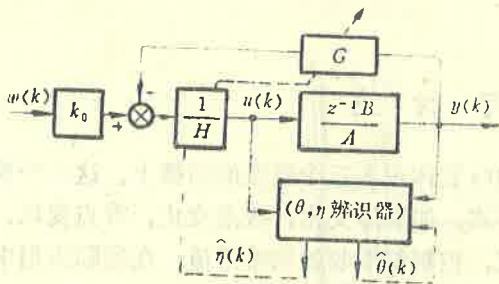


图 3 仅用一个辨识器的RAPAC系统结构

则有回归形式

$$z(k) = \varphi_{\eta}^T(k) \eta. \quad (4.6)$$

对 (2.1) 定义

$$\theta = [b_0 \cdots b_m \quad a_1 \cdots a_n]^T, \quad (4.7)$$

$$\varphi_{\theta}(k) = [u(k-1) \cdots u(k-m+1) - y(k-1) \cdots y(k-n+1) - y(k-n)]^T, \quad (4.8)$$

有回归形式

$$y(k) = \varphi_{\theta}^T(k) \cdot \theta. \quad (4.9)$$

利用正交变换递推最小二乘法^[11], 每一步的前 $(n+m)$ 列所采用的正交变换阵 Q 是完全相同的。故可用一个辨识器。重新定义一个增广的回归向量 φ

$$\varphi(k) = [u(k-1) \cdots u(k-m-1) - y(k-1) \cdots - y(k-n+1) - y(k-n) - y(k)]^T, \quad (4.10)$$

以及增广的参数向量 $\tilde{\theta}$ 和 $\tilde{\eta}$

$$\tilde{\theta} = [\theta^T, 1]^T, \quad (4.11a)$$

$$\tilde{\eta} = [h_1 \cdots h_{m+1}, -g_1 \cdots g_{n-1}, 0, -g_0]^T. \quad (4.11b)$$

从而有

$$z(k) = \varphi^T(k) \tilde{\eta}, \quad (4.12a)$$

$$0 = \varphi^T(k) \tilde{\theta}. \quad (4.12b)$$

完全可以使用同一个辨识器。从而使总的运算量减少了近一半。在实际估计中, 由于 A 不知, 在 (4.1) 中将 $\hat{A}$ 代 A 。由收敛性可知, 这种替代是完全可行的。对于 A 不稳定的情况, 可令

$$u_f(k) = \hat{A} u(k), \quad (4.13a)$$

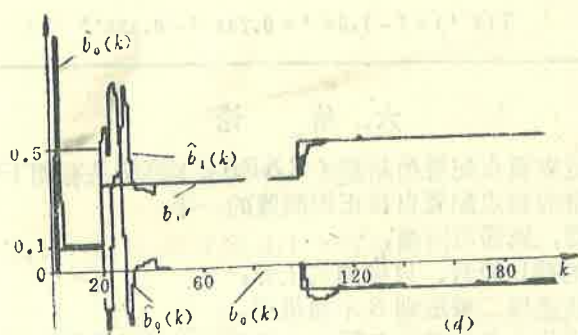
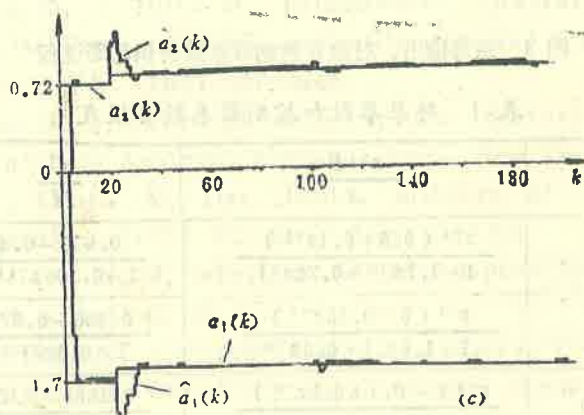
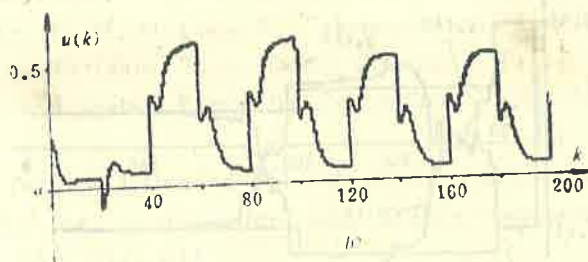
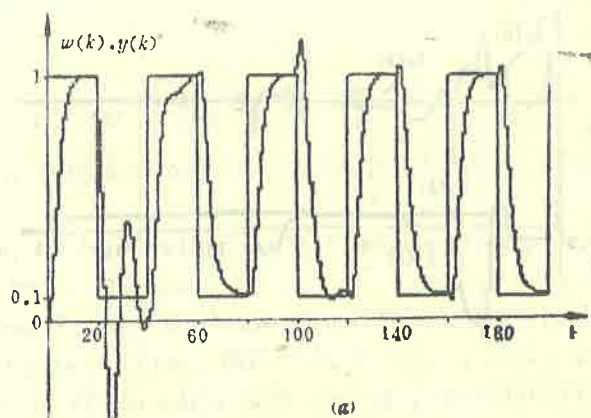
$$y_f(k) = \hat{A} y(k), \quad (4.13b)$$

$$z_f(k) = T u(k) - u_f(k). \quad (4.13c)$$

并在算法中用 (4.13) 代 $u(k)y(k)$ 和 $z(k)$ 。

五、仿 真 与 讨 论

按表 1 对二阶对象进行了数字仿真, 对象的时变体现在三个模型的切换上。这三个模型的切换模拟了真实线性系统变化的很大一部分形式, 如延滞变化, 极点变化, 零点变化, 最小相位与非最小相位变化等等。对于诸多的变化, 控制都能收敛到希望值。在实际应用中对缓慢时变的对象, 控制器参数的辨识收敛过程将更平稳。该仿真例子采用的是仅用一个辨识器的 RAPAC 算法。辨识方法是正交变换递推最小二乘法,



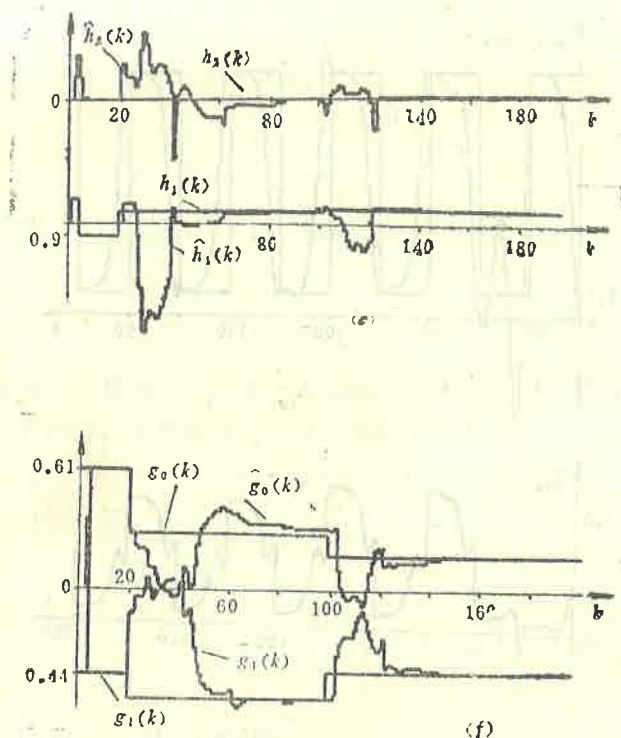


图 4 系统输出、对象和控制器参数辨识动态过程

表 1 对象参数和控制器参数真值表

k	$\frac{z^{-1}B}{A}$	$\frac{ C }{H}$
0 - 19	$\frac{z^{-1}(0.5 + 0.1z^{-1})}{1 - 1.7z^{-1} + 0.72z^{-2}}$	$\frac{0.611 - 0.44z^{-1}}{1 - 0.105z^{-1} + 0z^{-2}}$
20 - 99	$\frac{z^{-1}(0 + 0.35z^{-1})}{1 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2}}$	$\frac{0.286 - 0.5714z^{-1}}{1 + 0.1z^{-1} + 0z^{-2}}$
100 - 200	$\frac{z^{-1}(-0.1 + 0.5z^{-1})}{1 - 1.6z^{-1} + 0.8z^{-2}}$	$\frac{0.1685 - 0.427z^{-1}}{1 + 0.117z^{-1} + 0z^{-2}}$

$$T(z^{-1}) = 1 - 1.5z^{-1} + 0.74z^{-2} - 0.12z^{-3}$$

六、结 论

本文提出的递推自适应极点配置控制器 (RAPAC) 算法具有如下特点:

- 1) 计算量为通常的极点配置自校正控制器的一半;
- 2) 无须知道延滞, 延滞可时变;
- 3) 无须知道 B 的确切阶数, 只要知其上界;
- 4) 若用正交变换递推二乘法则 B 不须辨识。

致谢 作者与华东师范大学袁震东老师和上海科技大学谢贤亚老师进行过许多有益的讨

论, 在此表示衷心的感谢。

参 考 文 献

- [1] K. J. Astrom, Introduction to Stochastic Control Theory, Academic Press, (1970).
- [2] D. W. Clarke, P. J. Gawthrop, Self-tuning Controller, Proc. IEE, 122:9, (Sept. 1975), 929—934.
- [3] A. Y. Allidina, F. M. Hughes, Generalized Self-tuning Controller with Pole Assignment, Proc. IEE, 127, Pt-D, 1, (Jan. 1980), 13—18.
- [4] K. J. Astrom, B. Wittenmark, Self-tuning Controller Based on Pole-zero Placement, IEE. Proc. D, 127:3, (May 1980), 120—130.
- [5] A. Y. Allidina, F. M. Hughes, T. Tahmassebi, An Implicit Self-tuning Controller for Variable Time Delay Systems, Procs. of IFAC on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, (1985), 1779—1785.
- [6] X. S. Yang, Implicit Extended Pole-Assignment Self-tuning Controller, Procs. of IFAC on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, (1985), 1787—1791.
- [7] G. C. Goodwin, D. J. Hill, M. Palaniswami, Towards an Adaptive Robust Controller, Procs. of IFAC on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, (1985), 997—1002.
- [8] G. C. Goodwin, R. L. Payne, Dynamic System Identification: Experiment Design and Data Analysis, Academic Press, New York, (1977).
- [9] H. Elliott, R. Cristi, M. Das, Global Stability of Adaptive Pole Placement Algorithms, IEEE AC-30:4, (1985) 348—356.
- [10] B. D. O. Anderson, R. M. Johnstone, Global Adaptive Pole Positioning, IEEE AC-30:1, (1985), 11—22.
- [11] 裘子扬, 广义范数残差判据, 上海机械学院学报, 25:4, (1985), 71—80.
- [12] 李清泉, 隐式组合自校正器, 清华大学学报, 25:4, (1985), 84—92.
- [13] 陈翰馥, 随机递推估计, 科学出版社, 北京, (1984).

附录 参数阵满秩定理的证明

定义 对任意满足(2.1b)(2.1c)形式的 A, B 和存在的

$$Q \triangleq \sum_{i=0}^r q_i z^{-i} \neq 0, \quad 0 \leq r \leq \min\{n, m\} \quad (A, 1)$$

若

$$\frac{B}{A} = \frac{B^*Q}{A^*Q} = \frac{B^*}{A^*}, \quad (\text{A.2})$$

且 A^*, B^* 互质, 则称 A, B 是 r 阶可约简的.

显然 A, B 互质当且仅当 A, B 是 0 阶可约简的.

证 按定义及 (A.2) 有

$$A^*B = B^*A, \quad (\text{A.3})$$

令

$$A^* \triangleq \sum_{i=0}^{n-r} \alpha_i z^{-i}, \quad (\text{A.4a})$$

$$B^* \triangleq \sum_{i=0}^{m-r} \beta_i z^{-i}, \quad (\text{A.4b})$$

则 (A.3) 可展成

$$n+m+1 \text{ 行} \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & b_0 & \cdots & 0 \\ a_1 & \cdots & 1 & \vdots & \cdots & b_0 \\ \vdots & & a_1 & \vdots & & \vdots \\ a_n & \cdots & \vdots & b_m & \cdots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_n & 0 & \cdots & b_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\beta_0 \\ \vdots \\ -\beta_{m-r} \\ \alpha_0 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{pmatrix} = 0. \quad (\text{A.5})$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{m+1-r \text{ 列}, n+1-r \text{ 列}}$

充分条件 P_1 (或 P_2) 非奇异 $\rightarrow A, B$ 互质.

用反证法. 若 A, B 不互质, 则 A, B 是 r 阶 ($r \geq 1$) 可约简的, 这时对某一个 r 必有 (A.5) 成立. 注意到 (A.5) 左边矩阵中的每一列添加上一些零后就是 P_1 (或 P_2) 的某一行, (A.5) 成立, 意味着它们是相关的, 从而 P_1 (或 P_2) 是降秩的, 与假设矛盾, 故必有 A, B 互质.

必要条件: A, B 互质 $\rightarrow P_1$ (或 P_2) 非奇异.

仍用反证法. 若 P_1 (或 P_2) 奇异, 则必存在不为零的常向量 C

$$C = [\beta_0 \cdots \beta_{m-1} \beta_m \alpha_0 \cdots \alpha_{n-1}]^T, \quad (\text{A.6})$$

使 $P_1 C = 0$ (或 $P_2 C = 0$). 对于 $P_1 C = 0$, 因为 $a_n \neq 0$ 从而必须 $\beta_m = 0$ 即 P_1 中的第 $m+1$ 列可以划去而不影响结论. 对 $P_2 C = 0$, 则必有 $\beta_0 = 0$, 即 P_2 中的首列可以划去而不影响结论. 划去后的等式 $P_1 C = 0$ 意味着 (A.5) 当 $r=1$ 时成立, 因而 A, B 是 r 阶可约简的 ($r \geq 1$)

$$P_2 C = 0$$

即 A, B 不互质, 矛盾. 从而结论成立.

A Recursively Adaptive Pole-assignment Controller ——Deterministic Case

Qiu Ziyang, Wang Zhongling

(Dept. of Computer Engineering Shanghai
Institute of Mechanical Eng.)

Abstract

An algorithm of recursively adaptive pole-assignment controller (RAPAC) is proposed in the paper, which is the designing method of the closed-loop model-reference approach. Either two identifiers or only one identifier can be used to adjust the controller on-line so that the closed-loop system is stable and the closed-loop poles converge to the desired points, whenever the parameters or/and delay or/and structure of the controller plant vary with time. The closed-loop consistency of the algorithm in the deterministic case and the simulations of a time-varying second-order plant are also discussed in the paper.