

LQP逆算法及其在带材轧机板形板厚综合控制系统设计中的应用

宋维公 薛安克

(东北重型机械学院自控系, 齐齐哈尔)

摘 要

本文给出了LQP中Q阵选择的一种逆算法, 此法既解决了试凑法的盲目性, 又避开了Riccati方程的繁琐计算, 只须进行多项式运算。用此法设计线性调节器, 可使闭环系统既具有希望的极点配置, 又具备最优性。

在 $\phi 300\text{mm}$ 四辊可逆冷轧机板形板厚综合最优控制系统的设计中采用逆算法, 由计算机仿真和微机模拟试验结果表明, 理论与实际相符, 系统具有良好的动态性能, 控制精度达 $1/1000 \sim 1/10000$ 。

一、前 言

考察线性二次型调节器问题(简称LQP):
设线性定常系统

$$\dot{X} = AX + BU, \quad (1.1)$$

其中, $X \in R^n$, $U \in R^r$, A 为 $n \times n$ 阵, B 为 $n \times r$ 阵。二次性能指标

$$J[U(\cdot)] = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt, \quad (1.2)$$

其中, $Q \geq 0$, $R > 0$ 分别为给定的 $n \times n$ 和 $r \times r$ 阶对称阵。

当 (A, B) 完全可控、 (A, H) 完全可观($Q = H^T H$)时, 在约束(1.1)下, 使(1.2)为最小的最优控制为

$$U^* = -R^{-1} B^T P^* X, \quad (1.3)$$

其中, P^* 是稳态Riccati方程

$$PA + A^T P - PBR^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (1.4)$$

的唯一对称正定解。

众所周知, LQ问题应用的难点在于加权阵 Q 的选择。目前, 按希望极点配置来选择 Q 阵的方法, 受到人们的普遍重视。但现有的一些最优极点配置算法中^{[1]~[3]}, 都需解Riccati方程, 计算较复杂。调节器逆问题能较好地解决此问题, 但直接用来求解, 因 Q 阵不唯一及

其秩的限制^{[4]、[5]}, 很难设计出一个满足实际要求的最优控制系统。本文所述的逆算法, 将给出一种较有效的解决方法。

二、逆算法的推导及Q阵的选择

调节器逆问题说明^{[4]、[5]}, 并非任何反馈 K 都可构成最优控制, 必须满足一些条件。而诸条件中, 最主要的是频域条件^[5]

$$[I - R^{1/2}K^T(-j\omega I - A)^{-1}BR^{-1/2}]^T \times [I - R^{1/2}K^T(j\omega I - A)^{-1} \cdot BR^{-1/2}] \geq I, \quad (2.1)$$

这是反馈 K 构成最优调节器的充分必要条件。

定理 (逆算法定理)

对给定单输入系统

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x(t_0) \text{ 给定} \quad (2.2)$$

以及控制律

$$u = k^T x, \quad (2.3)$$

其中, (A, b) 为能控标准型。

当满足以下条件时

- 1) (A, b) 可控,
- 2) (A, k^T) 可观,
- 3) $\operatorname{Re} s_i(A + bk^T) < 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

如果

$$\Phi(s^2) = P(-s)P(s) - \varphi(-s)\varphi(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (C_i - A_i) \cdot s^{2i} \quad (2.4)$$

中诸 C_i, A_i 满足以下不等式

$$\begin{cases} C_i - A_i \geq 0 & i = 2l \\ C_i - A_i \leq 0 & i = 1 + 2l \end{cases} \quad \left(\begin{array}{l} l = 0, 1, \dots \\ i \leq n \end{array} \right), \quad (2.5)$$

则必存在 $Q = \operatorname{diag}(q_{ii}) \geq 0$, 使给定的控制律(2.3)成为系统(2.2)的最优控制, 且使性能指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (x^T Q x + u^2) dt \quad (2.6)$$

最小, 其中,

$$P(s) = \det(sI - A - bk^T) = s^n + c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1, \quad c_i = a_i - k_i, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\varphi(s) = \det(sI - A) = s^n + a_n s^{n-1} + \dots + a_2 s + a_1,$$

$$\begin{cases} C_i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \cdot 2c_j c_{2i-j+2} + (-1)^{i+1} c_{i+1}^2, \\ A_i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \cdot 2a_j a_{2i-j+2} + (-1)^{i+1} a_{i+1}^2, \end{cases} \quad (2.7)$$

推 论 根据逆算法定理, 对给定的 k 阵, 可按下式求得唯一的, 非负定的对角加权阵 Q ,

$$q_{i+1 \ i+1} = (-1)^i (C_i - A_i), \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (2.8)$$

式中, C_i, A_i 如 (2.7) 式所定义.

证 由最优控制系统的频域条件得^[5]

$$P(-s)P(s) - \varphi(-s)\varphi(s) = b^T \text{adj}(-sI - A^T)Q \cdot \text{adj}(sI - A) \cdot b \geq 0, \quad (2.9)$$

设 $Q = \text{diag}(q_{ii}) (i=1, 2, \dots, n)$,

注意到

$$b^T \text{adj}(-sI - A^T)Q \text{adj}(sI - A) \cdot b = q_{11} - q_{22}s^2 + \dots + (-1)^{n+1}q_{nn}s^{2n-2}. \quad (2.10)$$

显然, 对任何 $s = j\omega$, 只要 $q_{ii} \geq 0 (i=1, 2, \dots, n)$, 式 (2.10) 总是非负的. 但是对由希望极点 λ_i 而决定的 k , 当取 $Q = \text{diag}(q_{ii})$ 时, 式 (2.9) 未必成立.

令 $c_i = a_i - k_i \quad (i=1, 2, \dots, n)$, 则

$$P(s) = \det(sI - A - bk^T) = s^n + c_n s^{n-1} + \dots + c_2 s + c_1,$$

用数学归纳法可证明以下结论 (证明从略),

$$P(-s)P(s) = \sum_{i=0}^n \left\{ \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \cdot 2c_j c_{2i-j+2} + (-1)^{i+1} c_{i+1}^2 \right\} s^{2i}, \quad (2.11)$$

其中

$$c_0 = 0, \quad c_j = \begin{cases} 1 & j = n+1, \\ c_j & j \leq n+1, \\ 0 & j > n+1. \end{cases} \quad (0 < j \leq i+1)$$

从而

$$\phi(s^2) = P(-s)P(s) - \varphi(-s)\varphi(s) = \sum_{i=0}^{n-1} (C_i - A_i) \cdot s^{2i}, \quad (2.12)$$

其中,

$$\begin{cases} C_i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \cdot 2c_j c_{2i-j+2} + (-1)^{i+1} c_{i+1}^2, \\ A_i = \sum_{j=1}^{i+1} (-1)^{j+1} \cdot 2a_j a_{2i-j+2} + (-1)^{i+1} a_{i+1}^2. \end{cases} \quad (2.13)$$

进一步, (2.12) 式可改写为

$$\phi(s^2) = \sum_{l=0}^{\frac{n-1}{2}} (\alpha_{4l} s^{4l} + \alpha_{2+4l} s^{2+4l}), \quad (2.14)$$

上式中, $\alpha_i = C_i - A_i$, 当 $i > 2n$ 时, $\alpha_i = 0$.

考察 (2.12)、(2.14) 两式可知, 对任何 $s = j\omega$, 要使 $\phi(s^2) \geq 0$, 只要

$$\begin{cases} C_i - A_i \geq 0 & (i=2l), \\ C_i - A_i \leq 0 & (i=1+2l), \end{cases} \quad (l=0, 1, \dots, i \leq n) \quad (2.15)$$

由调节器逆问题即可知,此时 $u = k^T x$, 就是最优控制律,且一定存在非负定对称阵 Q , 同时,对应的二次型性能指标取极小值。

根据 (2.9)、(2.10)、(2.12)、(2.14)、(2.15) 诸式,只要令

$$(-1)^i (C_i - A_i) = q_{i+1} \delta_{i+1}, \quad (i=0, 1, \dots, n-1) \quad (2.16)$$

这样,在保证 $C_i - A_i$ 满足 (2.15) 式,即对任何 $s = j\omega$, $\phi(s^2) \geq 0$ 的条件下,得到的 Q 阵为非负定的对角阵,且是唯一的。这就证明了推论。

采用逆算法设计最优控制系统,首先可由希望极点通过根轨迹确定反馈阵 k , 然后检验逆算法定理诸条件,最后根据 (2.8) 式求取 Q 阵。设计过程中,经几次调整必能找到满足希望极点配置的 k 阵及具有实际意义的 Q 阵,使系统最优。

三、用逆算法设计板形板厚综合调节系统

本文参考支承辊弯曲新结构的设想^[6],首次提出用最优线性调节器,通过支承辊弯曲来实现带钢轧机板形板厚综合最优控制。由此得到的 $\phi 300\text{mm}$ 四辊可逆冷轧机综合控制系统简化结构如图1所示。

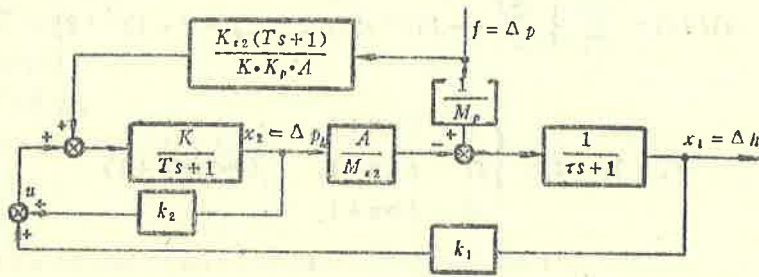


图1 综合控制系统简化结构框图

系统状态方程 (已化成能控标准型) 如下:

$$\dot{x}_c = A_c x_c + B_c u + W_c f + E_c f, \quad (3.1)$$

$$y_c = C_c x_c, \quad (3.2)$$

其中,

$$A_c = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -33.3 & -13.33 \end{pmatrix}, \quad W_c = \begin{pmatrix} -2.59 \times 10^{-9} \\ 2.36 \times 10^{-1} \end{pmatrix}, \quad E_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 2.37 \times 10^{-2} \end{pmatrix},$$

$$C_c = (-18370.40 \quad 0),$$

$x_1 = \Delta h$ ——厚差, $x_2 = \Delta p_1$ ——压力差, $f = \Delta p$ ——轧制压力差。

这实际上是一个带干扰系统的最优控制问题。显然,按常规线性调节器方法设计,不能使系统达到最优。我们采用文献[7]给出的方法来抑制干扰,保证系统的最优性。

根据实际系统动态性能指标的要求,取希望极点 $\lambda_{1,2} = -114.2 \pm j107.85$, 由逆算法可求得加权阵为 $Q_c = \text{diag}(1.0175 \times 10^9 \quad 2715.96)$ 。对应的原系统加权阵及最优状态反馈阵分

别为

$$Q = \begin{pmatrix} 3.0154 & 0.006 \\ 0.006 & 0.424 \end{pmatrix}, k = (1.30233 \quad -2.6886),$$

完整的最优综合控制系统如图2所示。

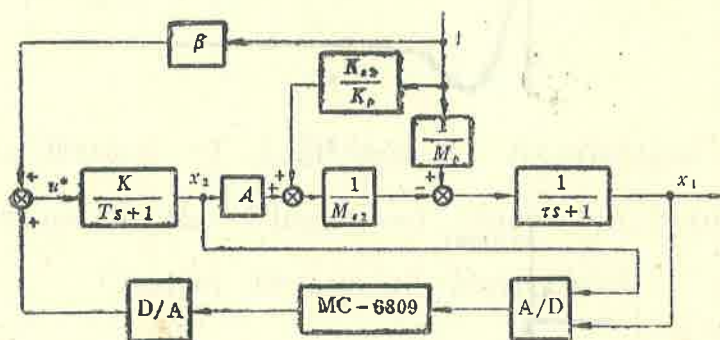


图 2 微机最优综合控制系统框图

最优控制律为

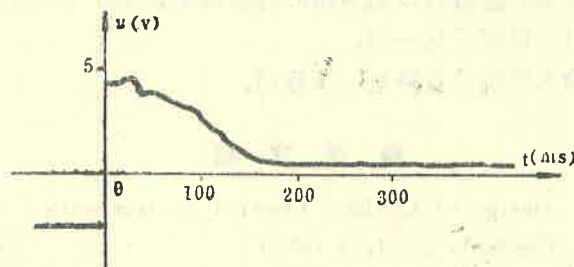
$$u^* = k^T x + \beta_1 f + \beta_2 \dot{f}$$

式中 β_1 、 β_2 为由文[7]中的设计法求得的前馈补偿系数，分别为 -0.2364 和 0.02366 。

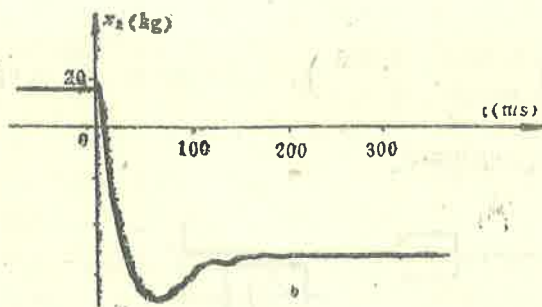
四、微机模拟试验

采用MC—6809微机对图2所示系统进行了模拟试验，被控对象由模拟计算机实现。

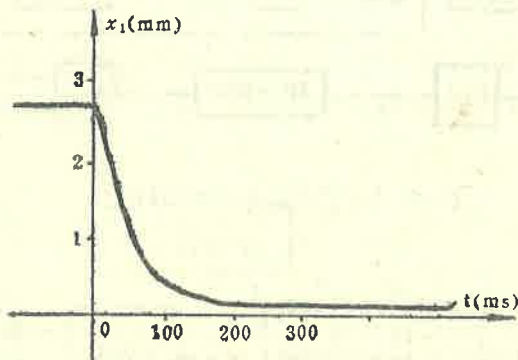
图3a、b、c分别为控制 u 和状态 x_2 、 x_1 的波形。此时 x_1 的稳态精度为 $1/1000$ ，无超调，调态时间小于 200ms 。可见，整个系统具有满意的动态性能。试验中，系统的最优反馈系数，前馈补偿系数和采样周期与理论值基本一致，且具有较好的鲁棒性。



(a)



(b)



(c)

图 3 控制 u 和状态 x_2 、 x_1 的波形

五、结 束 语

文中给出的逆算法是一种通过希望极点配置来选择 Q 阵的方法。它建立了系统参数、反馈系数与 Q 阵元素之间的一种关系。由此,可兼顾系统特性,动、静态及质量指标等因素,设计出令人满意的最优系统。这给线性调节器的工程应用带来了方便,该算法在轧机最优综合控制系统设计中的应用,证实了这一点。

逆算法如何用于多输入系统,有待进一步探讨。

参 考 文 献

- [1] O. A. Soheim, Design of Optimal Control System with Prescribed Eigenvalues, Int. J. Control, 15: 1, (1972).
- [2] Y. Bar-Ness, Optimal Closed-loop Pole Assignment, Int. J. Control, 27: 3, (1978).
- [3] W. L. Eastman and J. A. Bassi, Design of Linear Quadratic Regulators with Assigned Eigenstructure, Int. J. Control, 39: 4, (1984).

- 〔4〕 何关钰, 线性控制系统理论, 辽宁人民出版社, (1982)。
- 〔5〕 B. D. O. Anderson and J. B. Moon, Linear Optimal Control, Prentice-Hall, (1971)。
- 〔6〕 连家创, 四辊轧机支承辊弯曲新结构的研究, 东北重型机械学院学报, 4, (1982)。
- 〔7〕 宋维公、薛安克, 干扰情况下线性调节器的设计方法, 中国电工技术学会电控系统与装置委员会第二届年会论文, (1985, 8)。

Inverse Method of LQP and Its Application in the Design of the Plane and Gage Synthetical Control System of Strip Mill

Song Weigong, Xue Anke

(Department of Automatic Control, Northeast Heavy Machinery
Institute, Qiqihaer)

Abstract

This paper gives an inverse method for selecting weighting matrices in LQP. The method enables us to avoid blindness of trial as well as avoid solving complicated Riccati matrix equation, and needs only to calculate polynomials. The system designed with the inverse method is optimal and has desirable closed-loop poles. Then, the inverse method is applied in the design of the plane and gage synthetical optimal control system of $\phi 300\text{mm}$ and four rolls cold strip mill, simulation tests by microcomputer show that theory is in keeping with practice, system's transient property is fine and system is accurate within $1/1000$ to $1/10000$.