第6卷 增刊2
1989年4月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.6 Suppl.I. 2
April, 1989

定常输出反馈任置极点的新结果*

王大海

（河北省科学院自动化研究所，石家庄）

摘　要

本文指出，几乎所有满足如下条件不等式：$r-1 \geqslant n-m-\sum\limits_{j=1}^{t} v_{ij}+t \geqslant t\mu$ 的完全系统，都可以任意近似任置全部极点．这里n、r、m分别是系统的状态、输入、输出变量个数．$\{v_i,\ i\in \underline{r}\}$是（$A$，$B$）Kronecker 指标，$\{v_{ij},\ j\in \underline{t}\}$是其子集．$\mu$是（$C$，$A$）可观测指标．此条件式可概括以前的许多结果，如状态反馈（$m=n$，$\mu=1$），$m+r-1\geqslant n$的输出反馈等．文中有算例说明此条件式有效，并有反例指出了Kimura1977年的一个错误．本文是在Kimura的结果上的修正和进一步推广．

一、主要结果

本文研究完全可控可观测系统 $\Sigma(A,\ B,\ C)$：

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + B_u, \\ y &= C_x \end{aligned} \tag{1.1}$$

其中，$A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times r}$，$C\in R^{m\times n}$，$\mathrm{rank}B=r$，$\mathrm{rank}C=m$．

由典范形理论可知，若$\{\nu_i,\ i\in \underline{r}\}$为（$A$，$B$）的 Kronecker 指标，则存在如下两个非奇异阵：

$$P=[A^{\nu_1-1}b_1,\ A^{\nu_1-2}b_1,\ \cdots,\ b_1,\ A^{\nu_2-1}b_2,\ \cdots,\ b_2,\ \cdots,\ b_r], \tag{1.2}$$

$$Q=[q_1^{\tau},A^{\tau}q_1^{\tau},\cdots,\ A^{\tau\nu_2-1}q_1^{\tau},q_2^{\tau},\cdots,\ A^{\tau\nu_2-1}q_2^{\tau},\cdots,\ A^{\tau\nu_r-1}q_r^{\tau}]^{\tau}, \tag{1.3}$$

其中，q_i 是 P^{-1} 的第 d_i 行：$d_0=1$，$d_i=\sum\limits_{j}^{i-1}\nu_i+1=d_{i-1}+\nu_{i-1}$．

记 Λ_p 为 p 个复数组成的共轭对称集．一个命题若对几乎所有 Λ_n 成立，则使该命题失真的那些 Λ_n 皆处于标称参数空间 R^n 的真流形上，可使有限个多项式为零．比如总可以说，几乎所有的Λ_n各元互异且异于$\sigma(A)$，因为使之失真的 Λ_n 皆满足

$$\prod_{i\neq j}(\lambda_i-\lambda_j)=0,\qquad \prod_{i,j}(\lambda_i-\lambda_j(A))=0.$$

*国家自然科学基金资助的项目．

本文于1986年4月14日收到。1987年8月8日收到修改稿．

称Λ_n为$\sum(A,\ B,\ C)$可配集是说存在$K\in R^{r\times m}$，使$\Lambda_n=\sigma(A+BKC)$.

若记μ为$(C,\ A)$可观测指标，则可将本文主要定理记叙如下

定理 1.1　若对某正整数t存在一组$\{\nu_{i_j},\ j\in \underline{t}\}\subset\{\nu_i,\ i\in\underline{r}\}$，使得

$$r-1\geqslant n-m-\Sigma_{j=1}^{t}\nu_{i_j}+t\geqslant t\mu, \tag{1.4}$$

$$\widetilde{M}:=[C^\tau\ \vdots\ M^\tau]^\tau=[C^\tau\ \vdots\ q_{i_1}^\tau,\ A^\tau q_{i_1}^\tau,\cdots,A^{\tau^{\nu_{i_1}}}q_{i_1}^\tau,q_{i_2}^\tau,\cdots,q_{i_t}^\tau,\cdots,A^{\tau^{\nu_{i_t}}}q_{i_t}^\tau]^\tau,$$

且$\widetilde{M}$满行秩，则几乎所有互异的可无交分解为$\Lambda_n=\Lambda_m\cup(\cup_{j=1}^{t}\Lambda_{\sigma_j}^{(j)})$的点集$\Lambda_n$皆是$\Sigma(A,\ B,\ C)$可配集．这里，$\sigma_j\geqslant\nu_{i_j}+\mu-1,\ j\in\underline{t}$.

备注 1.2　利用典范形理论不难证明，对几乎所有$(A,\ B)$，M都是满行秩的．由于当$\mu>1$时（1.4）式保证了$\widetilde{M}$的行数少于列数n，故对几乎所有C，当M满行秩时都可以使$\widetilde{M}$满行秩．故可以笼统地说，几乎所有满足条件式（1.4）的系统$\sum(A,\ B,\ C)$都使$\widetilde{M}$满行秩，从而都可对几乎所有互异的可无交分解为$\Lambda_n=\Lambda_m\cup(\cup_{j=1}^{t}\Lambda_{\sigma_j}^{(j)})$的$\Lambda_n$进行输出反馈极点配置．

备注 1.3　以前许多有关极点配置的条件式都可看作（1.4）式的特例，如状态反馈情况相当于$m=n,\ \mu=1,\ t=0$；输出反馈$m+r-1\geqslant n$，相当于$m<n,\ \mu>1,\ t=0$．故（1.4）是个概括性较强的条件式．

备注 1.4　显然定理1.1可用其对偶形式$\sum(A^\tau,\ C^\tau,\ B^\tau)$写出，略．

备注 1.5　与定理1.1的$t=1$时条件不一样的是1977年Kimura的另一组条件式：存在$z^\tau\in R^n$，使

$$\left.\begin{array}{l}z[B,\ AB,\ \cdots,\ A^{n-m-r}B]=0,\ zA^{n-m-r+1}B\neq0,\\ r-1\geqslant\mu,\ m\geqslant\max\{\nu_i,\ i\in\underline{r}\}.\end{array}\right\} \tag{1.5}$$

并给出一种算法．但此条件和算法有错．请看如下反例：$\sum(A,\ B,\ C)$为

$$A=[e_3,\ 0,\ e_2,\ 0,\ e_4,\ e_5],\ B=[e_1,\ e_2,\ e_6],$$
$$C^\tau=[e_1+e_4,\ 2e_2+e_5,\ e_3+e_6],$$

其中，e_i表示单位阵I_6的第i列．$n=6,\ r=3,\ m=3,\ \mu=2.\ \nu_1=1,\ \nu_2=2,\ \nu_3=3,\ \Lambda_n=\Lambda_3\cup\Lambda_3^{(1)}=\{-1,\ -2,\ -3\}\cup\{-1\pm i,\ -4\}$.

若取$z^\tau=e_4+e_5$，则满足（1.5）诸条件，但无论Λ_n取何值，皆无法用其算法求解．

本文对Kimura的这一条件作了修正和推广，得到了现在的定理1.1．证明过程亦有相近之处，限于篇幅，证明略．（参阅[1]～[3]）．

二、算法和算例

对于$t\geqslant1$的情况，可用如下算法求解：

算法2.1

步1：定出有关参数值 Λ_m, t, σ_j, Λ_{σ_j}, q_{i_j}, $j\in \underline{t}$.

步2：记以 Λ_{σ_j} 为解集的多项式为

$$g_j(\lambda)=\lambda^{\sigma_j}+\lambda^{\sigma_j-1}\alpha_{j,1}+\cdots+\lambda\alpha_{j,\sigma_j-1}+\alpha_{j,\sigma_j},\quad j\in\underline{t}. \tag{2.1}$$

步3：对 $\{\tilde{h}_{j,i}\in R^m,\ i\in\underline{\sigma_j-\nu_{i_j}+1}\}$ 解方程

$$[\tilde{h}_{j,1},\tilde{h}_{j,2},\cdots,\tilde{h}_{j,\sigma_j-\nu_{i_j}+1}][A^{\tau^{\sigma_j-\nu_{i_j}}}C^\tau, A^{\tau^{\sigma_j-\nu_{i_j}-1}}C^\tau,\cdots,C^\tau]^\tau=q_{d_{i_j}}g_j(A),$$

$$j\in\underline{t}. \tag{2.2}$$

步4：递推计算 $h_{j,i}$ 和 $t_{j,i}\in C^n$, $j\in\underline{t}$

$$h_{j,1}^\tau=\tilde{h}_{j,1}C,\ h_{j,i}^\tau=\tilde{h}_{j,i}C-\sum_{s=1}^{i-1}\alpha_{j,s}h_{j,i-s}^\tau,\ i=2,3,\cdots,\sigma_j-\nu_{i_j}+1, \tag{2.3}$$

$$\left.\begin{aligned} t_{j,i}^\tau&=q_{d_{i_j}}A^{i-1},\ i\in\underline{\nu_{i_j}},\\ t_{j,i}^\tau&=t_{j,i-1}^\tau A-h_{j,i-\nu_{i_j}}^\tau,\ i=\nu_{i_j}+1,\cdots,\sigma_j,\end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

$$\text{记 } T=[t_{1,\nu_{i_1}},t_{1,\nu_{i_1}+1},\cdots,t_{1,\sigma_1},t_{2,\nu_{i_2}},\cdots,t_{t,\sigma_t}]^\tau, \tag{2.5}$$

$$\tilde{T}=[C^\tau,T^\tau,t_{1,1},t_{1,2},\cdots,t_{1,\nu_{i_1}-1},t_{2,1},\cdots,t_{t,\nu_{i_t}-1}]. \tag{2.6}$$

若 $\tilde{T}$ 满列秩则继续，否则调整 $\{\tilde{h}_{j,i}\}$ 或摄动 Λ_{σ_j}, $j\in\underline{t}$, 返步2,

步5：对 $\forall\lambda_j\in\Lambda_m$, 求解关于 f_j, ξ_j 的方程

$$\begin{bmatrix} A-\lambda_jI & B\\ T & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix} f_j\\ \xi_j\end{bmatrix}=0,\ j=n-m+1,\ \cdots,\ n \tag{2.7}$$

选那些使 $\{f_{n-m+1},\cdots,f_n\}$ 线性无关的解，且要求当 $\lambda_i=\overline{\lambda_j}$ 时有 $f_i=\overline{f_j}$, $\forall_i$, $j=n-m+1$, $\cdots$, n. 若不存在，则调整 $\{\tilde{h}_{j,i}\}$ 或摄动 Λ_{σ_j}, $j\in\underline{t}$, 返步2.

步6：计算：$K=[\xi_{n-m+1},\cdots,\xi_n][Cf_{n-m+1},\cdots,Cf_n]^{-1}$.

例2.2：仍用前面反例中的数据，取 $t=1$, $i_1=2$, $t_1=e_2$, $t_2=e_3$, $t_3^\tau=[5\quad -20\quad -6\quad 4\quad -10\quad -6]$，可得

$$K=\begin{bmatrix} -1.80 & -0.14 & 0.38\\ -1.40 & -0.82 & -0.06\\ 4.50 & 10.35 & 14.05\end{bmatrix}$$

这说明不同的 $\{\nu_{i_j}\}$ 子集结果亦不同。

例2.3：$\Sigma(A,\ B,\ C)$为

$$A=[2e_6\quad e_1\quad e_2\quad e_3\quad e_4\quad e_5\quad 0\quad e_7\quad 2e_{10}\quad e_9,\quad e_8\quad e_{11}\quad e_{14}\quad e_{13}\quad e_{16}\quad e_{15}\quad e_{17}\quad 2e_{18}\quad e_{19}],$$

$$B=[e_6\quad e_8\quad e_{10}\quad e_{12}\quad e_{14}\quad e_{16}\quad e_{17}\quad e_{18}\quad e_{19}],$$

$$C=\begin{Bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 & -2 & 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & -2 & -1 & -1 & -1 \\ 325.8 & 605.8 & 839.4 & 754 & 465.5 & 203.5 & 0 & -0.2 & 0.2 & 0 & 62.9 & 12.8 & 0 & 0.1 & 0.3 & -0.2 & 0.1 & -0.4 & 0 \\ -1 & 0.6 & -0.2 & -0.3 & -0.5 & -0.5 & 20 & 25.9 & 53.4 & 35.9 & -0.5 & -0.3 & -0.1 & 0.1 & 0.2 & -0.2 & 0 & 0.4 & -0.1 \end{Bmatrix},$$

其中，e_i表示I_{19}的第i列。$n=19$，$r=9$，$m=5$，$\mu=4$，$\nu_1=6$，$\nu_i=2$，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ 6$，$\nu_7=\nu_8=\nu_9=1$，$\max\{\nu_i,\ i\in\underline{9}\}=6>m$不满足（1.5），但取$t=2$，$i_1=1$，$i_2=3$时，满足定理1.1的全部条件，取$\Lambda_{19}=\Lambda_m\cup\Lambda_9^{(1)}\cup\Lambda_5^{(2)}=\{-1,\ -3,\ -4,\ -6,\ -7\}\cup\{-1\pm i,\ -1\pm 2i,\ -2\pm 2i,\ -2\pm i,\ -5\}\cup\{-2,\ -1\pm 3i,\ -3\pm i\}$，可求得一个解为

$$K=\begin{bmatrix} 0.727 & 0.126 & -0.109 & 0.159 & 0.017 \\ -54.896 & -1.938 & -7.805 & -4.178 & -0.279 \\ 45.538 & 1.258 & 7.398 & 3.315 & 0.185 \\ 3.700 & -0.446 & -0.153 & -2.020 & -0.019 \\ 94.362 & 6.595 & 10.366 & 13.844 & 0.849 \\ -3.299 & 2.850 & -5.265 & 3.746 & 0.482 \\ -114.773 & -16.620 & 5.694 & -25.781 & -2.750 \\ 221.837 & 28.254 & -20.113 & 27.546 & 4.287 \\ -152.141 & -14.853 & 6.307 & -11.280 & -2.185 \end{bmatrix}$$

从而说明定理1.1对以前结果的推广非空，有效。

致谢 真诚地感谢高为炳、程勉、涂序彦、苏志海等专家对作者的关怀培养，感谢霍伟老师的热情帮助。

参考文献

[1] Kimura, H., A Further Results on the Problem of Pole Assignment by Output Feedback, IEEE Trans. AC-22, (1977), 458-463.

〔2〕 Vardulakis, A. I. G., On the Structure of the Bases of All Passible Controllability Subspaces R of a Controllable Pair (A, B) in Cononical Form, Int. J. Control, 28, (1978), 393-409.

〔3〕 王大海，输出反馈任置极点的精确解与粗壮性，自动化学报（1989），待发表.

A New Result for Pole Assignment Using Output Feedback

Wang Dahai

(Institute of Automation, Hebei Academy of Sciences, Shijiazhuang)

Abstract

This paper says that arbitrary pole assignment is possible for almost all complete systems if $r-1 \geqslant n-m-\sum_{j=1}^{t} \nu_{i_j}+t \geqslant t\mu$. Here n, r, m is the number of states, of input, of output, respectively; $\{\nu_i,\ i \in \underline{r}\}$ is the kronecker indice set of (A, B), $\{\nu_{i_j},\ j \in \underline{t}\} \subset \{\nu_i,\ i \in \underline{r}\}$; μ is the observability index of (C, A); t is a natural number. This condition formula includes many results given before. For the case of $t=1$, Ki ura 1977 had some other condition and algorithm. About it we gave a counter example. This paper is the amendment and extension from Kimura 1977 result.