第7卷 第1期
1990年3月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.1
Mar., 1990

# 奇异摄动系统的实现问题*

许可康
(中国科学院系统科学研究所，北京)
王振全
(衡阳工学院工业管理工程系统，湖南)

**摘要** 本文讨论了两频率尺度传递函数(TFSTF)阵的实现问题.提出了TFSTF阵强既约实现的概念，并且把上述的实现问题化成为两个低阶系统的最小实现.

**关键词**: 奇异摄动系统;；两频率尺度传递函数；强既约实现.

## 1. 引　　言

线性控制系统的实现问题已是一个“古老”的问题，其理论和各种不同的具体方法都是很成熟，并且已收集在各类教科书中，其中的最小实现理论，揭示了系统的最本质的部分——系统的既能控又能观部分，因而同一传递函数阵的不同最小实现间必定是互相代数等价的.

文[1]给出了奇异摄动控制系统的频域模型.本文讨论其中一类——由[2,3]定义的两个频率尺度的传递函数(TFSTF)阵的实现问题.

例 1.1 考察

$$W(s.\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon s^2-(1+2\varepsilon)s+1},\quad 0<\varepsilon<<1 \tag{1.1}$$

的最小实现问题（这里的 $W(s,\ \varepsilon)$ 满足 [2,3] 中 TFSTF 阵中的定义）.

由一般理论可知，$W(s.\varepsilon)$ 的最小实现是一个二阶系统，而当 $\varepsilon=0$ 时它退化成一阶系统．所以这是一个含小参数 $\varepsilon$ 的奇异摄动系统．

由最小实现理论知，下列单输入单输出的时不变奇异摄动控制系统

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ -\frac{1}{\varepsilon} & 2+\frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\ \frac{1}{\varepsilon}\end{pmatrix}u,\\ y=(1\quad 0)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.\end{cases} \tag{1.2}$$

是由(1.1)式表示的 $W(s.\varepsilon)$的最小实现.它代数等价于

---

* 国家自然科学基金资助项目.

本文于 1988 年 7 月 21 日收到.

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\bar{x}} \\ \varepsilon\dot{\bar{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u, \\ y = (1 \quad 0) \begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{z} \end{pmatrix} \end{cases} \tag{1.3}$$

及

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\tilde{x}} \\ \varepsilon\dot{\tilde{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} u, \\ y = (0 \quad 1) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}. \end{cases} \tag{1.4}$$

虽然系统 (1.2) – (1.4) 都是既能控又能观的，但从奇异摄动控制系统的角度来说，系统 (1.3) 不是强能观的[4]；系统 (1.4) 不是强能控的．具体地来说，前者是边界层不能观；后者是边界层不能控．

[5]中指出了这样一个事实：对于奇异摄动控制系统，当它虽然是完全能控但不强能控时，一般的状态反馈不能任意配置系统的极点.对系统(1.4)来说，状态反馈控制律

$$u = (k_1 \quad k_2) \begin{pmatrix} \tilde{x} \\ \tilde{z} \end{pmatrix}$$

中，当 $k_i = O(1)$ $(i = 1,2)$ 时，闭环系统总有一个极点位于 $1/\varepsilon$ 附近．

对于奇异摄动控制系统来说，它的最本质的部分是既强能控又强能观的部分（下面称此为强既约部分）．

本文就来讨论 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$ 的强既约实现．下面一节我们给出一些必要的预备知识及强既约实现的确切定义；第 3 节给出本文的主要结果．

## 2. 预备知识

讨论线性时不变奇异摄动系统

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \varepsilon\dot{\mathbf{z}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{u}(\varepsilon) & A_{12}(\varepsilon) \\ A_{21}(\varepsilon) & A_{22}(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B_1(\varepsilon) \\ B_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = (C_1(\varepsilon) \quad C_2(\varepsilon)) \begin{pmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{z} \end{pmatrix} + D(\varepsilon)\,\mathbf{u}, \end{cases} \tag{2.1}$$

这里，$\varepsilon$ 为正的小参数（$0 < \varepsilon \langle\langle 1$），$\mathbf{x} \in R^n$，$\mathbf{z} \in R^m$，$\mathbf{u} \in R^r$，$\mathbf{y} \in R^p$，$\mathbf{A}_{ij}(\varepsilon)$、$B_i(\varepsilon)$、$C_i(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon = 0$ 处解析且 $A_{22}(0)$ 是非奇异阵．在该系统的全部 $(n+m)$ 个特征值中，有 $n$ 个“慢”特征值和 $m$ 个“快”特征值．由 [6] 知，系统 (2.1) 可分解成 $n$ 阶的慢子系统

$$\Sigma_s: \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_s = A_0\mathbf{x}_s + B_0\mathbf{u}_s, \\ \mathbf{y}_s = C_0\mathbf{x}_s + D_0\mathbf{u}_s \end{cases} \tag{2.2}$$

和 $m$ 阶的快子系统

$$\sum_f:\begin{cases}\dfrac{d}{d\tau}\mathbf{z}_f=A_{22}(0)\mathbf{z}_f+B_2(0)\mathbf{u}_f,\\ \mathbf{y}_f=C_2(0)\mathbf{z}_f+D(0)\mathbf{u}_f,\end{cases} \tag{2.3}$$

其中 $\tau=t/\varepsilon$ 是边界层内的快时间尺度,

$$A_0=A_{11}(0)-A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0),$$

$$B_0=B_1(0)-A_{12}(0)A_{22}^{-1}(0)B_2(0),$$

$$C_0=C_1(0)-C_2(0)A_{22}^{-1}(0)A_{21}(0),$$

$$D_0=D(0)-C_2(0)A_{22}^{-1}(0)B_2(0).$$

奇异摄动控制系统 (2.1) 被称为是强能控的，是指：它的慢子系统 $\sum_s$ 是完全能控的，且它的快子系统 $\sum_f$ 也是完全能控的．后者也称为系统 (2.1) 是边界层能控的．类似地，系统 (2.1) 被称为是强能观的，是指：它的慢子系统 $\sum_s$ 与快子系统 $\sum_f$ 均是完全能观的．同样，$\sum_f$ 的完全能观也称系统 (2.1) 是边界层能观的．而系统 (2.3) 也称为是原系统 (2.1) 的边界层系统．

**定义** 2.1 [2,3] 有理分式阵 $W(s,\ \varepsilon)$ 称为是 TFSTF 的，如果

i) $W(s,\varepsilon)$ 关于 $s$ 是正则的（指是 $s$ 的真或严格真有理分式阵），且关于 $s$ 的系数是 $\varepsilon$ 的实函数且在 $\varepsilon=0$ 处解析;

ii) $W(s,0)$ 是确定的且关于 $s$ 是正则的;

iii) $W\left(\dfrac{p}{\varepsilon},\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0}$ 是确定的且关于 $p$ 是正则的;

iv) $W(s,\varepsilon)$ 每个极点 $s(\varepsilon)$ 在 $\varepsilon=0$ 处的渐近展开为下列两形式之一:

a)
$$s_i(\varepsilon)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\varepsilon^{\frac{1}{q}})^k; \tag{2.4}$$

b)
$$s_j'(\varepsilon)=\frac{1}{\varepsilon}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(\varepsilon^{\frac{1}{q}})^k,\qquad b_0\neq 0, \tag{2.5}$$

这里，$q$ 是一个非负数，$\varepsilon^{\frac{1}{q}}$ 满足 $v^q=\varepsilon$.

显然，(1.1) 式的 $W(s.\varepsilon)$ 是 TFSTF 的．但是，要注意，不是每个线性时不变奇异摄动系统的传递函数阵都是 TFSTF 的（例如 [2] 中例 2.2 的 $W(s.\varepsilon)=\dfrac{(1+\varepsilon)s+2}{\varepsilon s^2-1}$）.

对系统(2.1)来说，经变换

$$\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}I & \varepsilon M\\ -L & I-\varepsilon LM\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix} \tag{2.6}$$

后，可变成

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \dot{\xi} \\ \varepsilon \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0(\varepsilon) & 0 \\ 0 & A_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_0(\varepsilon) \\ B_2(\varepsilon) \end{pmatrix} \mathbf{u}, \\ \mathbf{y} = (C_0(\varepsilon) \quad C_2(\varepsilon)) \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} + D(\varepsilon)\mathbf{u}, \end{cases} \tag{2.7}$$

其中 $A_0(\varepsilon) = A_{11}(\varepsilon) - A_{12}(\varepsilon)L(\varepsilon)$,

$A_2(\varepsilon) = A_{22}(\varepsilon) + \varepsilon L(\varepsilon)A_{12}(\varepsilon)$,

$B_0(\varepsilon) = B_1(\varepsilon) - M(\varepsilon)B_2(\varepsilon) - \varepsilon M(\varepsilon)L(\varepsilon)B_1(\varepsilon)$,

$B_2(\varepsilon) = B_2(\varepsilon) + \varepsilon L(\varepsilon)B_1(\varepsilon)$,

$C_0(\varepsilon) = C_1(\varepsilon) - C_2(\varepsilon)L(\varepsilon)$,

$C_2(\varepsilon) = C_2(\varepsilon) + \varepsilon C_1(\varepsilon)M(\varepsilon) - \varepsilon C_2(\varepsilon)L(\varepsilon)M(\varepsilon)$,

$L(\varepsilon)$、$M(\varepsilon)$ 满足

$$A_{22}(\varepsilon)L - A_{21}(\varepsilon) - \varepsilon LA_{11}(\varepsilon) + \varepsilon LA_{12}(\varepsilon)L = 0,$$

$$MA_{22}(\varepsilon) - A_{12}(\varepsilon) - \varepsilon A_{11}(\varepsilon)M + \varepsilon A_{12}(\varepsilon)LM + \varepsilon MLA_{12}(\varepsilon) = 0.$$

因此，系统 (2.1)（或 (2.7)）的传递函数阵为

$$\begin{aligned} W(s,\varepsilon) &= C_0(\varepsilon)(sI - A_0(\varepsilon))^{-1}B_0(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)(sI - A_2(\varepsilon)/\varepsilon)^{-1}B_2(\varepsilon)/\varepsilon + D(\varepsilon) \\ &= C_0(\varepsilon)(sI - A_0(\varepsilon))^{-1}B_0(\varepsilon) + C_2(\varepsilon)(\varepsilon sI - A_2(\varepsilon))^{-1}B_2(\varepsilon) + D(\varepsilon). \end{aligned}$$

显然，有

$$W(s,0) = C_0(sI - A_0)^{-1}B_0 + D_0, \tag{2.8}$$

它是原系统 (2.1) 的慢子系统 (2.2) 的传递函数阵；而

$$W\left(\frac{p}{\varepsilon},\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0} = C_2(0)(pI - A_{22}(0))^{-1}B_2(0) + D(0) \tag{2.9}$$

是快子系统 (2.3) 的传递函数阵．

记

$$\begin{aligned} &W_s(s) \triangleq W(s,0), \\ &W_f(p) \triangleq W\left(\frac{p}{\varepsilon},\varepsilon\right)\Big|_{\varepsilon=0}. \end{aligned} \tag{2.10}$$

由 [1,2] 知，有

$$\begin{aligned} &W_s(\infty) = W_f(0), \\ &W(s,\varepsilon) = W_s(s) + W_f(\varepsilon s) - W_f(0) + O(\varepsilon), \end{aligned} \tag{2.11}$$

这后一式子(即式(2.11))在所有(低或高)频段均成立.

在上述这些基础上，我们在本文中讨论的问题是按下述定义的强既约实现问题.

**定义** 2.2　对于给定的 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$，如果存在着一个以 $\varepsilon$ 为小参数的奇异摄动控制系统 $\sum_\varepsilon$：它是既强能控又强能观的，且它的传递函数阵为 $W_\varepsilon(s,\varepsilon)$，满足

$$W_\varepsilon(s,\varepsilon) = W(s,\ \varepsilon) + O(\varepsilon),$$

则称 $\sum_\varepsilon$ 为 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$ 的强既约实现．

## 3. 主要结果

实际上，由第 2 节的预备知识，我们就可以很容易地得到 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$的强既约实现.

首先，对给定的 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$，按(2.10)的第一式求得

$$W_s(s)=W(s,0).$$

由定义 2.1 的 ii) 知，$W_s(s)$ 关于 $s$ 是正则的，设

$$W_s(s)=G(s)+E. \tag{3.1}$$

即设 $G(s)$ 是 $W_s(s)$ 的严格真有理分式阵部分．则显然有

$$E=W_s(\infty).$$

对由上述过程得到的 $G(s)$，按线性控制系统的实现理论，求得 $G(s)$ 的最小实现 $\sum_1$

$$\sum_1:\ \begin{cases}\dot{\bar{z}}_1=F_0\bar{z}_1+M_0\mathbf{u}_1,\\ \mathbf{y}_1=H_0\bar{z}_1\end{cases} \tag{3.2}$$

其次，由 (2.10) 的第二式确定 $W_f(p)$，并求得 $W_f(p)$ 的最小实现 $\sum_2$

$$\sum_2:\ \begin{cases}\dfrac{d\mathring{\bar{z}}_2}{d\tau}=F_2\bar{\mathbf{z}}_2+M_2\mathbf{u}_2,\\ \mathbf{y}_2=H_2\bar{\mathbf{z}}_1+D_2\mathbf{u}_2.\end{cases} \tag{3.3}$$

由定义 2.1 的 iv) 知，TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$ 的极点有两类：一类由 (2.4) 式表示．这一类极点在 $\varepsilon=0$ 时的值即为 $F_0$ 的特征值；另一类由 (2.5) 式表示．这一类极点 $S_j(\varepsilon)$ 中的 $b_0$ 即为 $F_2$ 的特征值．由于这些 $b_0$ 均非零，因此 $W_f(p)$ 的最小实现中 $F_2$ 是个非奇异阵．

最后，我们合拼系统 (3.2) 与 (3.3)，得

$$\sum_\varepsilon:\ \begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{z}}_1\\ \varepsilon\dot{\mathbf{z}}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}F_0 & 0\\ 0 & F_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}M_0\\ M_2\end{pmatrix}\mathbf{u},\\ \mathbf{y}=(H_0\quad H_2)\begin{pmatrix}\mathbf{z}_1\\ \mathbf{z}_2\end{pmatrix}+D_2\mathbf{u}.\end{cases} \tag{3.4}$$

它即是 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$ 的强既约实现．

事实上，由于系统 (3.2) 与系统 (3.3) 是 $G(s)$ 与 $W_f(p)$ 的最小实现，所以 $(F_0,M_0,H_0)$ 与 $(F_2,M_2,H_2)$ 均是既能控又能观的完全对．因此，由上述两系统合并成的线性时不变奇异摄动系统 (3.4) 是既强能控又强能观的．

而由(3.1)式与(2.10)知，系统的传递函数阵$W_\varepsilon(s)$为

$$\begin{aligned}W_\varepsilon(s)&=G(s)+W_f(\varepsilon s)\\ &=W_s(s)-W_s(\infty)+W_f(\varepsilon s).\end{aligned}$$

由 (2.11) 式知

$$W_\varepsilon(s)=W(s,\varepsilon)+O(\varepsilon).$$

把上述过程可以写成如下定理的形式 .

**定理 3.1**　对给定的 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$，求出 $G(s)=W(s,0)-W(\infty,0)$ 与 $W_f(p)=W\left(\frac{p}{\varepsilon},\ \varepsilon\right)\big|_{\varepsilon=0}$ 的最小实现 (3.2) 与 (3.3)，并将它们按 (3.4) 形式合并成 $\sum_{\varepsilon}$. 则 $\sum_{\varepsilon}$ 即为 TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$ 的强既约实现 .

对于强既约实现，我们还有

**系 3.1**　TFSTF 阵的强既约实现的阶数不超过该阵的最小实现的阶数.

事实上，TFSTF 阵 $W(s,\varepsilon)$的强既约实现还可以由下述方法得到：a) 作 $W(s,\ \varepsilon)$的最小实现；b) 对该最小实现进行慢、快子系统分解；c) 分别保留该慢、快子系统的既能控又能观部分，且删去慢子系统的量测方程中的输入项；d) 将这两部分进行形如式(3.4)的合并，这时即可得到 $W(s,\varepsilon)$强既约实现.

**例 3.1**　例 1.1 中的 TFSTF　$W(s,\ \varepsilon)$的强既约实现为

$$\sum_{\varepsilon}:\ \begin{cases}\dot{x}=x-u,\\ y=x.\end{cases}$$

它即是系统 (1.3)( 或 (1.4)) 的慢子系统 . 它是一阶的（而 $W(s,\varepsilon)$ 的最小实现是二阶系统）. 它的传递函数为$\frac{-1}{s-1}$. 而

$$W(s,\varepsilon)=\frac{-1}{s-1}+O(\varepsilon).$$

**例 3.2**　求TFSTF阵

$$W(s,\varepsilon)=\begin{pmatrix}\dfrac{\varepsilon s-2}{(s-2)(\varepsilon s-1)} & \dfrac{1}{\varepsilon s-1}\\[2ex] \dfrac{\varepsilon s-2}{(s-1)(s-2)(\varepsilon s-1)} & \dfrac{s-2}{(s-1)(\varepsilon s-1)}\end{pmatrix}$$

的强既约实现 .

先求

$$W(s,0)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s-2} & -1\\[2ex] \dfrac{2}{(s-1)(s-2)} & -\dfrac{s-2}{s-1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s-2} & 0\\[2ex] \dfrac{2}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{1}{s-1}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

所以

$$G(s)=\begin{pmatrix}\dfrac{2}{s-2} & 0\\[2ex] \dfrac{2}{(s-1)(s-2)} & \dfrac{1}{s-1}\end{pmatrix}.$$

它的最小实现为

$$\sum_{1}:\ \begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_{11}\\ u_{12}\end{pmatrix},\\[2ex] \begin{pmatrix}y_{11}\\ y_{12}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{x}_1\\ \bar{x}_2\end{pmatrix}.\end{cases}$$

而

$$W_f(p)=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{1}{p-1}\\ 0 & \dfrac{1}{p-1}\end{pmatrix}.$$

它的最小实现为

$$\Sigma_2:\begin{cases}\dfrac{d\bar z}{d\tau}=\bar z+(0\quad 1)\begin{pmatrix}u_{21}\\ u_{22}\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}y_{21}\\ y_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\bar z.\end{cases}$$

于是，$W(s,\varepsilon)$ 的强既约实现为

$$\Sigma_\varepsilon:\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \dot x_2\\ \varepsilon\dot z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ z\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0\\0&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\ u_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ z\end{pmatrix}.\end{cases}$$

而 $W(s,\varepsilon)$ 的最小实现是四阶系统

$$\Sigma:\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot{\mathbf{x}}\\ \varepsilon\dot{\mathbf{z}}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0&-1&0\\1&1&0&-1\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}\mathbf{u},\\ \mathbf{y}=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathbf{x}\\ \mathbf{z}\end{pmatrix}.\end{cases}$$

它的慢子系统在去掉量测方程中的输入项后，即为 $\Sigma_1$，且 $\Sigma_1$ 是既能控又能观的；而它的快子系统的既能控又能观部分即为 $\Sigma_2$.

**例** 3.3 设

$$W(s,\varepsilon)=\frac{(1+\varepsilon)s+2}{\varepsilon s^2-1}.$$

由于 $W(s,0)=-(s+2)$ 及它的两个极点 $s_{1,2}(\varepsilon)=\pm\dfrac{1}{\sqrt{\varepsilon}}$. 它不满足定义 2.1 的 ii) 及 iv). 因此它不是 TFSTF 的 . 它不属于本文讨论的范围 . 事实上，它有一个最小实现

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\dot x_1\\ \varepsilon\dot x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}u,\\ y=(1\quad 1)\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}.\end{cases}$$

这里 $A_{22}=0$.

## 4. 结　论

本文讨论了具有两个频率尺度的传递函数(TFSTF)阵的实现问题.提出了这一类有理分式阵的强既约实现的定义（定义 2.2)，给出了具体的实现方法.与一般的最小实现相比较，TFSTF 阵的强既约实现有两特点：其一是强既约实现的阶数有可能比最小实现的阶数低.有时，一个 TFSTF 阵的强既约实现可以不是一个奇异摄动控制系统；其二是强既约实现的系统是既强能控又强能观的，在性能上比 TFSTF 阵的最小实现来得优越.它可以不用“高增益”这一特殊手段来配置闭环系统或观测器的全部极点.

当然，由定义 2.2 可知，TFSTF 阵的强既约实现的传递函数阵与原 TFSTF 阵间，有小参数 $\varepsilon$ 的一次量级的误差.

## 参 考 文 献


〔1〕 Kokotovic, P. V., H. K. Khalil & J. O'Reilly, Singular Perturbation Methods in Control: Analysis and Design, New York: Academic, (1986), 84–88.

〔2〕 Luse, D. W. & H. K. Khalil, Frequency Domain Results for Systems with Slow and Fast Dynamics, IEEE, **AC**, **30**, 12, (1985), 1171–1179.

〔3〕 Khalil, H. K., Output Feedback Control of Linear Two–time–scale Systems, IEEE, **AC–32**, 9, (1987), 784–792.

〔4〕 Chow, J. H., Preservation of Controllability in linear Time Invariant Perturbed Systems, Int. J. Control, **25**, 5, (1977), 679–704.

〔5〕 许可康，控制系统中的奇异摄动，科学出版社，北京，(1986)，32–34.

〔6〕 Chow, J. H. & P. V. Kokotovic, A Decomposition of Nearoptimum Regulators for Systems with Slow and Fast Modes, IEEE, **AC–21**, 5, (1976), 701–705.


# Realization Problem of Singularly Perturbed Systems


Xu Kekang

(Institute of Systems Science, Acamia Sinica, Beijing)

Wang Zhenquan

(Department of Industrial Management, Hengyang Institute of Technology, Hunan, Hengyang)



**Abstract:** In this paper we consider the realization problem of TFSTF matrix and introduce the concept of strong irreducible realization for TFSTF matrix. And the realization problem transformed in to the realization problems of two low order systems.



**Key words:** Singularly perturbed system; two–frequence–scale transfer function; strongly irreducible realization