第7卷 第2期
1990年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.2
June, 1990

线性离散事件动态系统的鲁棒性*

王 龙 郑大钟

(清华大学自动化系，北京)

摘要 应用极大代数，可对一类离散事件动态系统建立线性模型. 本文讨论这类系统的鲁棒性. 首先系统地讨论了系统中有一个参数发生摄动时对整个系统动态性能的影响，并对系统参数按照这种影响进行了分类. 对于系统中有多个参数同时发生增性摄动的情况，给出了不影响系统动态性能的各个参数的允许摄动范围，亦即鲁棒性条件，这个范围在一定意义下是最大允许的参数摄动范围.

关键词：离散事件动态系统；极大代数；鲁棒性

1. 引 言

在极大代数意义下，一类离散事件动态系统可被看作为线性系统，其周期行为转化为这种代数中矩阵特征量的求解问题[1—8]. 在这种分析方法中，系统在无故障区间内视为确定性的系统，从而便于系统的分析和实时控制. 考虑到实际系统中不可避免地存在着随机干扰，因此有必要研究参数摄动对系统性能的影响，以弥补这种方法的不足.

系统鲁棒性，直观上讲就是系统性能对其参数摄动的不敏感性. 离散事件动态系统与普通的连续变量动态系统相比较，其鲁棒性有本质区别. 在连续变量动态系统中，任何参数的微小摄动立刻会影响到整个系统的各个物理量. 而在离散事件动态系统中，情况就有很大的不同[1,2,6]. 文献〔6〕研究了参数摄动对系统动态性能的影响，给出了鲁棒性条件. 本文继续研究系统的鲁棒性，讨论系统中有一个参数发生摄动时对整个系统性能的影响，并按这种影响对系统参数进行了分类. 对于系统中有多个参数同时发生增性摄动的情形，给出了不影响系统动态性能的各参数的允许摄动范围，这个范围在一定意义下是最大的.

2. 一个参数发生摄动时的情形

本文沿用文献〔1—7〕的符号和运算. 从文献〔3，5〕可知，一类离散事件动态系统最终归结为极大代数意义下的递推方程

$$Y(k+1)=MY(k), \tag{1}$$

$$Y(0)=Y_0, \tag{2}$$

其中 $M\in\overline{\mathrm{R}}^{n\times n}$ 为极大代数意义下的不可约矩阵，运算在极大代数意义下进行. 在柔性制造系统中，矩阵 M 的特征值表征系统大批量生产时的稳态生产效率，因此通常将矩阵 M 的特征值作为系统的主要动态性能标志[3—4].

---

* 国家自然科学基金和高技术CIMS项目资助的课题.

本文于 1988 年 9 月 10 日收到. 1989 年 10 月 26 日收到修改稿.

定义 1 设 $M \in \overline{\mathrm{R}}^{n\times n}$，定义矩阵 $H, H_1, H_2, \cdots, H_n$ 为

$$(H_k)_{ij} = (M^k)_{ij} / k \qquad (i,j,k = 1,2,\cdots,n)$$

$$H = \bigoplus_{k=1}^{n} H_k$$

称$M \in \overline{\mathrm{R}}^{n\times n}$为矩阵$M$的特征矩阵.

定义 2 设 $M \in \overline{\mathrm{R}}^{n\times n}$ 中某一元素 m_{ij} 发生摄动，由 m_{ij} 变为$\tilde{m}_{ij}$，从而使矩阵 M 的特征值由 λ 变为$\tilde{\lambda}$，定义系统（1）、（2）的鲁棒性测度 RM 为

$$RM = (\lambda - \tilde{\lambda}) / (m_{ij} - \tilde{m}_{ij}).$$

定义 3 称 m_{ij} 在区间 V 中变化时有 $RM(m_{ij}) \equiv 0$，系指任取 a、$b \in V$，$a \neq b$，记 $\lambda_1 = \lambda$〔$M|m_{ij} = a$〕，$\lambda_2 = \lambda$〔$M|m_{ij} = b$〕，有 $\lambda_1 = \lambda_2$.

定义 4 参数在标称值以上（下）变化称作增（减）性摄动. 若某些元素在一定范围内发生摄动时，矩阵 M 的特征值保持不变，则称系统（1）、(2) 对于这些参数在上述范围内的摄动具有鲁棒性.

由文献〔3,5,6〕知，矩阵 M 在极大代数意义下的特征值等于其对应的有向图 $G(M)$中所有有向回路权重平均值的最大值. 某一元素的摄动对应于图 $G(M)$中某一有向弧权重的变化，因此，元素的增性摄动不可能使矩阵 M 的特征值变小，而且矩阵特征值的变化也不可能大于元素的摄动量，因此对于上述定义的鲁棒性测度 RM 有

$$0 \leqslant RM \leqslant 1.$$

定理 1 若某一元素m_{ij}发生摄动变为$\tilde{m}_{ij}$，矩阵 M 的特征值保持不变，则在区间 $(-\infty, m_{ij}]$ 中有 RM $(m_{ij}) \equiv 0$.

证 若元素 m_{ij} 发生的摄动为增性摄动，则说明元素 m_{ij} 所对应的有向弧不在关键回路中；若为减性摄动，则说明某一关键回路不包含 m_{ij} 所对应的有向弧，这样 m_{ij} 在区间 $(-\infty, m_{ij}]$ 内任意变化都不可能使非关键回路成为关键回路，也不能增大原来关键回路的权重平均值，得证.

定理 2 考虑 M 中有一元素发生增性摄动，则当且仅当该元素在区间〔m_{ij}, q_{ij}〕中发生摄动时，有 RM (m_{ij}) $\equiv 0$. 其中

$$q_{ij} = \begin{cases} \lambda & i = j \\ \min\limits_{1 \leqslant k \leqslant n-1} \left\{ (k+1)\lambda - (M^k)_{ji} \right\} & i \neq j \end{cases}$$

证 $i = j$时，m_{ij} 对应长度为 1 的有向回路，由特征值定义有 $m_{ij} \leqslant \lambda$. 当 $m_{ij} = \lambda$ 时，该回路是关键回路，因此 m_{ij} 的增性摄动将影响到矩阵 M 的特征值，当 $m_{ij} < \lambda$ 时，该回路不是关键回路，且 m_{ij} 在区间〔m_{ij}, λ) 变化时，该回路仍不能成为关键回路，因此 m_{ij} 的允许摄动区间是〔m_{ij}, λ〕.

$i \neq j$时，规定 m_{ij} 对应的有向弧为 $V_i \to V_j$，则 $(M^k)_{ji}$ 表示图 $G(M)$ 中顶点 V_j 到 V_i 的长度为 k 的所有有向路径中权重的最大值，因此

$$m_{ij}+(M^k)_{ji}\leqslant(k+1)\lambda\qquad(k\geqslant1)$$

即

$$m_{ij}\leqslant(k+1)\lambda-(M^k)_{ji}\qquad(k\geqslant1)$$

即q_{ij}是有意义的．m_{ij}在区间〔m_{ij}，q_{ij}〕中变化时，所有包含有向弧$V_i\to V_j$一次，长度不大于n有的向回路中，其权重平均值不大于λ．而所有长度大于n的有向回路均可分解为若干个长度不大于n简单的有向回路，得证．

定理 3　考虑M中有一元素发生减性摄动，记M_0为M中将m_{ij}以$-\infty$置换后的矩阵，H_0为M_0的特征矩阵，则当且仅当m_{ij}在区间（$-\infty$，q_{ij}）中发生摄动时，有$RM(m_{ij})\equiv0$．其中

$$q_{ij}=\begin{cases}\mathrm{tr}(H_0) & i=j\\ \min\limits_{1\leqslant k\leqslant n-1}\left\{(k+1)\mathrm{tr}(H_0)-(M^k)_{ji}\right\} & i\neq j\end{cases}$$

定理 4　设H是M的特征矩阵，$\tilde{H}$是M中某一元素m_{ij}作减性摄动后$\tilde{M}$的特征矩阵，若$\mathrm{tr}(H)\neq\mathrm{tr}(\tilde{H})$，则在区间〔$q_{ij}$，$m_{ij}$〕中，鲁棒性测度$RM$恒不为零．其中$q_{ij}$由定理3确定．

以上两定理证明思路与定理1、2思路类似，限于篇幅，在此从略．

定理2、3分别给出了保持系统动态性能的元素最大允许摄动区间，定理1、4则讨论了增减性摄动的相互关系，综合以上结论，可以得到系统参数按照其摄动对系统动态性能的影响的一般分类定理．

定理 5　矩阵M中的元素可分为三类：

第一类：作减性摄动和在一定范围（由定理2确定）内作增性摄动，其鲁棒性测度均恒为零．

第二类：作减性摄动鲁棒性测度恒为零，作增性摄动鲁棒性测度恒不为零．

第三类：作增性摄动和在一定范围（由定理3确定）内作减性摄动，其鲁棒性测度恒不为零．

上述三类元素的物理意义是：第一类对应的有向弧不在关键回路上；第二类对应的有向弧含于某一关键回路，但不含于所有关键回路；第三类对应的有向弧含于所有的关键回路之中．

3. 多个参数同时发生增性摄动的情形

定理 6　设λ为$M=[m_{ij}]\in\overline{\mathrm{R}}^{n\times n}$的特征值，$h=[h_i]\in\mathrm{R}^n$是其特征向量，命

$$q_{ij}=\lambda+h_i-h_j\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$$

则有

1) $q_{ij}\geqslant m_{ij}\qquad(i,j=1,2,\cdots,n)$;

2) $m_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$在区间〔m_{ij}，q_{ij}〕内同时发生增性摄动时，矩阵M的特征值将保持不变，即$RM(M)\equiv0$;

3) 当 $m_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 同时摄动达到 q_{ij} 时，任何一个元素继续增大将立即导致矩阵 M 特征值的增大．

证 1) 由$Mh=\lambda h$知

$$\max_{1\leqslant j\leqslant n}\{m_{ij}+h_j\}=\lambda+h_i$$

即有

$$m_{ij}+h_j\leqslant\lambda+h_i$$

此即$q_{ij}\geqslant m_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

2) 记 $Q=[q_{ij}]\in\mathbb{R}^{n\times n}$，不失一般性，考虑图 $G(Q)$ 中的回路 $V_1\to V_2\to V_3\to\cdots\to V_r\to V_1$，其权重平均值为

$$\frac{1}{r}\{(\lambda+h_1-h_2)+(\lambda+h_2-h_3)+\cdots+(\lambda+h_{r-1}-h_r)$$
$$+(\lambda+h_r-h_1)\}=\frac{1}{r}\cdot r\lambda=\lambda.$$

这说明图 $G(Q)$ 中的任何有向回路的权重平均值均为 λ，因此 $\lambda[Q]=\lambda[M]$．根据特征值的图论意义[3-5]，若 M 在规定区间内摄动，则摄动后的矩阵特征值$\tilde{\lambda}$满足

$$\lambda[M]\leqslant\tilde{\lambda}\leqslant\lambda[Q],$$

即 $\tilde{\lambda}=\lambda[M]=\lambda$，$RM(M)\equiv0$.

3) 图 $G(Q)$ 中的任一有向回路的权重平均值均为 λ，说明所有回路均为关键回路，因此任一元素继续增大将导致矩阵特征值增大．

推论 若元素 m_{12}，m_{23}，$\cdots$，$m_{n-1,n}$，m_{n1} 所对应的有向回路为图 $G(M)$ 的关键回路，记 $\beta_1=0$，$\beta_i=m_{12}+m_{23}+\cdots+m_{i-1,i}$ $(2\leqslant i\leqslant n)$，则定理 6 中的 q_{ij} 可由下式确定

$$q_{ij}=(i-j+1)\lambda-\beta_i+\beta_j\qquad(i,j=1,2,\cdots,n).$$

证 记 $h_i=(i-1)\lambda-\beta_i$，则易知向量 $h=[h_i]$ 是矩阵 M 的一个特征向量，因此

$$q_{ij}=\lambda-h_i+h_j=(i-j+1)\lambda-\beta_i+\beta_j.$$

命题得证.

4. 结　语

本文讨论了离散事件动态系统的鲁棒性问题. 结果表明，这类系统的性能对于其某些参数在一定范围内变化具有一定的抵御能力. 本文讨论的关于系统中有一个或多个参数发生摄动时，保证系统性能的参数最大允许摄动范围，即鲁棒性条件，对这类系统的分析和控制是有实际意义的.

参 考 文 献

〔1〕 Levis, A. et al, Challenges to Control—A Collective View, IEEE Trans.on Automatic Control, AC–32, 4, (1987), 274—285.

〔2〕 Ho, Y. C. et al, A New Approach to the Analysis of Discrete Event Dynamic Systrms, Automatica, 19, 2, (1983), 149—167.

〔3〕 Cohen, G. et al, A Linear System Theoretic View of Discrete Event Processes, Proc. of 22 nd Conf. on Decision and Control, (1983), 1039—1044.

〔4〕 Cohen, G. et al, Linear System Theory for Discrete Event Systems, Proc. of 23 rd Conf. on Decision and Control, (1984), 539—544.

〔5〕 Cuninghame Green, R. A., Describing Industrial Processes and Approximating Their Steady–state Behaviour, Operational Research Quarterly, 13, 1, (1962), 95—100.

〔6〕 郑大钟、王龙，参数摄动时一类离散事件动态系统的渐近性能估计和鲁棒性条件，控制理论与应用，6，3，(1989)，47—55.

〔7〕 王龙、郑大钟，线性离散事件动态系统的代数性质，全国控制理论及其应用年会论文集，(1988)，253—258.

〔8〕 王龙、郑大钟，一类柔性制造系统的运行特性，信息与控制，5，(1988)，1—5.

On the Robustness of Linear Discrete Event Dynamic Systems

Wang Long, Zheng Dazhong

(Department of Automation, Tsinghua University, Beijing)

Abstract: This paper discusses the robustness of discrete event dynamic systems described by recursive equations over Max–algebra .The performance variation of such system when a parameter varies is investigated .The system parameters are then classified into three categories according to their effects to the system performance.We also give the maximal allowable intervals of parameter variations in various cases in which the performance is guaranteed.

Key words: discrete event dynamic systems; max–algebra; reobustness