

具有指定闭环极点的次最优控制系统设计

喻铁军 戴冠中

(西北工业大学计算机系, 西安)

摘要 本文利用多变量系统极点配置的结果, 提出了一种具有指定闭环极点, 并使二次型指标达到极小的次最优控制系统的设计方法. 这种设计方法与标准线性二次型调节器 (LQR 设计方法的不同点, 就在于设计中引入了闭环极点约束, 使闭环系统能具有希望的动态特性. 本文还给出了在计算机上易于实现的设计算法和计算过程, 以及设计实例.

关键词: LQ 最优控制; 多变量系统; 极点配置; 优化算法

1. 引言

众所周知, 由于 LQ 闭环系统具有许多希望的鲁棒特性, 如无穷增益裕量、至少 ± 60 度的相位裕量⁽¹⁾、有界超调⁽²⁾以及非线性容忍⁽³⁾等, LQ 设计技术已在实际过程控制中得到了广泛地应用.

在 LQR 设计中, 设计者遇到的一个最大困难, 就是怎样选择加权阵 Q 和 R , 使得由此设计的闭环系统具有希望的动态特性. 目前, 尽管对这个问题已提出了许多解决方法⁽⁴⁾, 但这些方法都有各自的局限性, 上述困难还没有得到很好地解决.

大家知道, 一个线性系统的动态特性主要是受系统极点位置的影响, 极点位置适当的系统可以获得良好的动态特性, 而极点配置设计方法可以使闭环系统具有任意指定的极点. 于是, 可以预料利用极点配置结果, 在一定程度上能解决我们在 LQR 设计中遇到的困难. 本文就是将极点配置设计方法和 LQR 设计方法结合起来, 提出了一种利用极点配置中的自由度来优化 LQR 设计中的二次型指标, 从而设计具有指定闭环极点的次最优控制系统的设计方法.

2. 问题描述

考虑线性、定常可控系统

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU, \\ Y = CX, \end{cases} \quad (1)$$

其中 A 、 B 、 C 分别为 $n \times n$ 、 $n \times m$ 、 $l \times n$ 维常数阵. 于是, 我们的设计问题可描述为: 确定线性控制律 $U = -KX$, 使得闭环系统

$$\dot{X} = (A - BK)X \quad (2)$$

具有指定的极点 $S = \{S_1, S_2, \dots, S_n\}$, 并使二次型指标

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (X^T Q X + U^T R U) dt \quad (3)$$

达到极小, 其中 $Q = Q^T \geq 0$, $R = R^T > 0$.

符合上述条件的控制律, 我们称为次最优控制, 由此组成的控制系统称为次最优控制系统. 显然, 上面次最优的定义是针对 LQ 最优而言; 如果针对极点配置, 上控制律也可称为是最优的.

对于对象模型 (1) 和指定的极点 s_j , Owens 和 O'reilly(1987)给出了具有完全自由度的参数反馈控制律

$$K(F) = -FV^{-1}(F), \quad (4)$$

其中 $F = [f_1, f_2, \dots, f_n]$ 为参数阵, 在保证 K 为实数阵的情况下可任意选取; $V = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ 满足方程

$$v_j = (s_j I - A)^{-1} B f_j. \quad (5)$$

利用 (4) 和 (5) 式, 闭环系统 (2) 可以写为

$$\dot{X} = V \text{diag} [s_j] V^{-1} X. \quad (6)$$

如设系统的初始值为 $X(0) = X_0$, 则闭环系统的解为

$$X(t) = V \text{diag} [e^{s_j t}] V^{-1} X_0. \quad (7)$$

将 (7) 和 (4) 式代入 (3) 式, 可得

$$J = \frac{1}{2} X_0^T \int_0^{\infty} V^{-T} \text{diag} [e^{s_j t}] V^T [Q + V^{-T} F^T R F V^{-1}] \\ \cdot V \text{diag} [e^{s_j t}] V^{-1} dt X_0. \quad (8)$$

显然, 由上式定义的 J 将是 F 和 X_0 的函数. 于是, 使 J 达到极小的 F 也将依赖于初始条件 X_0 , 这在实际应用中将是非常困难的. 根据文献 [6] 中的分析, 为了消除 F 与 X_0 的依赖关系, 我们可设 X_0 为在 n 维单位球面上均匀分布的随机变量, 即 $E\{X_0 X_0^T\} = I$. 于是, 可得由 (8) 式确定的指标 J 的均值为

$$\bar{J} = \frac{1}{2} \text{tr} [V^{-T} W V^{-1}], \quad (9)$$

其中 $W \triangleq \int_0^{\infty} \text{diag} [e^{s_j t}] [V^T Q V + F^T R F] \text{diag} [e^{s_j t}] dt$, 即为 Lyapunov 方程的对称正半定解

$$W \text{diag} [s_j] + \text{diag} [s_j] W + V^T Q V + F^T R F = 0. \quad (10)$$

综上所述, 我们的优化问题为: 寻找参数阵 F , 使性能指标 (9) 在约束条件 (5) 和 (10) 下达到极小.

3. 主要结果

本文的主要结果可总结为如下定理.

定理 设 F^* 为 $m \times n$ 维矩阵, 则 F^* 为最优 (针对第 2 节中定义的优化问题) 的必要条件为

$$F^* = -(L^{-1}ER^{-1})^T, \quad (11)$$

其中

$$L = \int_0^\infty \text{diag}[e^{s_j t}] V^{-1} V^{-T} \text{diag}[e^{s_j t}] dt, \quad (12)$$

$$D = [d_1, d_2, \dots, d_n]^T = LV^T Q - V^{-1} V^{-T} W V^{-1}, \quad (13)$$

$$E = \begin{bmatrix} d_1^T (s_1 I - A)^{-1} B \\ d_2^T (s_2 I - A)^{-1} B \\ \vdots \\ d_n^T (s_n I - A)^{-1} B \end{bmatrix}, \quad (14)$$

W 满足 Lyapunov 方程 (11) 式. 另外, 由 (12) 式定义的 L , 将为 Lyapunov 方程的对称正定解

$$L \text{diag}[s_j] + \text{diag}[s_j] L + V^{-1} V^{-T} = 0. \quad (15)$$

证 由极值理论知, F^* 为最优的必要条件为

$$d\bar{J}/dF^* = 0. \quad (16)$$

于是, 本定理证明的关键在于梯度矩阵 dJ/dF 的推导. dJ/dF 的推导有多种方法, 本文采用摄动法来进行推导.

对 (9) 式进行摄动, 可得

$$\delta\bar{J} = \frac{1}{2} \text{tr}\{V^{-1} V^{-T} \delta W + 2V^{-T} W \delta V^{-1}\}. \quad (17)$$

又由 W 的定义可得

$$\delta W = \int_0^\infty \text{diag}[e^{s_j t}] [\delta V^T Q V + V^T Q \delta V^T + \delta F^T R F + F^T R \delta F] \text{diag}[e^{s_j t}] dt. \quad (18)$$

同样对等式 $V^{-1} V = I$ 进行摄动, 并整理可得

$$\delta V^{-1} = -V^{-1} \delta V V^{-1}. \quad (19)$$

于是, 将 (18) 和 (19) 式代入 (17) 式, 并利用 (12) 和 (13) 式整理可得

$$\delta\bar{J} = \text{tr}\{D \delta V + L F^T R \delta F\}. \quad (20)$$

又对 (5) 式进行摄动, 可得

$$\delta v_j = (s_j I - A)^{-1} B \delta f_j. \quad (21)$$

于是, 利用 (14) 和 (21) 式可得

$$\begin{aligned} \text{tr}\{D \delta V\} &= \sum_{j=1}^n d_j^T \delta v_j \\ &= \sum_{j=1}^n d_j^T (s_j I - A)^{-1} B \delta f_j \\ &= \text{tr}\{E \delta F\}. \end{aligned} \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (20) 式, 可得

$$\delta \bar{J} = \text{tr}\{(E + LF^T R)\delta F\}. \quad (23)$$

从而, 由Kleiman^[7]的结果可得

$$d\bar{J}/dF = (E + LF^T R)^T. \quad (24)$$

于是, 由极值的必要条件(16)式, 即可得定理中的(11)式, 从而定理得证.

关于上述定理, 我们给出如下说明.

注1 定理给出的仅是必要条件, 即由定理确定的 F^* 并不一定是第二节定义的优化问题的最优解.

注2 F^* 是方程(11)、(13)、(14)、(15)和(16)式的联立解, 通过这些方程直接求解 F^* 将是非常困难的, 下节我们将给出一种在计算机上容易求解的计算方法.

注3 由于单输入系统的反馈阵将由指定的极点唯一确定, 即单输入系统无自由度来进行优化, 所以本定理的结果仅对多输入系统情况才有意义.

4. F^* 的计算

由定理的结果直接求解 F^* 是相当困难的, 本节我们讨论用共轭梯度优化算法求解 F^* 的计算方法和步骤.

由第2节的描述可以看出, 我们的设计问题是一个具有等式约束的标准非线性极值问题, 它的求解可采用多种计算方法^[8], 本文仅给出共轭梯度求解的计算过程.

指标函数 $\bar{J}(F)$ 的极小化问题, 同一般函数的极值问题一样, 可以化作一系列一维寻优问题来解决. 即从某 F_i 出发, 按某种规则所确定的寻优方向 Z_i , 求 $\bar{J}(F)$ 在这个方向上的极小点 F_{i+1} , 即就是求 H_i^* 使

$$\bar{J}(F_i + H_i^* Z_i) = \min_{H_i} \bar{J}(F_i + H_i Z_i), \quad H_i \in (0, \infty).$$

经过 N 步后, 使 F_N 在一定精度要求下达到

$$\bar{J}(F_N) \approx \min_F \bar{J}F.$$

由于 $\bar{J}(F)$ 是一个二次型函数, 在我们的算法中将采用适合于二次型函数的共轭梯度法——Beale 算法来确定寻优方向 Z_i , 以及 Armijo 法则来确定寻优步长 H_i^* .

4.1 寻优步长 H_i 的确定

当给定寻优方向 Z_i 后, 需要在这个方向进行一维寻优. 利用文献[9]的结果, 可得将 Armijo 法则用到我们设计中的具体寻优计算过程为

a) $h = 1.2$, $g = 0.6$, $H_i = 1$, Z_i 给定;

b) 作 $J_z(F_i, H_i) = \bar{J}(F_i) + 0.5 H_i \sum_{l,k} [d\bar{J}/dF_l]_{l,k} [Z_i]_{l,k}$;

c) 计算 $F_{i+1}^* = F_i + H_i Z_i$;

d) 由 (5) 和 (10) 式计算 $\bar{J}(F_i^*)$, 以及由 (15)、(13)、(14) 和 (24) 式计算 $J_z(F_i, H_i)$, 并比较;

e) 若 $\bar{J}(F_i^*) - J_z(F_i, H_i) < 0$, 则 $H_i = H_i h$, 回到 c); 否则, $H_i = H_i g$, 继续进行;

f) 重复 c)、d) 过程;

g) 若 $\bar{J}(F_i^*) - J_z(F_i, H_i) > 0$, 则 $H_i = H_i g$, 回到 f); 否则, 步长寻优结束, 此时 $H_i^* = H_i$, $F_{i+1} = F_i^*$.

4.2 寻优方向 Z_i 的确定

寻优方向的确定是共轭梯度法中的一个关键问题, 将直接关系到算法的收敛速度. 在本文中我们将采用 Beale 算法来确定寻优方向, 将文献 [8] 给出的计算公式推广到矩阵形式有

$$\begin{cases} Z_{i+1} = -D_{i+1} + a_i Z_i \\ Z_i = -D_i + b_{i-1} Z_i + a_{i-1} Z_{i-1} \end{cases} \quad i > i+1,$$

其中

$$D_i = dJ / dF_i,$$

$$a_{i-1} = \frac{\sum_{l,k} [D_i]_{lk} [D_i - D_{i-1}]_{lk}}{\sum_{l,k} [Z_{i-1}]_{lk} [D_i - D_{i-1}]_{lk}}$$

$$b_{i-1} = \frac{\sum_{l,k} [D_i]_{lk} [D_i - D_{i-1}]_{lk}}{\sum_{l,k} [Z_i]_{lk} [D_i - D_{i-1}]_{lk}}.$$

当不等式

$$\frac{\sum_{l,k} [D_i]_{lk} [D_{i-1}]_{lk}}{\|D_i\|_F \|D_{i-1}\|_F} > 0.2,$$

或

$$-1.2 \leq \frac{\sum_{l,k} [Z_i]_{lk} [D_i]_{lk}}{\|D_i\|_F^2} \leq -0.8$$

成立时, 寻优方向需要重置, 此时只要置 $b_{i-1} = 0$, $t = i - 1$ 就可以了.

4.3 F^* 的计算

采用前面给出的 Armijo 法则和 Beale 算法, 可得采用共轭梯度法求解 F^* 的计算过程为

a) 给定 $\varepsilon > 0$, $i = 0$, F_0 ;

b) 利用公式 (5)、(10)、(12)、(13)、(14)、(15) 和 (24) 式计算 $\bar{J}(F_i)$ 和 D_i ;

c) 若 $\|D_i\|_F < \varepsilon$ 或 $|J(F_i) - J(F_{i-1})| < \varepsilon$, 则停止计算, 此时 $F^* = F_i$, $K = -F_i V_i^{-1}$ 将为次最优控制反馈阵; 否则, 由 Beale 算法确定寻优方向 Z_i ;

d) 由 Armijo 法则在 Z_i 方向一维寻优, 可得下一步迭代值 F_{i+1} ;

e) $i = i + 1$, 转回到 b)。

上面给出了具有指定闭环极点的次最优控制系统的设计算法, 关于该算法我们作如下说明。

注 1 算法中 F 的初始计算值 F_0 的选取, 应保证反馈阵 K 为实数阵。为了达到这一点, F_0 应作如下选取。当 s_j 为实特征值时, $f_j^{(0)}$ 选为实向量; 当 s_i 和 s_j 为共轭复特征值时, $f_i^{(0)}$ 和 $f_j^{(0)}$ 应选为共轭复向量。

注 2 由于共轭梯度法是二阶收敛的, 在一定的精度要求下, 选取适当的初始条件和步长, 上面给出的设计算法将总是收敛和稳定的。

5. 实例计算

设系统的状态方程为

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} U, \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X, \end{cases}$$

选取二次型指标 (3) 中的加权阵分别为单位阵, 则 LQR 问题的解为

$$K = \begin{bmatrix} 2.2293 & -1.8265 \\ -1.8265 & 4.7352 \end{bmatrix}, \quad A_{c1} = A - BK = \begin{bmatrix} -2.2293 & 2.8265 \\ -0.1735 & -1.7352 \end{bmatrix},$$

其指标值为 $J_1 = 3.4832$, LQ 闭环系统的极点为 $(-1.9823 \pm j 0.6553)$ 。现在, 为了验证本文提出的算法的有效性, 我们选 LQ 闭环极点 $(-1.9832 \pm j 0.6553)$ 即为希望的闭环系统极点, 则采用第 2 节提到的参数化极点配置方法, 可得如下结果:

$$F_0 = \begin{bmatrix} -1+j & -1-j \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 6.9646 & -11.6264 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$A_{c2} = \begin{bmatrix} -6.9646 & 12.6264 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}.$$

同样, 针对希望的闭环极点, 采用第 4 节提出的算法进行优化设计, 选 F_0 作为优化的初始迭代值, 可得如下结果:

$$F = \begin{bmatrix} -34.2391 - j 76.2505 & -34.2391 + j 76.2505 \\ 44.6582 - j 86.4104 & 44.6582 + j 86.4104 \end{bmatrix}.$$

$$K = \begin{bmatrix} 2.8073 & -0.1256 \\ -1.0139 & 4.1573 \end{bmatrix}, A_{c2} = \begin{bmatrix} -2.8073 & 1.1256 \\ -0.9861 & -1.1573 \end{bmatrix}$$

其指标的平均值为 $J_2 = 3.4883$, 显然该指标已非常接近于其最小值 J_1 . 另外, 不难验证 A_{c2} 和 A_{c3} 确实具有希望的极点.

对上面得到的闭环系统, 我们进行了仿真计算, 得到了图 1 至图 4 的仿真曲线, 从仿真结果可清楚地看出, 闭环系统 1 和闭环系统 3 的动态性能优于闭环系统 2.

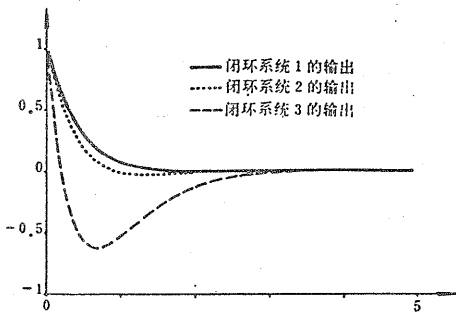


图 1 第一个输入为脉冲时闭环系统的第一个输出

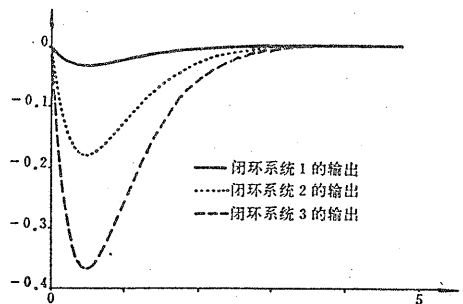


图 2 第一个输入为脉冲时闭环系统的第二个输出

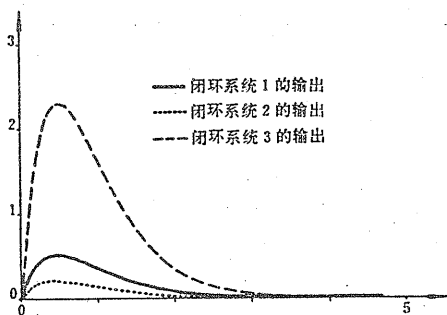


图 3 第二个输入为脉冲时闭环系统的第一个输出

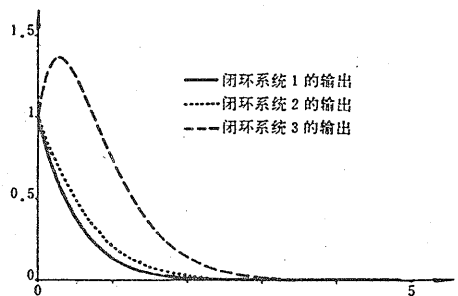


图 4 第二个输入为脉冲时闭环系统的第二个输出

6. 结 论

本文提出了一种利用多变量系统极点配置的自由度, 来优化二次型性能指标, 从而设计次最优控制系统的设计方法, 推导了次最优控制系统的必要条件, 并给出了在计算机上易于实现的计算方法. 这种设计方法优于 LQR 设计方法之处在于能使控制系统具有任意希望的闭环极点, 而优于极点配置设计方法之处在于充分利用了设计自由度, 从而获得良好动态性能 (接近于 LQ 闭环系统的动态性能) 的闭环系统.

参 考 文 献

- (1) Sofonov, M. G. and Athans, M., Gain and Phase Margin for Multiloop LQG Regulators, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-22, 2, (1977), 173—179.
- (2) Kobayashi, H. and Shimemura, E., Some Properties of Optimal Regulators and Their Applications, Int. J. Control, 33, 6, (1981), 587—599.
- (3) Joshi, S. M., Stability of Multiloop LQ Regulators with Nonlinearities, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-31, 4, (1986), 364—370.
- (4) Juang, J. C. and Lee, T. T., On Optimal Pole Assignment in a Specified Region, Int. J. Control, 40, 1, (1984), 65—79.
- (5) Owens, T. J. and O'Reilly, J., Parametric State-Feedback Control with Response Insensitivity, Int. J. Control, 45, 3, (1987), 791—809.
- (6) Levine, W. S. and Athans, M., On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-15, 1, (1970), 44—48.
- (7) Kleiman, D. L., Fortmann, T. and Athans, M., On the Design of Linear Systems with Piecewise-Constant Feedback Gains, IEEE Trans. Automat. Contr., AC-13, 4, (1968), 345—361.
- (8) 叶庆凯、王肇明, 优化与最优控制中的计算方法, 科学出版社, 北京, (1986) .
- (9) 毛剑琴, 线性多变量系统最优定常输出反馈设计的一种算法, 控制理论与应用, 1, 1, (1984), 68—78.

Design of the Sub-optimal Control Systems with the Specified Closed-loop Poles

Yu Tiejun, Dai Guanzhong

(Department of Computer Science & Engineering, Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract: Using the results of the multivariable system pole assignment, we propose a method for designing sub-optimal control systems with the specified closed-loop poles by minimizing the linear quadratic performance index in this paper. The difference between this method and the standard linear quadratic regulator design method is that the closed-loop poles assignment is considered in this design method so that the closed-loop system will have the desirable dynamical properties along with the minimal performance index. The algorithm and the computation steps implemented on computer easily are presented in this paper. The validity of the design algorithm is verified by an example.

Key words: LQ optimal control; multivariable system; pole assignment; optimizing algorithm