

传递函数与脉冲传递函数的直接换算方法

朱维彰

(西安工业学院电子系)

摘要 在极点互异的条件下, 本文导出了传递函数与脉冲传递函数参数换算的解析表达式. 对不同的保持器, 它们具有统一的数学形式和算法. 对于重极点, 本文给出一种有效的摄动方法, 使其可用互异极点代替. 作为应用例子, 本文证明了应用 Tustin 算子的条件.

关键词: 系统仿真; 采样系统; 传递函数; 脉冲传递函数

引言

设系统的传递函数为

$$G(s) = \frac{b_1 s^{n-1} + b_2 s^{n-2} + \dots + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \triangleq \frac{N(s)}{D(s)}, \quad a_0 = 1 \quad (0.1)$$

如图 1, 输入 $u(t)$ 经调制器后变为 $u^*(t)$, 调制器由理想采样器和保持器组成. 现寻求一个脉冲传递函数 $H(z)$, 使得对于给定的采样间隔 T , $\{u(kT), Y(kT), k=0, 1, \dots, u(kT)=0, Y(kT)=0, k<0\}$ 满足 $H(z)$. 上述问题是线性单变量系统数字仿真、采样系统分析和综合的基本问题.

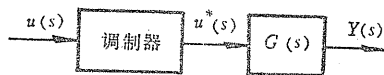


图 1 输入信号的调制

已知 $G(s)$ 求 $H(z)$ 的传统方法很多, 主要可归纳为三类^[1,2]:

(1) 典型环节法: 典型环节的 L 变换与 Z 变换表是这类方法的基础. 其主要缺点在于对 $G(s)$ 需进行分解, 对不同环节、不同调制器没有统一的参数变换表达式.

(2) 状态空间法: 这类方法尽管有形式统一的数学表达式, 但相应带来矩阵指数及其积分的简便和精确计算问题.

(3) 算子代替与各种近似算法. 这类方法一般都是 T 充分小时的近似算法. 其中 Tustin 法应用比较广泛.

无论方法 (1) 还是 (2), 当系统含有重极点时, 其计算比互异极点情况要复杂得多.

已知 $H(z)$ 求 $G(s)$, 是由采样数据辨识连续系统时所需要的. 目前尚未见普遍可用的方法.

为方便本文采用以下规定及符号:

1) 省略采样器一词, 仅以保持器说明调制器.

2) 称无保持器、零阶保持器为一类调制器; 称一阶保持器、三角形保持器、延迟一步三角形保持器为二类调制器.

$$\begin{aligned}
 3) \quad v_i(x) &= \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j), \\
 J(x) &= \prod_{l=1, m=1, l < m}^n (x_l - x_m), \\
 J_i(x) &= (-1)^{i+1} \prod_{l=1, m=1, l < m, l \neq i, m \neq i}^n (x_l - x_m).
 \end{aligned}$$

显然, $v_i^{-1}(x) = J_i(x) / J(x)$.

$$\begin{aligned}
 4) \quad [x_i]_m &\text{表示diag} [x_1, x_2, \dots, x_n]; \\
 [x_i]_v &\text{表示向量} [x_1, x_2, \dots, x_n]^T; \\
 \overline{k+h} &\text{表示}(k+h).
 \end{aligned}$$

1. 一类调制器下的换算公式

设 $D(s) = 0$ 的根 p_i , $i = 1, \dots, n$, 互异, 则 (0.1) 有如下状态空间表达式

$$\begin{cases} X(k+1T) = [e^{Tp_i}]_m X(kT) + L, \\ Y(kT) = [c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n] X(kT), \end{cases} \quad (1.1)$$

其中

$$L = \int_0^T [e^{p_i(T-\tau)}]_m [1]_v u^*(kT + \tau) d\tau,$$

$$c_i = N(p_i) v_i(p)^{-1} = N(p_i) J_i(p) / J(p). \quad (1.2)$$

对于一类调制器, L 仅与某采样时刻输入值有关, 故可设

$$L = [w_i]_v u(\overline{k+hT}). \quad (1.3)$$

(w_i 的表达式及 h 的取值见第4节)

由 (1.1)、(1.3) 可知, 相应于一类调制器的 $H(z)$ 有如下形式:

$$H(z) = \frac{z^h (\beta_1 z^{n-1} + \beta_2 z^{n-2} + \dots + \beta_n)}{\alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n} = \frac{z^h B(z)}{A(z)}, \quad \alpha_0 = 1. \quad (1.4)$$

设 $A(z) = 0$ 的根 λ_i , $i = 1, \dots, n$, 互异, 则 (1.4) 的状态空间表达式为

$$\begin{cases} X_{k+1} = [\lambda_i]_m X_k + [d_i]_v u_{k+h}, \\ Y_k = [m_1 \quad m_2 \quad \dots \quad m_n] X_k \end{cases}, \quad (1.5)$$

其中

$$d_i m_i = B(\lambda_i) v_i(\lambda)^{-1} = B(\lambda_i) J_i(\lambda) / J(\lambda). \quad (1.6)$$

将 (1.6) 与 (1.1)、(1.3) 比较可得, 当 $X(-T) = X_{-1} = 0$, $u(\overline{k+hT}) = u_{k+h}$ 时, 如果

$$\lambda_i = e^{Tp_i}, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.7)$$

$$d_i = w_i, \quad m_i = c_i, \quad i = 1, \dots, n, \quad (1.8)$$

则有 $Y(kT) = Y_k$, $k = 0, 1, \dots$, 故 $\{Y(kT), u(kT)\}$ 满足 (1.4).

由(1.6)、(1.8)、(1.2)得

$$B(\lambda_i) = v_i(\lambda)N(p_i)w_i J_i(p) / J(p), \quad (1.9)$$

$$N(p_i) = v_i(p)B(\lambda_i)w_i^{-1} J_i(\lambda) / J(\lambda). \quad (1.10)$$

由(1.7)知, 当 p_i 互异时, λ_i 一般也互异(附录1). 反之, λ_i 互异, 则 p_i 一定互异. 取 $i = 1, \dots, n$, 由(1.9)、(1.10)可分别构成关于 $B(z)$ 、 $N(s)$ 系数的两个线性方程组. 利用范德蒙矩阵逆的表达式(见[3]附录), 可分别解得

$$\beta_i = \sum_{t=0}^{i-1} \alpha_t \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l^{i-t-1} N(p_l) w_l J_l(p) \right) / J(p), \quad (1.11)$$

$$b_i = \sum_{t=0}^{i-1} a_t \left(\sum_{l=1}^n P_l^{i-t-1} B(\lambda_l) w_l^{-1} J_l(\lambda) \right) / J(\lambda), \quad (1.12)$$

$i = 1, \dots, n.$

(1.11)、(1.12)具有完全相同的数学形式. 下面仅举由 $G(s)$ 求 $H(z)$ 的计算步骤:

(I) 求 $D(s) = 0$ 的根 p_i , $i = 1, \dots, n$;

(II) 由(1.7)求 λ_i , 进而求得 α_i , $i = 1, \dots, n$;

(III) 根据不同的保持器选择 w_i 及 h , $i = 1, \dots, n$;

(IV) 计算 $N(p_i)$, $J_i(p)$, $J(p)$, $i = 1, \dots, n$;

(V) 设 $Q_j = \sum_{l=1}^n \lambda_l^j N(p_l) J_l(p) w_l$, 计算 $g(0, l) \triangleq N(p_l) J_l(p) w_l$, $l = 1, \dots, n$, $g(j+1, l)$

$$= \lambda_l g(j, l), \quad j = 0, 1, \dots, n-2, \quad \text{则} \quad Q_j = \sum_{l=1}^n g(j, l), \quad j = 0, 1, \dots, n;$$

(VI) $\beta_i = \sum_{t=0}^{i-1} \alpha_t Q_{i-t-1} / J(p)$, $i = 1, \dots, n$.

(注: 当 $n = 1$, $J_i(p) = J(p) \triangleq 1$)

由已知 $H(z)$ 求 $G(s)$ 时, 如果 λ_i 为复数, 由(1.7)得

$$p_i = T^{-1} \ln |\lambda_i| + T^{-1} (\arg(\operatorname{Im} \lambda_i / \operatorname{Re} \lambda_i) + 2m\pi) j, \quad (1.13)$$

其中 $j = \sqrt{-1}$, $m \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $-\pi < \arg(x) \leq \pi$. 显然, p_i 不能唯一确定. 但实际连续系统极点的虚部总是有限的. 设所有极点虚部的绝对值上界为 M . 由(1.13)可得, 当 $T < \pi / M$ 时, 必有 $m = 0$. 故 π / M 可作为 T 充分小的度量.

2. 一类调制器的结果用于二类调制器

对于二类调制器, (1.1) 式中的 L 与两个相邻采样时刻的输入值有关, 故可设

$$L = [w_i^{(1)}] u(k+hT) + [w_i^{(2)}] u(k+1+hT),$$

($w_i^{(1)}$ 、 $w_i^{(2)}$ 及 h 的取值见第5节)

根据线性迭加原理, 可分别独立地考虑 $u(k+hT)$ 和 $u(k+1+hT)$ 的作用, 因此可直接

利用一类调制器的结果, 得

$$H(z) = z^h B(z) / A(z),$$

其中

$$A(z) = \prod_{i=1}^n (z - \lambda_i) \stackrel{\Delta}{=} \alpha_0 z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \cdots + \alpha_n,$$

$$\lambda_i = e^{T p_i}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

$$B^{(k)}(\lambda_i) = v_i(\lambda) N(p_i) w_i^{(k)} J_i(p) / J(p), \quad k = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$\beta_i^{(k)} = \sum_{t=0}^{i-1} \alpha_t \left(\sum_{l=1}^n \lambda_l^{i-t-1} N(p_l) w_l^{(k)} J_l(p) \right) / J(p), \quad k = 1, 2,$$

$$B(z) = B^{(1)}(z) + z B^{(2)}(z) \stackrel{\Delta}{=} \beta_0 z^n + \beta_1 z^{n-1} + \cdots + \beta_n, \quad (2.2)$$

$$\beta_0 = \beta_1^{(2)}, \quad \beta_n = \beta_n^{(1)}, \quad \beta_i = \beta_{i+1}^{(2)} + \beta_i^{(1)}, \quad i = 1, \cdots, n-1. \quad (2.3)$$

由上可知, 对于二类调制器, 已知 $G(s)$ 求 $H(z)$ 的算法与一类调制器不同之处仅在于需用 (1.11) 两次 (即分别以 $w_i^{(1)}$ 、 $w_i^{(2)}$ 代替 w_i), 然后用 (2.3) 求得 β_i 、 $i = 0, 1, \cdots, n$.

由 (2.1)、(2.2) 得

$$N(p_i) = v_i(p) B(\lambda_i) \tilde{w}_i^{-1} J_i(\lambda) / J(\lambda), \quad (2.4)$$

$$\tilde{w}_i \stackrel{\Delta}{=} w_i^{(1)} + \lambda_i w_i^{(2)}.$$

(2.4) 与 (1.10) 有完全相同的数学形式, 因此 b_i 的表达式也与 (1.12) 有相同形式. 故已知 $H(z)$ 求 $G(s)$ 时, 二类调制器在算法上与一类调制器没有区别.

3. 用互异根近似重根的方法

第一节曾用了 $D(s) = 0$ ($A(z) = 0$) 的根互异的条件. 本节提供用互异根代替重根的方法.

设 $p_1 = p_2 = \cdots = p_k$, 令

$$D'(s) \stackrel{\Delta}{=} \prod_{i=1}^k (s - p_1 - \varepsilon_i) \prod_{i=k+1}^n (s - p_i), \quad (3.1)$$

其中 ε_i 是 $x^k - \varepsilon = 0$, $\varepsilon > 0$ 的根, 即

$$\varepsilon_i = \varepsilon (\cos(2(i-1)\pi/k) + j \sin(2(i-1)\pi/k)). \quad (3.2)$$

因此, 可得

$$D'(s) = D(s) - \varepsilon^k \prod_{i=k+1}^n (s - p_i).$$

由上式可知, 若以具有互异根的 $D'(s)$ 代替 $D(s)$, 仅仅使低于 $(n-k+1)$ 次幂项系数产生误差. 设 a_{k+i} , $i = 0, 1, \cdots, n-k$ 的允许误差为 Δ_i , 若 ε 满足

$$\varepsilon^k < \min_{i=0,1,\cdots,n-k} (\Delta_i / 10|\theta_1|), \quad (3.3)$$

其中 $\theta_0 s^{n-k} + \theta_1 s^{n-k-1} + \dots + \theta_{n-k} \stackrel{\Delta}{=} \pi_{i=k+1}^n (s - p_i)$, 则 $D'(s)$ 与 $D(s)$ 系数之差将在允许范围内.

(3.3) 中 θ_i 的计算较麻烦, 根据多项式的根与系数之间的关系, 易证

$$|\theta_i| < (1 + |p^*|)^{n-k}, \quad i = 0, \dots, n-k,$$

$$|p^*| \stackrel{\Delta}{=} \max_{i=k+1, \dots, n} |p_i|.$$

因此可用下式代替 (3.3)

$$\varepsilon^k < \min_{i=0, \dots, n-k} \Delta_i / (10(1 + |p^*|)^{n-k}).$$

当含有 k 重共轭复根时, 可分别用 ε_i 、 $\bar{\varepsilon}_i$ (上标 “-” 表示共轭) 来修正一对重共轭复根. 其结果如下:

$$\text{令 } D'(s) \stackrel{\Delta}{=} \pi_{i=1}^k (s - p_1 - \varepsilon_i) \pi_{i=1}^k (s - \bar{p}_1 - \bar{\varepsilon}_i) \pi_{i=2k+1}^n (s - p_i), \text{ 在忽略含 } \varepsilon^{2k} \text{ 项后,}$$

$$D'(s) \doteq D(s) - \varepsilon^k [(s - p_1)^k + (s - \bar{p}_1)^k] \pi_{i=2k+1}^n (s - p_i).$$

以 $D'(s)$ 代替 $D(s)$, 也仅使 $a_{k+i}, i = 0, \dots, n-k$, 产生误差. 当

$$\varepsilon^k < \min_{i=0, 1, \dots, n-k} (\Delta_i / 10|\theta_i|),$$

$$\theta_0 s^{n-k} + \theta_1 s^{n-k-1} + \dots + \theta_{n-k} \stackrel{\Delta}{=} [(s - p_1)^k + (s - \bar{p}_1)^k] \pi_{i=2k+1}^n (s - p_i),$$

或

$$\varepsilon^k < \min_{i=0, 1, \dots, n-k} \Delta_i / \left(20(1 + |p_1|)^k (1 + |p^*|)^{n-2k} \right),$$

$$|p^*| = \max_{i=2k+1, \dots, n} |p_i|.$$

代替所引起的误差将在允许范围之内.

理论上 ε 取值越小越好, 实际上由于计算机的舍入误差的存在, 有时过小的 ε 反而使误差增大.

4. w_i 的表达式及 h 的取值.

(1) 无保持器

$$\begin{cases} w_i = \exp(T(1-h)p_i), \\ h = 1, \text{ 当 } b_1 \neq 0; \quad h = 0, \text{ 当 } b_1 = 0. \end{cases}$$

(2) 零阶保持器

$$\begin{cases} w_i = [\exp(Tp_i) - 1] / p_i, \quad p_i \neq 0; \quad w_i = T, \quad p_i = 0, \\ h = 0. \end{cases}$$

(3) 一阶保持器

$$\begin{cases} w_i^{(1)} = [Tp_i + 1 - \exp(Tp_i)] / Tp_i^2, & p_i \neq 0; & w_i^{(1)} = -T/2, & p_i = 0, \\ w_i^{(2)} = [(Tp_i + 1)\exp(Tp_i) - 2Tp_i - 1] / Tp_i^2, & p_i \neq 0; & w_i^{(2)} = 3T/2, & p_i = 0, \\ h = -1, \end{cases}$$

$$\tilde{w}_i = (Tp_i + 1)(\exp(Tp_i) - 1)^2 / Tp_i^2, \quad p_i \neq 0; \quad \tilde{w}_i = T, \quad p_i = 0.$$

(4) 三角形保持器

$$\begin{cases} w_i^{(1)} = [(Tp_i - 1)\exp(Tp_i) + 1] / Tp_i^2, & p_i \neq 0; & w_i^{(1)} = T/2, & p_i = 0, \\ w_i^{(2)} = [\exp(Tp_i) - Tp_i - 1] / Tp_i^2, & p_i \neq 0; & w_i^{(2)} = T/2, & p_i = 0, \\ h = 0, \end{cases}$$

$$\tilde{w}_i = (\exp(Tp_i) - 1)^2 / Tp_i^2, \quad p_i \neq 0; \quad \tilde{w}_i = T, \quad p_i = 0,$$

(5) 延迟一步三角形保持器

$h = -1$, 其余同三角形保持器。

5. 应用Tustin算子的条件

作为前面结果的一个应用, 可证下面结论。

结论: 当调制器为三角形保持器时

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} H(z) = G(2(z-1)/T(z+1)),$$

$$\Delta = \min_{i=1, \dots, n} T^3 |p_i|^3,$$

即, 应用Tustin算子的条件是 Δ 充分小。

$$\begin{aligned} \text{证} \quad & \left| (1 - p_i T/2)e^{Tp_i} - (1 + p_i T/2) \right| = \left| \sum_{k=3}^{\infty} \frac{T^k p_i^k}{(k-1)!} (1/2 - 1/k) \right| \\ & = \left| \sum_{h=0}^{\infty} \frac{T^3 p_i^3}{2(2+h)(3+h)} \frac{T^h p_i^h}{h!} \right| < T^3 |p_i|^3 e^{Tp_i} / 12, \end{aligned}$$

$\therefore$ 当 $\Delta \rightarrow 0$ 时, (此时, 必有 $e^{Tp_i} / 12 < 1$) 有

$$\lambda_i = e^{Tp_i} = (1 + p_i T/2) / (1 - p_i T/2).$$

将上式代入(四)中三角保持器的 $w_i^{(1)}$ 、 $w_i^{(2)}$ 表达式, 可得

$$w_i^{(1)} = w_i^{(2)} = T / (2 - Tp_i), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5.1)$$

由(2.1)知, (5.1)意味着 $B^{(1)}(z) = B^{(2)}(z)$, 因而有

$$H(z) = (1+z)B^{(1)}(z)/A(z) = (1+z) \sum_{i=1}^n B^{(1)}(\lambda_i) v_i^{-1}(\lambda) / (z - \lambda_i),$$

将(2.1)代入上式可得

$$\begin{aligned}
 H(z) &= \sum_{i=1}^n TN(p_i)v_i^{-1}(p) / \{2(1 - p_i T/2)(z - \lambda_i)\} \\
 &= \sum_{i=1}^n \frac{N(p_i)v_i^{-1}(p)}{\frac{2}{T}\left(\frac{z-1}{z+1}\right) - p_i} = G\left(\frac{2}{T}\frac{z-1}{z+1}\right).
 \end{aligned}$$

附录1 设 $p_1 \neq p_2$, 如果

$$\operatorname{Re} p_1 = \operatorname{Re} p_2, \quad T(\operatorname{Im} p_1 - \operatorname{Im} p_2) = 2k\pi, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots,$$

则有 $e^{Tp_1} = e^{Tp_2}$, 即 $\lambda_1 = \lambda_2$. 但这种情况在实际中几乎不出现. 即使出现, 也可重新取 T 值, 使 $T(\operatorname{Im} p_1 - \operatorname{Im} p_2) \neq 2k\pi$.

参 考 文 献

- (1) 熊光楞编著, 控制系统数字仿真, 清华大学出版社, 北京, (1982).
- (2) H.T.库索夫可夫等著, 章燕申译, 控制系统最优滤波和辨识方法, 国防工业出版社, 北京, (1984), 第四章.
- (3) 朱维彰, 线性随机微分方程与其ARMA形式的采样模型, 控制理论与应用, 4, 2, (1987), 47—56.

Direct Conversion From Transfer Function to Pulse Transfer Function and its Converse

Zu Weizhang

(Department of Electrical Engineering, Xian Institute of Technology)

Abstract: Analytic expressions have been developed in this paper, they are the relations of the parameters conversion between transfer function and pulse transfer function, in the case of distinct roots. These expressions are of uniform mathematical form and algorithm for different hold unit. When there are repeated roots, an effective perturbation method is presented by which the repeated roots may be replaced by distinct ones. Finally, a proof of the condition for using Tustin Operator method is given as an example of application

Key words: system simulation; sampled system; transfer function; pulse transfer function