第7卷 第2期
1990年6月

控制理论与应用
CONTROL THEORY AND APPLICATIONS

Vol.7, No.2
June, 1990

ARMA 模型 AR 部分阶与参数估计的超定快速递推算法*

胡 德 文
(国防科技大学自控系，长沙)

摘要 本文给出了一种新的ARMA模型AR部分的阶次与参数估计的超定快速递推算法，提高了运算速度和估计精度.

关键词：参数估计；快速算法；ARMA 模型；阶次确定

1. 引 言

随着通讯与控制、气象科学等的迅速发展，ARMA 模型在信号处理、时间序列分析、系统辨识等许多方面得到了广泛应用. 一种普遍使用的方法是首先采用 Yule–Walker 方程估计出 AR 部分的参数，然后再估计 MA 部分. 近来的研究发现，如果所利用的 Yule–Walker 方程个数亦即被利用的样本自相关函数愈多，则 AR 参数估计的精度就愈高，从而提出了超定 Yule–Walker 估计的思想[1, 2]. 但是，由此带来了计算量的增加，且原有的快速算法不再能被应用. 文〔3〕提出了一种超定 Yule–Walker 估计的斜格型参数快速求解法，使每一步的运算量由 $p^2N+o(p^3)$量级降到了乘除法约 $16pN$ 加减法约 $12pN$ 次(这里 p 表示 AR 部分阶次，N 为原始序列样本数).

本文从矩阵求逆公式和奇异矩阵行列式为零出发，提出了一种既能估计系统阶数，又能递推计算参数的快速算法. 其乘除法和加减法的运算量均约为$(k_1-k_0)(p+1)+1/2p^3$次，这里 (k_1-k_0)是与 N 相当的数.

2. AR 部分参数的最小二乘估计

设$\{y_t\}$是平稳可逆的 ARMA (p,q)序列，表示为

$$y_t+a_1y_{t-1}+\cdots+a_py_{t-p}=b_0\varepsilon_t+\cdots+b_q\varepsilon_{t-q}, \tag{1}$$

其中 ε_t 是均值为零、方差为 1 的白噪声. 如用 $r(k)$ 表示 y_t 的自相关函数，那么可证明，当 $k>q$ 时

$$r(k)+a_1r(k-1)+\cdots+a_pr(k-p)=0. \tag{2}$$

在实际应用中，$r(k)$ 总是用样本自相关函数来代替的. 设 $r(k)$ 的无偏估计值为$\hat{r}(k)$，那么，

$$\hat{r}(k)+a_1\hat{r}(k-1)+\cdots+a_p\hat{r}(k-p)=\eta(k), \quad q<k<N_0, \tag{3}$$

* 国家自然科学基金资助项目.
本文于1988年6月6日收到. 1990年1月9日收到修改稿.

其中 N_0 为已知$\hat{r}(k)$的总个数，即已有$\hat{r}(0)$，…，$\hat{r}(N_0)$. 而 $\{\eta(k)\}$ 为$\hat{r}(k)$代替 $r(k)$ 时带来的方程误差.

我们假设 p 和 q 的上界 p_m 和 q_m 已知. 为保证下面将出现的 $H(p)$ 矩阵的行数大于列数，令

$$N_0 \geqslant 2p_m + q_m,\tag{4}$$

且记

$$k_0 \stackrel{\triangle}{=} q_m,\quad k_1 \stackrel{\triangle}{=} N_0 - p_m,\tag{5}$$

$$R(p) \stackrel{\triangle}{=} [\hat{r}(k_0+p)\quad \hat{r}(k_0+p+1)\cdots\hat{r}(k_1+p)]^T,\tag{6}$$

$$H(p) \stackrel{\triangle}{=} \begin{bmatrix} \hat{r}(k_0+p-1) & \hat{r}(k_0+p-2)\cdots\hat{r}(k_0) \\ \hat{r}(k_0+p) & \hat{r}(k_0+p-1)\cdots\hat{r}(k_0+1) \\ \vdots & \vdots \qquad \vdots \\ \hat{r}(k_1+p-1) & \hat{r}(k_1+p-2)\cdots\hat{r}(k_1) \end{bmatrix}^T,\tag{7}$$

AR参数向量估计值为

$$A(p) \stackrel{\triangle}{=} [a_1(p),\ a_2(p),\ \cdots,\ a_p(p)]^T.\tag{8}$$

这时，在最小二乘准则 $\min\sum_{k=k_0}^{k_1}\eta^2(k+p)$ 的意义下有

$$A(p) = -[H^T(p)H(p)]^{-1}H^T(p)R(p).\tag{9}$$

若令

$$W(p) \stackrel{\triangle}{=} [H^T(p)H(p)]^{-1},\tag{10}$$

$$F(p) \stackrel{\triangle}{=} H^T(p)R(p),\tag{11}$$

则有

$$A(p) = -W(p)F(p).\tag{12}$$

3. AR 部分快速定阶准则与参数估计

如果$\hat{r}(k)$本身就是 $\{y_t\}$ 的真实自相关函数，那么恒有 $\eta(k)=0$，因 $H(p)$ 的行数大于列数，由线性代数理论可知，当 AR 部分真实阶数为 p 时，$H(i)$ 的秩为 i（若 $i\leqslant p$）或 p(若 $i>p$). 这时推知，$i>p$ 时 $\det[H^T(i)H(i)]=0$. 由此可定出 AR 部分阶 p. 为此，在样本自相关函数下采用

$$J(i) = \det W(i)/\det W(i+1),\tag{13}$$

取 $i=1,2,\cdots$，当 $i=p$ 时 $\det W^{-1}(p+1)\approx 0$，从而 $J(p)\approx 0$，即 $J(i)$ 显著地减少时的 i 值即为 AR 部分阶次 p.

但是，这种准则每步需要 $o(i^3)$ 级的计算量. 下面的算法将依阶次递推估计出 AR 部分的参数，同时给出定阶准则的数值.

初始值($p=1$):

$$S_0(1)=\sum_{k=k_0}^{k_1}\hat{r}^2(k+1),$$

$$S_1(1)=\sum_{k=k_0}^{k_1}\hat{r}(k)\hat{r}(k+1),$$

$$W(1)=\left[S_0(1)+\hat{r}^2(k_0)-\hat{r}^2(k+1)\right]^{-1},$$

$$\mathrm{A}(1)=-W(1)S_1(1),$$

$$\mathrm{F}(1)=S_1(1).$$

第一步:

$$J(p)=S_0(p)+\mathrm{F}^T(p)\mathrm{A}(p). \tag{14}$$

如果 $J(p)$ 显著减少则 AR 阶定为 p, AR 参数为 $\mathrm{A}(p)$; 否则转下一步 .

第二步:

$$S_i(p+1)=S_i(p)+\hat{r}(k_1+p+1)\hat{r}(k_1+p+1-i)-r(k_0+p)\hat{r}(k_0+p-i),$$

$$i=0,1,\cdots,p\text{时}, \tag{15}$$

$$S_{p+1}(p+1)=\sum_{k=k_0}^{k_1}\hat{r}(k)\hat{r}(k+p+1), \tag{16}$$

$$\mathrm{F}(p+i)=[S_1(p+1),\ S_2(p+1),\cdots,S_{p+1}(p+1)]^T, \tag{17}$$

$$W(p+1)=\begin{bmatrix} J^{-1}(p) & J^{-1}(p)\mathrm{A}^T(p) \\ J^{-1}(p)\mathrm{A}(p) & W(p)+J^{-1}(p)\mathrm{A}(p)\mathrm{A}^T(p)\end{bmatrix}, \tag{18}$$

$$\mathrm{A}(p+1)=-W(p+1)\mathrm{F}(p+1). \tag{19}$$

$p+1\Rightarrow p$转向第一步.

证 由 (6) 式和 (7) 式, 有

$$H(p)=〔\mathrm{R}(p-1)\quad \mathrm{R}(p-2)\cdots\mathrm{R}(0)〕, \tag{20}$$

从而推得

$$H(p+1)=〔\mathrm{R}(p)\quad H(p)〕, \tag{21}$$

即有

$$W^{-1}(p+1)=H^T(p+1)H(p+1)=\begin{bmatrix} R^T(p)\mathrm{R}(p) & \mathrm{R}^T(p)H(p) \\ H^T(p)\mathrm{R}(p) & H^T(p)H(p)\end{bmatrix}. \tag{22}$$

根据(10)、(11)式, 有

$$W^{-1}(p+1)=\begin{bmatrix} \mathrm{R}^T(p)\mathrm{R}(p) & \mathrm{F}^T(p) \\ \mathrm{F}(p) & W^{-1}(p)\end{bmatrix}. \tag{23}$$

根据分块矩阵行列式公式[4],

$$\det W^{-1}(p+1)=\begin{vmatrix} \mathrm{R}^{\prime}(p)\mathrm{R}(p) & \mathrm{F}^{T}(p) \\ \mathrm{F}(p) & W^{-1}(p) \end{vmatrix}$$

$$=\det\left[\mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(p)-\mathrm{F}^{T}(p)W(p)\mathrm{F}(p)\right]\det W^{-1}(p).$$

由(13)式，有

$$J(p)=\det W(p)/\det W(p+1)=\det W^{-1}(p+1)/\det W^{-1}(p)$$

$$=\det\left[\mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}P-\mathrm{F}^{T}(p)W(p)\mathrm{F}(p)\right].$$

因为 $\mathrm{R}(p)$ 是一个一维列向量，故上式最后一个等式的项 det〔·〕等于中括号中的数值．利用(12)式得

$$J(p)=\mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(p)+\mathrm{F}^{T}(p)\mathrm{A}(p). \tag{24}$$

定义

$$S_{i}(p)\overset{\Delta}{=}\mathrm{R}^{T}(p-i)\mathrm{R}(p), \tag{25}$$

结合(24)及(25)式的 $s_0(p)$，即证得(14)式．

由(22)式，采用分块矩阵求逆公式[4]，可知

$$W(p+1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W(p) \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -1 \\ W(p)\mathrm{F}(p) \end{bmatrix}\cdot\left[\mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(p)-\mathrm{F}^{T}(p)W(p)\mathrm{F}(p)\right]$$

$$\cdot\left[-1,\mathrm{F}^{T}(p)W(p)\right].$$

由(12)和(24)式，即有

$$W(p+1)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & W(p) \end{bmatrix}+J^{-1}(p)\begin{bmatrix} -1 \\ -\mathrm{A}(p) \end{bmatrix}\left[-1,-\mathrm{A}^{T}(p)\right].$$

此式即为(18)式．

下面证明(15)、(16)、(17)式．

由(20)式及(11)式，得

$$\mathrm{F}^{T}(p)=\mathrm{R}^{T}(p)H(p)=\mathrm{R}^{T}(p)\left[\mathrm{R}(p-1)\quad \mathrm{R}(p-2)\cdots\mathrm{R}(0)\right]$$

$$=\left[\mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(p-1),\ \mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(p-2),\ \cdots,\ \mathrm{R}^{T}(p)\mathrm{R}(0)\right],$$

对照(25)式，得

$$\mathrm{F}^{T}(p)=\left[S_{1}(p),\ S_{2}(p),\ \cdots,\ S_{p}(p)\right].$$

这就证得了(17)式．

再由(6)式和(25)式，即有

$$S_{i}(p)=\sum_{k=k_0}^{k_1}\hat{r}(p+k)\hat{r}(p+k-i),$$

这样就得到了(15)和(16)式．进而，可验证初始值 $S_0(1)$、$S_1(1)$、$W(1)$、$\mathrm{A}(1)$ 的各个表达式是成立的．证毕．

4. 有关讨论

以上算法的特例是，当 $p=1\sim p_m$ 时，$J(p)$ 的值均无显著变化，但与 $S_0(1)$ 比较相差较大，这时定阶次为 $p=1$；若与 $S_0(1)$ 比较也相差不显著，则应定阶次为 $p=0$，即 $\{y_t\}$ 为MA 过程时间序列.

以上算法大约需要乘（除）法和加（减）法的次数均为 $(k_1-k_0)(p+1)+\frac{1}{2}p^3$. 若不采用本文的阶递推算法，直接采用高斯消元法逐阶计算，则需要的计算量约为 $(k_1-k_0)p^3+o(p^4)$. 可见，计算量上的改进是可观的，对于超定 Yule－Walker 估计来讲，是一种行之有效的快速算法.

本文算法是建立在超定 Yule–Walker 估计方法上的，且整个递推过程在数学上完全与原超定 Yule–Walker 估计等价，根据文献〔1〕〔2〕的分析，超定 Yule–Walker 估计要比通常的修正 Yule–Walker 估计算法的精度高. 因此本文算法具有良好的估计性能.

参 考 文 献

〔1〕Cadzow, J. A., Spectral Estimation: An Overdetermined Rational Model Equation Approach, Proc. IEEE, 70, 9, (1982), 907—939.

〔2〕Stoica, P., etal, Statistical Analysis of the Overdetermined Yule–Walker Estimator of Frequencies of Multiple Sinusoids, Preprint of the 8th IFAC Conf. on Identification and System Parameter Estimation, Pt. 2, (1988).

〔3〕尤肖虎、何振亚，ARMA过程超定Yule—Walker方程的斜格型快速求解法，第二届全国信号处理学术会议论文集，南京，(1986).

〔4〕张金槐、常兆诚，飞行器试验统计学（下册），国防科技大学出版社，长沙，(1981).

An Overdetermined Fast Recursive Algorithm for Estimating the Orders and the Parameters of AR Part of ARMA Models

Hu Dewen

(Department of Automatic Control, National University of Defense Technology, Changsha)

Abstract: In this paper, a new algorithm of overdetermined fast recursive estimator for the orders and the parameters of AR part of ARMA models is suggusted, which requires less comutation and has higher precision.

Key words: parameter estimation; fast algorithm; ARMA models; order determination